

अनुप्रयुक्त सामान्य सांख्यिकी

APPLIED GENERAL STATISTICS

89931

फ्रेडरिक ई० कॉव्स्टन

डब्ले जे० काउडन

सिडनी पलेन

अनुवादक

डॉ० पी० सी० जैन

रीडर, अर्थशास्त्र विभाग,

मुरक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र



हरियाणा हिन्दी ग्रंथ अकादमी, चण्डीगढ़

© Preptice-Hall, Inc , Englewood Cliffs N J, U.S A (1967)—English version.

© Haryana Hindi Granth Akademi, Chandigarh (1975,—Hindi version.

यह पुस्तक प्रेन्टिस-हॉल, इन्कॉर्पोरेटेड, एन्गलवुड क्लिफ्स द्वारा प्रकाशित फ्रेडरिक ई० वॉबस्टन, "डॉले जे० वाउडन, तथा मिडनी सेन कृत एप्पाइड जनरल स्टैटिस्टिक्स (तृतीय संस्करण—1967—भारत में पुनर्मुद्रित—1969) का हिन्दी अनुवाद है। इसके अनुवाद अधिकार वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग द्वारा प्राप्त किए गए थे। इसे शिक्षा तथा समाज कल्याण मंत्रालय, भारत सरकार की विश्वविद्यालय स्तरीय पुस्तक रचना योजना के अन्तर्गत प्रकाशित किया जा रहा है।

प्रथम संस्करण	1975
मुद्रित प्रतियाँ	1100
मूल्य	: उनतीस रुपये (Rs 29 00)

This book has been published with a subsidy under the Indo American Text-Book Programme operated by National Book Trust India

Subsidy Code No 4-120 1975

आर० के० प्रिन्टर्स, 80-डी, कमला नगर, दिल्ली-110007 में मुद्रित

प्रस्तावना

सांख्यिकी का महत्त्व दिन प्रतिदिन बढ़ता जा रहा है। अर्थशास्त्र में सांख्यिकी के अध्ययन का महत्त्व या तो पर्याप्त समय से रहा है परन्तु द्वितीय विश्वयुद्ध के उपरान्त विशेष कर इस शताब्दी के छठे और गानव दशका में सांख्यिकी अर्थशास्त्र का एक अनिवार्य एवं अभिन्न अंग बन गई है। सांख्यिक क्षेत्र में अनुसंधान एवं शोध कार्य की तो सांख्यिकी के आधार के बिना कल्पना करना भी कठिन हो गया है। अर्थशास्त्र ही क्या, अन्य सामाजिक एवं वैज्ञानिक अध्ययन में भी सांख्यिकी का प्रयोग बढ़ता जा रहा है।

राष्ट्र भाषा हिन्दी का शिक्षा के माध्यम के रूप में विश्वविद्यालय स्तर पर अपनाते के मार्ग में एक बड़ी कठिनाई जो विद्यार्थियों और शिक्षाशास्त्रियों के सामने आती है वह उच्च कोटि के प्रामाणिक ग्रन्थ इस भाषा में उपलब्ध न होना है। निम्नलिखित, अनुप्रायुक्त सामान्य सांख्यिकी विश्वविद्यालयीन विद्यार्थियों के लिए एक उपयोगी मूल और सुस्पष्ट ग्रन्थ है। हिन्दी भाषा में इस प्रकार के उपयोगी ग्रन्थों का अनुवाद हिन्दी के माध्यम से अपने को व्यक्त करने वाले विद्यार्थियों के लिए एक बड़ा महत्त्व हो सकता है। जैसे-जैसे इस माध्यम के परिष्कारों की समस्या बढ़ रही है वैसे-वैसे मूल ग्रन्थों के प्रामाणिक अनुवाद भी महत्त्वपूर्ण होने जा रहे हैं। प्रस्तुत पुस्तक न केवल सांख्यिकी का अध्ययन प्रारम्भ करने वाले विद्यार्थियों के लिए अत्यन्त उपयोगी है बल्कि उन विद्यार्थियों के लिए भी मूल्यवान है जो विषय की गहराई में जाना चाहते हैं।

पुस्तक में वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आसानी से भारत सरकार द्वारा तैयार की गई पारिभाषिक शब्दावली का प्रयोग किया गया है ताकि समूचे भारत में पारिभाषिक शब्दा में एकरूपता बनाए रखी जा सके।

आशा है विषय के विद्यार्थी एवं प्राध्यापक पुस्तक का उपयोगी पाएंगे।

डा. अरवि शर्मा

७०७७५५७

शिक्षा मंत्री, हरियाणा,

एवं अध्यक्ष

निदेशक,

हरियाणा हिन्दी ग्रन्थ अकादमी,

हरियाणा हिन्दी ग्रन्थ अकादमी

चण्डीगढ़

चण्डीगढ़

प्राक्कथन

अनुप्रयुक्त सामान्य सांख्यिकी (*Applied General Statistics*) के इस तृतीय संस्करण में प्राथमिक उद्देश्य वही है जो पन्थन व संस्करणों का था। यद्यपि संस्करण में तथापि स्पष्टता में सामान्यतः अधिक प्रयुक्त हान वाली सांख्यिकीय विधियों का वर्णन तथा बहुतों में क्षेत्रों में उनका प्रयोग का निदर्शन।

विषय क्षेत्र अधिकृत है जो पूर्व संस्करणों का था। यद्यपि पुस्तक लगभग 100 पृष्ठ कम कर दी गई है। व सभी निदर्शन उदाहरण प्रिनकी स्थिति में मिला अपक्षिप्त था या ता वर्तन दिए गए थे या नवीनतम बना लिए गए हैं। तथा पहले की भांति वास्तविक न कि परिकल्पनात्मक आंकड़ा पर आधारित है। परन्तु न ता प्रकरणों का क्रम बदला गया है और न ही संकेत। इस संस्करण में संकेतों की सूचियां जो पहले संकेत प्रयोग करने वाले प्रत्यक्ष अध्याय में पूर्व की गई थी अब परिशिष्ट व में संकटि दी गई है। अनुप्रयुक्त सामान्य सांख्यिकी की वाचस्पत्यता का आगामी पाँचवाँ संस्करण प्रकरणों का क्रम तथा संकेत हानों की दृष्टि में इस संस्करण के अनुरूप होगा।

अनुप्रयुक्त सामान्य सांख्यिकी का यह तृतीय संस्करण मिडनी के बाद न तैयार किया।

मै कम्ब्रिज के प्राध्यापक मर्गरीट डी. ए. फिशर गणितज्ञ व डा० फ्रैंक यटम तथा एडिनबर्ग के मरिस आलिवर गड बायट निमिटिड द्वारा अपनी पुस्तक स्टैटिस्टिकल टेबल फार बायोलॉजिकल एग्जैम्पल एंड मेडिकल रिसर्च में से तीसरी और चौथी सारणियां का अंश का पुनमुद्रण की अनुमति प्रदान करने के लिए उनका आभारी हूँ। मै प्रोफेसर इगन एम० पिपसन तथा बायोमीट्रिक स्टडीज का भी बायोमीट्रिक तथा ई० एम० पिपसन और एच० ओ० हाटल की बायोमीट्रिक टेबल फार स्टैटिस्टिशियन भाग। में मै सारणियों अथवा मारणी अंशों का यही परिशिष्ट भेज दिया तथा त तथा पाठ 256 एवं 257 में दिखाए गए हैं के पुनमुद्रण की अनुमति प्रदान करने के लिए आभारी हूँ। अथ व्यक्तियों और संस्थाओं की जिन्होंने आंकड़ा प्रदान किए अथवा सामग्री के पुनमुद्रण की अनुमति दी। यथास्थान अभिवादन किया गया है।

इस संशोधित संस्करण के प्रकाशन में बहुतों से व्यक्तियों तथा संस्थानों ने प्रत्यक्ष अथवा परोक्ष रूप में सहायता की है। दुर्भाग्यवश प्रत्येक व्यक्तिगत अंशदान के लिए आभार प्रदर्शन स्थानाभाव के कारण संभव नहीं है। रूग्म स्टेट विश्वविद्यालय व प्रशासन सहाय एवं/अथवा कमचारिवर कोलम्बिया विश्वविद्यालय लास एंजलेस में कलिफोर्निया विश्वविद्यालय राष्ट्रीय जैविकी विश्वविद्यालय तथा तबान चीन गणतंत्र अंतर्राष्ट्रीय आर्थिक सहयोग एवं विकास परिषद चीन गणतंत्र हांग कांग विश्वविद्यालय और एशिया फाउंडेशन संयुक्त राज्य अमेरिका ने भुक्त आवश्यकतानुसार जब मैं उनके सहायकान में पढ़ाता था अथवा CIECD के अध्यापक प्रशिक्षण कार्यक्रम में अध्ययन निदर्शक के रूप में

सेवा करता था, पर्याप्त नैतिक सहायता तथा उत्तम सुविधाएँ प्रदान की। मैं प्रिंटिस-हॉल, इन्कॉर्पोरेटेड के प्रवर सम्पादक राबर्ट सी० वाल्टर्स का विशेष धन्यवादी हूँ, जिनका सावधान एवं सहयोगपूर्ण प्रकाशन-सम्पादकीय निरीक्षण, संयुक्त राज्य अमरीका से लेखक की अनुपस्थिति में अत्यधिक सहायक तथा अत्यंत आवश्यक रहा।

पाण्डुलिपि के विभिन्न भागों में सेंटन हाल विश्वविद्यालय के प्रोफेसर अल्फ्रेड जे० काना के अश्रदानों का आभाम होता है। श्रीमती हेलन चानिन तथा कुमारी रूबी ग्रिग चू ने पाण्डुलिपि के कुछ भागों को टाइप करके बहुत सहायता की है। स्पेन्सर आर० बेनेन ने लिपि-कार्य में बहुत सहायता की। अन्त में, परन्तु किसी भी प्रकार में न्यूनतम नहीं, मैं अपनी पत्नी इलीनोर बेनेन, जिन्होंने टाइप किया, चार्ट बनाए और आवश्यकतानुसार सम्पादन किया के प्रति आभार स्वीकार करना चाहता हूँ।

सिडनी ब्लेन

हाग काग विश्वविद्यालय

हाग काग बी० सी० सी०

विषय-सूची

(साहित्यिकीय विधिषा व अन्य पाठ्यक्रम के लिए इस विषय-सूची में तारांकित अध्याय या परिच्छेदों विवेचन प्रवाह को अग किए बिना छोड़े जा सकते हैं ।)

पद्याय

पृष्ठ

1 परिचय

1

साहित्यिकीय आँकड़े एवं साहित्यिकीय विधियाँ	1
समय	2
प्रस्तुति	3
विशेषण	3
व्याख्या	6
कुछ अनुसुक्तताएँ	6
पूत्रपह	6
महत्त्वपूर्ण कारक की लुप्ति	7
असावधानी	8
अघटित परिणाम	8
अनुलनीय आँकड़े	8
माहचय और कारणता की सन्धाति	9
अपर्याप्त आँकड़े	9
अप्रातिनिधिक आँकड़े	10
अप्रकट वर्गीकरण	10
इत्यादि की व्याख्या का अकरण	10
भ्रामक योग	11
निकृष्ट रूप से अभिकल्पित प्रयोग	11
अनुसंधान विधियाँ	12

2 साहित्यिकीय आँकड़े

15

साहित्यिकीय आँकड़ों का संग्रह	16
संग्रह की विधि	16
प्रक्रिया की रूपरेखा	16
1 अध्ययन की योजना बनाना	16
2 प्रश्न बनाना और अनुसूची तैयार करना	18
3 प्रतिदश के प्ररूप का चयन करना	23

2 सांख्यिकीय आंकड़ें (वितरित)

4 जानकारी प्राप्त करने के लिए अनुसूचियों का प्रयोग	31
5 अनुसूचियों का सम्पादन करना	33
6 आंकड़ों को मुख्यवर्धित करना	34
7 प्रस्तुति तथा विश्लेषण	42
वर्तमान स्रोतों का प्रयोग	42
प्राथमिक बनाम गौण स्रोत	42
आंकड़ों की उपयुक्तता	43
विभिन्न स्रोतों से प्राप्त आंकड़ों की तुलनात्मकता	44

3 सांख्यिकीय सारणियाँ

47

प्रस्तुति की विधियाँ	47
घाट प्रस्तुति	47
सारणीक निरूपण	48
अध सांख्यिक निरूपण	49
लेखाचित्रात्मक निरूपण	49
प्रमुख विचार	49
सारणियों के प्रकार	49
तुलना	51
बल	53
स्टब से सदा की व्यवस्था तथा शीघ्र	54
सारणी निर्माण का व्यौरा	56
शीघ्र तथा पहचान	56
प्रारम्भिक तथा बाद टिप्पणियाँ	56
स्रोत टिप्पणियाँ	57
प्रतिशतताएँ	57
समस्याओं का पूर्णक	58
योग	59
इकाइयाँ	59
सारणी का आकार और स्वरूप	60
रेखाकन	61
आख का मापदण्ड	61
शून्य	61
टाइप का आकार और प्रकार	61
सांख्यिकीय रिपोर्ट	61

4. लेखाचित्रीय निरूपण I अक्षयक्षितीय पैमानों के प्रयोग वाले वक्र ... 63

लेखाचित्रीय विधि	...	63
चाटों के प्रकार	...	64
वक्र आलेखन	.	65
वक्रों द्वारा प्रदर्शित मात्राओं के प्रकार		67
काल श्रेणी वक्र		67
वारवारता बटन के वक्र	.	68
वक्र आलेखन के नियम	.	71
ऊर्ध्वाधर पैमान पर शून्य		71
वक्रों का रेखांकन	.	74
निर्देशांक	..	75
चाटें अनुपात	.	76
प्रसार-लेखन	...	76
शीर्षक	...	79
स्तर	...	79
विशेष प्रयोजना व लिए दया प्राप्त	.	80
घुड़ केप चाटें		80
छाया-चित्र चाटें	...	80
परिमर चाटें	...	80
जड़ चाटें		80
परिवर्तों क्षितिज-पैमाना चाटें		83
बहु-प्रक्ष चाटें		83
सघटक भाग चाटें	...	85
वारवारता बटन तथा परिमर चाटें	...	85

5. लेखाचित्रीय निरूपण II अर्ध-लघुगुणकीय तथा अनुपात चाटें ... 87

परिवर्तन की मात्रा बनाम परिवर्तन का अनुपात	..	87
परिवर्तन के अनुपात दिखाने के लिए शिड	...	92
लघुगुणकीय पैमाना	...	93
वक्रों की व्याख्या	...	98
अनुप्रयोग	...	98
वृद्धि अथवा ह्रास के अनुपातों की तुलना	...	98
उत्तार-चढ़ावों की तुलना	.	101
अनुपातों का दिग्दर्शन	...	101
अन्तर्वेशन तथा बाह्यवेशन	...	103
लघुगुणकीय पैमानों का निर्माण	...	105

6 लेखावित्रीय निरूपण III चार्टों के अन्य प्रकार 107

तुलना के आधार	107
दंड चार्ट	109
चित्रलग	113
पट्टक भाग चार्ट	114
गाण्धिवित्रीय मानचित्र	119
तिरछी रेखाओं वाला मानचित्र	120
बिन्दु मानचित्र	120
पिने मानचित्र	121

7 दरें, अनुपात, तथा प्रतिशतताएँ 123

परिकल्पना	124
परिवर्तनशील आधार का प्रभाव	125
प्रतिशतताएँ अंकित करना	126
तुलनाओं के प्रकार	127
कुछ बहुधा प्रयुक्त अनुपात	128
सूचकांक	128
निग अनुपात	129
जनसंख्या घनत्व	129
प्रति व्यक्ति अनुपात	129
मृत्यु दरें	129
जन्म दरें	131
प्रति एकड़ फसल उपज	131
सुझर-मक्का अनुपात	131
दल्लेबाजी की शीमों	132
हवाई मार्ग दुर्यन्तता अनुपात	133
100 प्रतिशत विवरण	133
रेल मार्ग अनुपात	134
प्रतिशतताओं का दूषित प्रयोग	135
आधार के सम्बन्ध में सन्नम	135
लघु संख्याओं के प्रतिशतताएँ	136
अस्थानस्थ दशमलव बिन्दु	136
अकसरितीय यद्युद्धियाँ	137
प्रतिशतताओं और अनुपातों की असुद्ध शीमों	137
निकालना	137

अध्याय

पृष्ठ

8 बारवारता बटन

138

अपवर्ग आकडा	138
मरणी	140
बारवारता बटन	142
वर्ग मर्या का चयन	145
वर्ग भीमाभा का चयन	146
बारवारता बटन का वर्ग	148
संख्याचिन्नीय निरूपण जो वर्ग प्रमाण प्रमाण है	150
बारवारता बटन की संख्याचिन्नीय नुनता	151
संख्या बारवारता बटन और नगर	1 4

9 केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप

156

समानता माप	156
असममिति आकडा न समानता माप	156
समानता माप का गणक	157
समूहित आकडा न समानता माप का विधि	159
समूहित आकडा न समानता माप का विधि	162
असमान वर्ग प्रमाणता का समूहित आकडा न समानता माप	164
समानता माप का संशोधित रूप	165
प्रतिशततामा की औसत निकालना	166
औसत की औसत निकालना	167
माध्यिका	168
असमूहित आकडा न माध्यिका	168
समूहित आकडा न माध्यिका	169
चतुर्थक पंचमक दशमक तथा शतकमक	170
बहुलक	172
असमूहित आकडा से बहुलक	172
समूहित आकडा से बहुलक	172
माध्य माध्यिका और बहुलक की विशेषताएँ	174
प्रत्यय का परिचय	174
बीजीय निरूपण	175
आकडा के वर्गीकरण की आवश्यकता	176
असमान वर्ग अंतराल का प्रभाव	176
सुले सिरे वाले वर्गों का प्रभाव	177
तिरछेपन का प्रभाव	177
असमानता का प्रभाव	177

9 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (वित्त)

आँकड़ों की अनियमितता का प्रभाव	179
प्रतिदर्शों पर आधारित होने पर विश्वस्तता	179
गणितीय गुणधर्म	179
समूचित माप का चयन	179
जघ माध्य	180
गुणान्तर माध्य	181
हार्मोनिक माध्य	185

10 विक्षेपण, तिरछापन, तथा ककुदता

192

निरयम विक्षेपण के माप	193
परिमर	193
10-90 गततमक परिमर	194
चतुर्थक विचलन	194
श्रौसन विचलन	195
मानक विचलन, असमूहित आंकड़े	195
मानक विचलन समूहित आँकड़े	197
मानक विचलन के गुणधर्म	199
मापेल विक्षेपण के माप	202
तिरछापन	205
तिरछापन का पियर्सन का माप	205
चतुर्थको और गततमको पर आधारित तिरछापन के माप	209
तृतीय घूर्ण पर आधारित तिरछापन का माप	209
ककुदता	212
समूहन त्रुटि के लिए घूर्णों का संशोधन	217

11 काल-श्रेणी का परिचय

... 219

काल-श्रेणी की गतिया	219
दोषकालिक उपप्रति	219
आवर्ती गतिया	223
चर्रीय गतिया	226
अनियमित विचरण	227
अन्य गतिया	228
मेधाचित्रीय पूर्वदर्शन	228
आँकड़ों का प्रारम्भिक प्रतिपादन	228

11 काल-भ्रष्टो का परिचय (वितत)

बल-डर भिन्नता	228
जनमर्यादा परिवर्तन	231
मूल्य-परिवर्तन	231
तुलनात्मकता प्राप्त करना	231

12 काल भ्रष्टो का विस्तारण दीर्घकालिक उपनति I—

ऋजु रेखा

234

निरीक्षण द्वारा आसजित उपनति	235
ऋजु रेखा का घूर्णनम वग आसजन	236
ऋजु रेखा	236
घूर्णनम वगा की विधि	238
प्रमाणा में समीकरण	240
वर्षा का विषय मर्यादा	243
वर्षा की सम मर्यादा	246
समीकरणों का मामिक आधार पर अनुकूलन	248
वापिक याग—Y इकाइयाँ एक वर्ष	249
वापिक याग—1 इकाइयाँ एक छमाही	250
मामिक शीमते—1 इकाइयाँ एक वर्ष	250
मामिक शीमत—Y इकाइयाँ एक छमाही	250
उपनति विस्तारण व निष्कर्ष चयन	251
उपनति व प्रसार का चयन	253

*13 काल भ्रष्टो का विस्तारण दीर्घकालिक उपनति II अरेखिक उपनतियाँ

254

साधारण बहुपद	254
द्वितीयांश वक्र	256
तृतीयांश वक्र	260
नेधगणका का प्रयोग	261
सधुगणका में आसजित ऋजु रेखा	261
सधुगणका में आसजित द्वितीयांश वक्र	265
अनन्तस्पर्शी वृद्धि वक्र	267
रूपांतरित चरघाताकी वक्र	268
गाम्पत वक्र	272
वृद्धिघाती वक्र	279
गाम्पत तथा वृद्धिघाती वक्रों की तुलना	287
उपनति प्ररूप का चयन	288

14	काल श्रेणी का विश्लेषण आवर्ती गतियाँ I— स्थिर ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप	..	291
	एक पश्चिमात्मक दृष्टान्त	...	291
	अममजित आकडा की औमते		291
	ममल औमतों की प्रतिशतनाप		292
	मानिक आकडा के ऋतुनिष्ठ मूचकाक	..	295
	उपनति की प्रतिशतनापों पर आधारित ऋतुनिष्ठ मूचकाक	...	296
	केन्द्रीय 12-माम गतिशील औमतों की प्रतिशतताएँ	.	297
	शृ त्वनित आपेक्षिक	...	311
	ऋतुनिष्ठ मूचकाक की पर्याप्तिता	...	311
* 15	काल श्रेणी का विश्लेषण आवर्ती गतियाँ II— परिवर्तनशील ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप	,	313
	ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप में उत्तरोत्तर परिवर्तन	...	313
	गतिशील ऋतुनिष्ठ	...	313
	गतिशील ऋतुनिष्ठ मूचकाक का परिक्लन	..	313
	ऋतुनिष्ठ प्रतिरूपों में आकस्मिक विचरण	...	323
	ईस्टर के लिए समजन	...	323
	समस्त ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप में आकस्मिक परिवर्तन	...	324
	समय निर्धारण में लघुकालिक विस्थापन	...	324
	परिवर्ती कोणाक	...	324
	विधि के और अधिक परिष्कार	..	325
	ऋतुनिष्ठ मूचकाको का सानस्य	...	325
	ऋतुनिष्ठ प्ररूपों का सचय	..	326
	निर्माण-विधियों का तर्कसंगत आधार		327
16.	कालश्रेणी का विश्लेषण चक्रीय गतियाँ— उपनति, ऋतुनिष्ठ, एवं अनियमित गतियों के लिए काल-श्रेणी का समजन	..	328
	उपनति के लिए वार्षिक आकडों का समजन करना	...	328
	मासिक आकडों का समजन	...	330
	ऋतुनिष्ठताहीन बनाना	.	331
	ऋतुनिष्ठ तथा उपनति के लिए समजन	...	337
	अनियमित गतियों का समरेखण	...	343
	चक्रीय गतियों की तुलना करना	...	349
	चक्रीय गतियों के आकलन की अन्य विधियाँ	...	353
	प्रत्यक्ष विश्लेषण	...	353
	ह्रातमक विश्लेषण	..	353
	निर्देश-चक्र विश्लेषण	...	354

17 सूचकांक-निर्माण के मूल तत्त्व

356

सूचकांक का अर्थ तथा प्रयोग	...	356
सूचकांक के निर्माण में समस्याएँ	...	358
मूल्य-सापेक्षों के व्यवहार का एक दृष्टान्त	...	359
सूचकांक के लिए आंकड़े	...	361
परिशुद्धता		362
तुलनीयता		363
प्रतिनिधित्व	..	363
पर्याप्तता	...	364
आधार का चयन	...	365
समाहत कीमत सूचकांक	..	366
माधारण समाहार	...	366
भारित समाहार		367
भारों का चयन	.	369
कीमत सापेक्षों की श्रृंखला	...	375
वस्तु भार बनाम समूह भार	..	380
चार प्रकार के कीमत सूचकांक की तुलना	...	384
मात्रा सूचकांक	...	384
समाहत प्रकार		384
सापेक्षों की श्रृंखला	..	388

18. सूचकांक सिद्धान्त एवं व्यवहार

... 389

*सूचकांक धारणाएँ	...	389
गणितीय परीक्षण	...	389
सूत्र का प्रयोग से सम्बन्ध		391
शृंखला सूचकांक	..	393
*नई वस्तुओं का प्रतिस्थापन तथा भारों का परिवर्तन	...	395
सूचकांक के विवरण	...	399
कीमत सूचकांक	...	399
उपभोक्ता कीमत सूचकांक	...	399
संयुक्त राज्य अमेरिका के श्रम सम्बन्धी आँकड़ों के व्यूहों का श्रेष्ठ पण्य कीमतों का सूचकांक	...	400
रूपकों द्वारा प्रदत्त एवं प्राप्त कीमतों के सूचकांक, समता अनुपात	...	401
सामान्य स्टॉक कीमतें	...	403

18 सूचकांक मिट्टा त एव व्यवहार (वित्त)

भौतिक वर्गिण ए तथा व्यापार क्रिया के सूचकांक	404
औद्योगिक उत्पादन का फडरल रिजव सूचकांक	404
भौतिक परिमाण तथा व्यापार क्रिया के अर्थ सूचकांक	405
गुणान्तरक परिवर्तना अथवा अन्तर के सूचकांक	405

19 सहसम्बन्ध I द्वि चर रेखिक सहसम्बन्ध

407

एक मरल व्याख्या	407
सहसम्बन्ध मिट्टा त	411
आकलन समीकरण	411
आकलना की विश्वसनीयता	413
सहसम्बन्ध गुणांक और व्याख्यान चटबद्ध	417
उत्पाद योग सूत्र	420
परिकलन की व्यावहारिक विधियाँ	421
कुछ चेतावनियाँ	424
सहसम्बन्ध तथा कारणत्व	424
विपरीतता	425
माप की त्रुटियाँ	427
औसतों का प्रयोग	428
अरेखिक सम्बन्ध	428
समस्त आँकड़ों का निम्न	428
समूहित आँकड़ों का सहसम्बन्ध	429
समूहन का प्रभाव	432
कीटिवद्ध आँकड़ों का सहसम्बन्ध	432
2 × 2 सारणियों में आँकड़ों का सहसम्बन्ध	434

*20 सहसम्बन्ध II द्वि चर अरेखिक सहसम्बन्ध

437

बहुपद	437
द्वितीयांश वक्र	437
तृतीयांश वक्र	444
स्पष्टान्तरो का प्रयोग	449
प्रारम्भिक परीक्षण	450
लघु Y लघु X सम्बन्ध	453
\sqrt{Y} X सम्बन्ध	458

20 सहस्रबन्ध II द्विचर अरेखिक सहस्रबन्ध (वित्त)

वृक्षों के व्याय और आयतन के लिए तीन अरेखिक सम्बन्धों की तुलना	461
नष्ट } १ सम्बन्ध	463
$\frac{1}{\lambda}$, λ सम्बन्ध	464
सहस्रबन्ध अनुमान	465

*21 सहस्रबन्ध III अनेकधा और आंशिक सहस्रबन्ध

469

प्रारम्भिक व्याख्या	469
सरल सहस्रबन्ध	469
अनेकधा सहस्रबन्ध	470
आंशिक सहस्रबन्ध	473
परिकलन विधि	474
योगफल का परिकलन	474
सम्बन्ध के सकल माप	477
दो स्वतन्त्र चर अनेकधा सहस्रबन्ध	480
दो स्वतन्त्र चर आंशिक सहस्रबन्ध	482
R_1 , तथा सकल और आंशिक सहस्रबन्ध के मापों में सम्बन्ध	483
तीन स्वतन्त्र चर अनेकधा सहस्रबन्ध	484
तीन स्वतन्त्र चर आंशिक सहस्रबन्ध	487
चार या अधिक स्वतन्त्र चर	487
अनेकधा आंशिक गुणांक	488
अनेकधा तथा आंशिक सहस्रबन्ध व गुणांकों तक एक अन्य अभिगम	488
प्रथम क्रम आंशिक सहस्रबन्ध गुणांक	498
द्वितीय क्रम आंशिक सहस्रबन्ध गुणांक	490
अनेकधा गुणांक	491
अकलन व गुणांक तथा अकलन की मानक भुक्तियाँ	492
स्वतन्त्र चरों के अलग अलग सहस्रबन्ध के अन्य माप	492
अनेकधा वक्ररेखीय सहस्रबन्ध	493
बहुपद	493
रसांतरण	493
लेखाचित्रोप विधि	493

अध्याय

पृष्ठ

22	सहस्रम्ब ध IV काल अणो का सहस्रम्ब ध	495
	वार्तिक आकड	495
	उपनि के लिए असमञ्जत आकडो का सहस्रम्ब ध	495
	उपनि की प्रतिशतताओ का सहस्रम्ब ध	496
	ततीय चर के रूप में समय के साथ असमजित आकडो का सहस्रम्ब ध	510
	परिवर्तन राशियो अथवा परिवर्तन प्रतिशतताओ का सहस्रम्ब ध	511
	काल अणो को सहस्रम्ब धत करने में समस्याएँ	512
	मासिक अकड	513
	मुख्य कान्ति सन्ध ध	514
	पश्चता और अग्रता	514
	पूर्वानुमान में महायक के रूप में अग्रता और पश्चता के प्रयोग की प्रक्रिया	518
23	आसजित वक्र द्वारा बारवारता वटन का चित्रण	521
	प्रसामाय वक्र	523
	प्रसामाय वक्र का विकास	523
	सूत्र की व्याख्या	525
	प्रसामाय वक्र को आसजित करना	527
	शारीरिक योग्यता के आकडो पर प्रसामाय वक्र आसजित करना	528
	प्रसामाय वक्र और गलपट्ट (कालर) के माप	536
	प्रसामाय वक्र की उपयुक्तता	538
	*द्विपद	540
	विपमित द्विपदों की प्रायोगिक संरचना	541
	एक द्विपद को आसजित करना	542
	विपमित वक्र	546
	लघुगणकीय प्रसामाय वक्र	547
	लघुगणकीय प्रसामाय वक्र को आसजित करना	547
	विषमता के समजन के माध्य प्रसामाय वक्र को आसजित करना	552
24	सारिणीय साधकता I समांतर माध्य	557
	प्रतिदश समांतर माध्य वसे वितरित किये जाते हैं	557
	प्रतिदश माध्यों का समांतर माध्य	557

24 सांख्यिकीय साधकता I समांतर माध्य (वित्त)

प्रतिदश माध्यों का वषम्य	558
प्रतिदश माध्यों की ककुदता	560
प्रतिदश माध्य और प्रसामान्य वक्र	562
प्रतिदश माध्यों का विलक्षण	563
जब X_0 और σ ज्ञात हों तो Δ और X_0 के बीच अंतर की साधकता	565
X और X_0 के बीच अंतर जो साधक नहीं है	565
X और X_0 के बीच अंतर जो साधक है	567
T का मान और साधकता	568
प्रायिकता तथा दैनिक घटनाएँ	571
प्रतिदश का आकार	571
X तथा X_0 के मध्य अंतर की साधकता जब σ ज्ञात न हो	572
Y तथा X_0 में अंतर जो साधक नहीं है	573
Δ तथा X_0 में अंतर जो साधक है	575
X_0 की विश्वास्यता सीमाएँ	577
दो प्रतिदश माध्यों के बीच अंतर की साधकता	579
स्वतंत्र प्रतिदश	579
$X_{01} - X_{02}$ की विश्वास्यता सीमाएँ	583
अस्वतंत्र (आश्रित) प्रतिदश	583
उपसंहार	586

*25 सांख्यिकीय साधकता II अनुपात तथा काईवर्ग परीक्षण 588

भाग 1 अनुपात	588
p तथा \bar{p} में अंतर की साधकता	588
r की विश्वास्यता सीमाएँ	600
p_1 तथा p में अंतर की साधकता	608
भाग 2 काईवर्ग परीक्षण	609
1×2 सारणी	609
2×2 सारणी	612
1×2 से बड़ी $1 \times R$ सारणियाँ	618
2×3 तथा इससे बड़ी सारणियाँ	621

*26	सांख्यिकीय माप्यकता III प्रसरण प्रसरण का विश्लेषण, वैषम्य और वक्रता के माप, तथा सहसम्बन्ध गुणांक	624
-----	---	-----

प्रसरण	624
σ और σ^2 के मध्य अन्तर की मापकता	625
r की विश्वाम्यता मीमांसे	626
दा प्रतिदा प्रसरण के मध्य घातन की साधकता	627
σ^2 का वनित्य माना की तुलना	629
प्रसरण का विग्रहण	630
वर्गोत्तरण की एक कमी	630
वर्गोत्तरण के दा निकष प्रत्यक वक्रम में एक प्रविष्टि	635
वर्गोत्तरण के दा निकष वक्रम में एक से अधिक प्रविष्टियाँ	639
$\frac{r}{\sigma}$, t / σ तथा F के मध्य अन्त सम्बन्ध	645
वैषम्य और वक्रता के माप	645
वैषम्य	645
वक्रता	645
सहसम्बन्ध गुणांक	647
मरल सहसम्बन्ध	647
अनैविक सहसम्बन्ध	651
अनुबन्ध सहसम्बन्ध	656
आश्रित सहसम्बन्ध	658

परिशिष्ट

क	प्रत्येक अध्याय में प्रयुक्त सकेत चिह्न	663
ख	प्रथम 50 प्राकृतिक संख्याओं की प्रथम छ घातों के योग	688
ग	प्रथम 50 विषम प्राकृतिक संख्याओं की पहली छ घातों के योग	690
घ	प्रसामान्य वक्र की कोटियाँ	692
ङ	प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्र	694
च	$F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ के मान	695
छ	समान्तर माध्य से $\frac{x}{s}$ या $\frac{x}{\sigma}$ के चने हुए मानों पर निर्मित प्रसामान्य वक्र के एक सिरे में विद्यमान क्षेत्र	696

ज. समांतर माध्य से $\frac{1}{s}$ या $\frac{x}{\sigma}$ के चुने हुए मानों पर निर्मित प्रसामान्य वक्र के दोनों सिरों में विद्यमान क्षेत्र	...	697
झ. t के मान	...	698
ञ. χ^2 के मान	...	700
ट. θ^2 की प्रतिदर्शों सीमाओं का निर्धारण करने में प्रयोग के लिए $\frac{\theta^2}{\sigma^2}$ के मान	.	702
ठ. σ^2 की विचल्यता सीमाओं का निर्धारण करने में प्रयोग के लिए $\frac{\sigma^2}{\theta}$ के मान	..	704
ड. F के मान	.	706
ढ. N_1 तथा k के निर्दिष्ट मानों के लिए 0.05 तथा 0.01 बिन्दुओं पर L के मान, जब $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda$		711
ण. β की उपरली 0.10 तथा 0.02 सीमाएँ जब वे प्रसामान्य समष्टि से लिए गए यादृच्छिक प्रतिदर्शों से परिकल्पित हों		712
त. β_2 की उपरली तथा निचली 0.05 तथा 0.01 सीमाएँ जब वे प्रसामान्य समष्टि से लिए गए यादृच्छिक प्रतिदर्शों से परिकल्पित हों	.	713
थ. वर्ग, वर्गमूल, तथा व्युत्क्रम, $1 - 1,000$..	714
द. सत्यापन के साधारण लघुगणक	...	724
ध. निरूपण	.	740
न. सत्यापन का पूर्णांकन		767
पारिभाषिक शब्दावली	...	773
अनुक्रमिका	...	779

परिचय

सांख्यिकीय आंकड़े एवं सांख्यिकीय विधियाँ

अंग्रेजी भाषा के स्टैटिस्टिक्स शब्द (जिसका हिन्दी पर्याय सांख्यिकी है) का प्रयोग दो अर्थों में होता है। सामान्य बोलचाल की भाषा में प्रायः आंकड़े शब्द के पर्यायवाची के रूप में इसका प्रयोग होता है। इस प्रकार कोई कह सकता है कि मैं "संयुक्त राज्य अमरीका में औद्योगिक दुर्घटनाओं के स्टैटिस्टिक्स" (आंकड़े) देखे है। अर्थ की दृष्टि से यह अधिक स्पष्ट होगा यदि इस अर्थ में हम स्टैटिस्टिक्स शब्द का प्रयोग न करते वरन् "संयुक्त राज्य अमरीका में औद्योगिक दुर्घटनाओं का डेटा (अथवा फिगर)" कहते।

"स्टैटिस्टिक्स" (सांख्यिकी) का सकेत उन सांख्यिकीय सिद्धांतों और विधियों की ओर भी है जो सख्यात्मक आंकड़ों के प्रयोग के लिए विकसित किए गए हैं और जो इस पुस्तक की विषय सामग्री है। नितान्त प्रारम्भिक वर्णनात्मक युक्तियों से लेकर, जिन्हें कोई भी समझ सकता है, अत्यन्त जटिल गणितीय क्रिया-विधियों तक जिन्हें केवल बहुत प्रवीण सिद्धांतज्ञ ही समझ पाते हैं, सभी सांख्यिकीय विधियों या सांख्यिकी की सीमा में आती हैं। इस ग्रन्थ का उद्देश्य विषय के अत्यन्त गणितीय और सैद्धांतिक पक्षों में न पड़कर उसके नितान्त प्राथमिक और प्राथम प्रयोग में आने वाले पक्षों का विवेचन करना है।

सांख्यिकी की परिभाषा सख्यात्मक आंकड़ों के संग्रह, प्रस्तुति, विश्लेषण, और व्याख्या के रूप में की जा सकती है। जिन तथ्यों पर विचार किया जाता है वे सख्यात्मक अभिव्यक्ति में समर्थ होने चाहिएँ। हमारे लिए इस जानकारी का कि घर ईंट, पत्थर, लकड़ी, और अन्य पदार्थों के बने हैं, सांख्यिकीय दृष्टि से प्रयोग नगण्य होगा। परन्तु यदि हम यह जान लें कि घर प्रत्येक प्रकार के पदार्थ से कितने या किस अनुपात में बने हैं, तो हमारे पास सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए उपयोगी सख्यात्मक आंकड़े हो जाते हैं।

सांख्यिकी को भौतिकी, रसायन, अर्थशास्त्र, और समाजशास्त्र से सहसम्बन्धित विषय नहीं समझना चाहिए। सांख्यिकी कोई विज्ञान नहीं है, यह एक वैज्ञानिक विधि है। वे विधियाँ और प्रक्रियाएँ, जिनकी हम परीक्षा करेंगे, एक अनुसन्धानकर्ता के लिए उपयोगी और प्रायः अपरिहार्य साधन हैं। सांख्यिकी की पर्याप्त समझ के बिना सामाजिक विज्ञानों के अन्वेषक प्रायः उस अर्थ व्यक्ति के समान हो सकते हैं, जो अंधेरे कमरे में, एक काली बिल्ली के लिए, जो वहाँ नहीं है, हाथ मार रहा है। सांख्यिकी की विधियाँ मानव-क्रियाओं की निरन्तर विस्तारशील सीमा के अन्तर्गत विचार के किसी भी क्षेत्र में जहाँ सख्यात्मक आंकड़े प्राप्त किए जा सकते हैं, उपयोगी हैं।

"सांख्यिकी" शब्द के अंग्रेजी पर्याय "स्टैटिस्टिक्स" की व्युत्पत्ति से उसके मूल उद्गम का सकेत प्राप्त होता है। राज्य-प्रशासन को युद्ध और वित्त के प्रयोजनों के लिए

जनसंख्या और धन के आँकड़ों के संग्रह और विश्लेषण की आवश्यकता पड़ी। धीरे-धीरे सरकार के सामान्य प्रयोग के लिए अधिक विविध प्रकार के आँकड़े प्राप्त किए जाने लगे। सयोग-प्रधान खेलों के विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी के कुछ पक्षों का विकास किया गया। सांख्यिकीय विधियों के अनुप्रयोग और विकास के लिए बीमा और जीव-विज्ञान तथा अन्य प्राकृतिक विज्ञान उपजाऊ क्षेत्र थे। आज उत्तम का वदाचित् ही कोई ऐसा पक्ष हो जिसमें सांख्यिकीय साधन कम से कम यदा-कदा उपयोगी सिद्ध न होते हों। अर्थशास्त्र, समाज-शास्त्र, मानवविज्ञान, व्यवसाय, कृषि, मनोविज्ञान, तथा शिक्षा—सभी सांख्यिकी पर अत्यधिक आश्रित हैं। भेषज-अनुसंधान-कर्ता को अपने निष्कर्षों के महत्व-निर्धारण के लिए बहुधा सांख्यिकी पर आश्रित रहना पड़ता है। वकील के लिए सांख्यिकीय साधन प्रायः निश्चित प्रयोग के हो सकते हैं, विशेषतः यदि वह निगम की वकालत करना हो। हाँ, इतना अवश्य कह देना चाहिए कि संगीतज्ञ, कलाकार, अभिनेता, और कथाकार को सांख्यिकी के प्रयोग का अवसर बिरले ही प्राप्त होगा, परन्तु यहाँ भी विन्य के कनिष्ठ आँकड़ों, टिकट-घर की आय और लोक-रुचि की प्रवृत्तियों का विश्लेषण उपयोगी सिद्ध हो सकता है।

सांख्यिकी की परिभाषा देते समय इस ओर संकेत किया गया था कि सध्यात्मक आँकड़ों का संग्रह, प्रस्तुति, विश्लेषण, और व्याख्या की जाती है। भाइए, अब हम इन चारों प्रक्रियाओं में से प्रत्येक की संक्षेप में परीक्षा करें।

संग्रह—सांख्यिकीय आँकड़े वर्तमान प्रकाशित या अप्रकाशित स्रोतों, जैसे सरकारी माध्यमों, व्यापार संस्थाओं, अनुसंधान विभागों, पत्रिकाओं, समाचार-पत्रों, अलग-अलग अन्वेषकों से तथा अन्यत्र से प्राप्त किये जा सकते हैं। दूसरी ओर, अन्वेषक आँकड़े प्राप्त करने के लिए संभवतः घर-घर अथवा दुकान-दुकान जाकर भी अपनी सूचनाएँ एकत्र कर सकता है। सांख्यिकीय आँकड़ों का स्वयं संग्रह करना सांख्यिकी-विद् के लिए सबसे अधिक कठिन और महत्वपूर्ण आवश्यक कार्यों में से एक है। उसकी प्रक्रिया की समागता उसके द्वारा प्राप्त आँकड़ों की उपयोगिता को बहुत अधिक मात्रा में निर्धारित करती है।

अगले अध्याय में आँकड़े प्राप्त करने की इन दो विधियों का वर्णन किया गया है। परन्तु यह भली-भाँति समझ लेना चाहिए कि यदि प्रारम्भिक आँकड़ों का संग्रह उच्चरी है तो अनुभव और उत्तम महज बुद्धि वाले अन्वेषक को स्पष्ट लाभ रहता है। सांख्यिकी के इस पक्ष पर बहुत कुछ सिखाया जा सकता है परन्तु जो केवल अनुभव से सीखा जा सकता है वह कहीं अधिक है। यद्यपि यह हो सकता है कि कोई व्यक्ति अपने निजी प्रयोग के लिए सांख्यिकीय आँकड़े कभी एकत्रित न कर पाए और सदा प्रकाशित स्रोतों का प्रयोग करता रहे, तो भी यह अनिवार्य है कि उसे संग्रह की प्रक्रियाओं का व्यावहारिक ज्ञान हो और वह जिन आँकड़ों का प्रयोग करना चाहता है उनकी विश्वसनीयता का मूल्यांकन कर सकने में समर्थ हो। अविश्वसनीय आँकड़े निष्कर्ष निकालने का सनोपजनक आधार नहीं होते।

बहुत से लोगों की यह प्रवृत्ति खेदजनक है कि वे बिना जाँच किए सांख्यिकीय सामग्री को स्वीकार कर लेते हैं। उनके लिए कोई भी ऐसा कथन, जो सध्यात्मक रूप में प्रस्तुत किया जाय, शुद्ध होता है और उसकी प्रामाणिकता स्वतः सिद्ध रहती है। रेल मार्ग के एक बलक के अवकाश ग्रहण करने के कुछ काल बाद समाचार-पत्रों द्वारा यह घोषणा की गई कि उसने अपने 43 वर्ष के सेवाकाल में कुल 1,20,00,00,000 मील की यात्रा की। इस कथन

के अधिकांश पाठकों ने संभवतः इसे असन्दिग्ध रूप में स्वीकार कर लिया। वास्तव में, इस आंकड़े के ठीक होने के लिए उस कर्मचारी को 43 वर्ष की समूची अवधि में प्रत्येक दिन के प्रत्येक घण्टे लगभग 3,200 मील की यात्रा करनी पड़ी होगी।

प्रस्तुति—अपने निजी प्रयोग के लिए हो या दूसरों के प्रयोग के लिए, आंकड़े किसी उपयुक्त रूप में प्रस्तुत किये जाने चाहिएँ। सामान्यतः आंकड़ों को सारणियों में क्रमबद्ध किया जाता है या लेखाचित्रों में दिखाया जाता है, जैसा कि अध्याय 3 से 6 में वर्णन किया गया है।

विश्लेषण—विश्लेषण करते समय आंकड़ों का उपयुक्त और तर्कसंगत वर्गीकरण आवश्यक है। सम्भावित वर्गों का विचार उसी समय कर लेना जरूरी है जब आंकड़ों का संग्रह करने की योजनाएँ बनाई जाएँ तथा आंकड़ों को मारणीयबद्ध करते समय ही और इससे पूर्व कि उन्हें लेखाचित्रों द्वारा दिखाया जा सके, आंकड़ों का वर्गीकरण आवश्यक है। अतः विश्लेषण की प्रक्रिया आंशिक रूप में संग्रह और प्रस्तुति की संगामी है।

सांख्यिकीय आंकड़ों के वर्गीकरण के चार महत्वपूर्ण अंग हैं (1) गुणात्मक, (2) मात्रात्मक (3) तैथिक, तथा (4) भौगोलिक। इनमें से प्रत्येक की क्रमशः जाँच की जाएगी।

गुणात्मक—उदाहरण के लिये जब कर्मचारियों का वर्गीकरण मधीय या सघैतर में किया जाता है तो हम गुणात्मक भेद करते हैं। यह भिन्नता प्रकार की है मात्रा की नहीं। व्यक्तियों का वर्गीकरण वैवाहिक स्थिति की दृष्टि से, अविवाहित, विवाहित, विधवा अथवा विधुर, तलाक़शुदा, और पृथक्कृत के रूप में किया जा सकता है। कृपकों का पूर्ण स्वामियों, आंशिक स्वामियों, प्रबन्धकों, और भुजारों के रूप में वर्गीकरण किया जा सकता है। प्राकृतिक रबड़ को अपने स्रोत के अनुसार रोपित या जंगली निर्दिष्ट किया जा सकता है।

मात्रात्मक—जब किसी मापे जा सकने वाले लक्षण की दृष्टि से मदों में विविधता हो तो मात्रात्मक वर्गीकरण उचित है। कुटुम्बों का वर्गीकरण बच्चों की संख्या के अनुसार हो सकता है। निर्माण-उद्योगों का वर्गीकरण नियुक्त श्रमिकों की संख्या के अनुसार और निर्मित वस्तुओं के मूल्य के अनुसार भी कर सकते हैं। व्यक्तियों का वर्गीकरण उनके द्वारा प्रदत्त आयकर की रकम के अनुसार किया जा सकता है।

अधिकांश मात्रात्मक बटन बारंबारता बटन हैं। सारणी 83 के आंकड़ों में राज्य विश्वविद्यालय कामर्स के 409 उदार कला स्नातकों द्वारा प्राप्त ग्रेडों का बारंबारता बटन दिखाया गया है। कई अन्य बारंबारता बटन अध्याय 8, 9, और 10 में दिखाए गए हैं।

कभी-कभी गुणात्मक दृष्टि से वर्गीकृत आंकड़ों को बहुत माधुरी परिवर्तन के साथ मात्रात्मक आधार पर पुनः वर्गीकृत किया जा सकता है। बैंक की परिसम्पत्ति का नवदी की मात्रा (नवदी, बैंकों से लेनदारों, संयुक्त राज्य वधक, बिकाऊ वधक, अविलम्ब ऋण, पात्र दस्तावेज अथवा ऋण, स्थिर संपदा ऋण, स्थिर सम्पदा, और फर्नीचर तथा उपस्कर) के अनुसार सूचीकरण किया जा सकता है। यद्यपि ये वर्ग न्यूनतम अधिक अनिर्धार्य मात्रात्मक ढंग से एक-दूसरे में भिन्न हैं तो भी वर्गीकरण वास्तव में गुणात्मक आधार पर किया जाता है। यदि हम बैंक की परिसम्पत्ति की प्रत्येक मद को नवदी में बदलने में लगने वाले समय की अवधि के अनुसार पुनः वर्गीकृत करना चाहे तो वर्गीकरण मात्रात्मक हो जाएगा। साधारणतया परिसम्पत्ति का क्रम पढ़ने वाला ही होगा, परन्तु कम नकद गुणात्मक श्रेणियों की कुछ विशिष्ट मदें (उदाहरण के तौर पर, कुछ स्थावर सम्पदा तथा स्थावर संपदा ऋण) अपेक्षाकृत कम समय में नकदी में बदले जा सकेंगे।

तैपिक—नैथिक आँकड़े या काल-श्रेणी विभिन्न निदिष्ट समयों पर किसी विशेष घटना से सम्बन्धित अंकों को प्रदर्शित करते हैं। उदाहरणार्थ, किसी स्टॉक का प्रतिदिन का समापन मूल्य महीनों या वर्षों की कालावधि के लिए दिखाया जा सकता है, संयुक्त राज्य की जनमंदर किन्ने ही वर्षों में से प्रत्येक वर्ष के लिए सुधीबद्ध की जा सकती है; कुछ वर्षों की अवधि के लिए कोयले का मासिक उत्पादन दिखाया जा सकता है। काल-श्रेणियों के विश्लेषण का, जिसमें चक्रीय, आवर्ती (ऋतुनिष्ठ) प्रवृत्ति और अनियमित संचलन का विचार आता है, अध्याय 11 से 16 में विवेचन किया जाएगा।

कुछ वर्षों में, काल-श्रेणियाँ मात्रात्मक बटन से इस दृष्टि से कुछ-कुछ भिन्न होती-जुलती हैं कि किसी श्रेणी का प्रत्येक भ्रमण वर्ष या मास किसी पूर्व सकेत-बिन्दु से एक वर्ष या एक मास आगे-हटा दिया जाता है। परन्तु कालावधियाँ—या यों कहिए कि इन अवधियों में घटित घटनाएँ गुणात्मक दृष्टि से भी परस्पर भिन्न होती हैं। किसी काल-व्रम में अंकों की अनिवार्य व्यवस्था विचाराधीन आँकड़ों की प्रकृति में निहित होती है।

यदा कदा किसी काल-श्रेणी को बारवारता-बटन में भी बदला जा सकता है। यदि एक रेल मार्ग कम्पनी ने प्रति वर्ष बढ़ने गए रेल मार्ग स्लीपरो के अभिलेख रखे हैं तो इन आँकड़ों से एक काल-श्रेणी बनती है। जब यही सूचना स्लीपर-स्थापन की तिथियों के साथ सलग्न होकर प्रयोग में आती है तो विभिन्न स्लीपरो का जीवन बारवारता बटन के रूप में कदाचित् कुछ इस प्रकार व्यव्थन किया जा सकता है

जीवन-काल	स्लीपरो की सट्या
4 परन्तु 5 वर्ष से कम	2
5 परन्तु 6 वर्ष से कम	5
6 परन्तु 7 वर्ष से कम	17
आदि	आदि

भौगोलिक — भौगोलिक बटन अनिवार्यतः एक प्रकार का गुणात्मक बटन है, परन्तु इसे प्रायः एक पृथक् वर्गीकरण माना जाता है। यदि संयुक्त राज्य के प्रत्येक राज्य की जनसंख्या प्रकट की जाए तो हमारे पास भौगोलिक दृष्टि से वर्गीकृत आँकड़े होंगे। यद्यपि किन्हीं दो राज्यों में गुणात्मक भिन्नता भी होती है, तो भी जो भेद किया जाता है वह इतना गुण का नहीं इतना स्थिति का होता है। भौगोलिक दृष्टि से वर्गीकृत आँकड़े सारणी 31 और चार्ट 619 से 622 में दिखाए गए हैं।

कभी-कभी भौगोलिक बटन को बारवारता-बटन के रूप में रखा जा सकता है। इस प्रकार यदि हमारे पास आयोवा के प्रत्येक जिले में अनाज की प्रति एकड़ पैदावार के आँकड़े हों तो हमारे पास एक भौगोलिक श्रेणी होगी। इन आँकड़ों को प्रति एकड़ "10 किन्तु 15 बुशल से कम", "15 किन्तु 20 बुशल से कम", इत्यादि उपज वाले जिलों की संख्या बताकर एक बारवारता बटन के रूप में रखा जा सकता है।

वर्गीकृत आँकड़ों की सारणी और लेखाचित्र के रूप में प्रस्तुति सांख्यिकीय आँकड़ों के विश्लेषण में केवल एक प्रारम्भिक पग है। अन्य अनेक प्रक्रियाओं का वर्णन इस ग्रन्थ के अगले पृष्ठों में किया गया है। सांख्यिकीय जाँच प्रायः यह पता लगाने का प्रयत्न करती है कि निदिष्ट स्थिति में प्रवृत्ति क्या है। अतः सभी प्रकार की घटनाओं, साधारण और असाधारण दोनों, पर विचार किया जाना चाहिए।

सम्मति बनाते समय अधिकांश व्यक्ति असाधारण घटनाओं से अनुचित रूप से प्रभावित होने और साधारण घटनाओं की उपेक्षा करने की ओर प्रवृत्त होते हैं। सांख्यिकीय या अन्य किसी भी प्रकार की जाँच-पड़ताल में असाधारण मामलों का अनुचित प्रभाव बिल्कुल नहीं पड़ना चाहिए। बहुत लोगों का मत है कि शीशा टूटने से अनिष्ट होता है। शीशा टूटने पर व्यक्ति की प्रवृत्ति होती है, प्रत्याशित “अनिष्ट” की खोज में रहना और किसी भी अप्रिय घटना को शीशा टूटने के कारण हुई बताना। शीशा टूटने के बाद यदि कुछ नहीं होता तो स्मरण योग्य कुछ नहीं रह जाता और इस परिणाम (संभव सामान्य परिणाम) की उपेक्षा हो जाती है। यदि अनिष्ट हो जाता है तो यह इतना असाधारण होता है कि याद रहता है, और परिणामतः विश्वास पक्का हो जाता है। वैज्ञानिक प्रक्रिया में शीशा टूटने के बाद की सब घटनाएँ सम्मिलित होगी और “परिणाम-स्वरूप होने वाले” अनिष्ट की तुलना शीशा न टूटने पर होने वाले अनिष्ट की मात्रा से की जाएगी।

अतः सांख्यिकी के विश्लेषण में सभी प्रकार की घटनाओं को सम्मिलित करना आवश्यक है। यदि हम निमोनिया की घटनाओं की अवधि का अध्ययन कर रहे हैं तो हम औसत अवधि और संभवतः इस औसत से नीचे और ऊपर की ओर अपसरण का भी निर्धारण करके प्ररूपी बना है, इसका अध्ययन कर सकते हैं। इस्पात के कारखाने की गति-विधि दिखाने वाली काल-श्रेणी पर विचार करते समय हम उस श्रेणी के प्ररूपी ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप, उपस्थित सृद्धि-तत्त्व (प्रवृत्ति) और चक्रीय व्यवहार की ओर ध्यान दे सकते हैं। कभी-कभी यह पता चलता है कि सांख्यिकीय आंकड़ों के दो समूहों में सबद्ध होने की प्रवृत्ति है। अध्याय 19 में यह संकेत किया गया है कि भीगुरों की ची-ची की द्रुतता और तापमान सम्बद्ध हैं। यदि तापमान बढ़ेगा तो भीगुरों की ची-ची की द्रुतता तीव्रतर हो जाएगी, यदि तापमान घटेगा तो ची-ची की द्रुतता भी धीमी होगी। यह सम्बन्ध गणितीय ढंग से व्यक्त किया जा सकता है और हम तापमान से भीगुरों की ची-ची की द्रुतता का अनुमान लगा सकते हैं, या इसके विपरीत, ची-ची की द्रुतता के आधार पर हम तापमान का अच्छा अनुमान कर सकते हैं।

कभी-कभी सांख्यिकीय जाँच सम्पूर्ण हो सकती है और उसमें सभी संभव घटनाएँ सम्मिलित हो सकती हैं। परन्तु प्रायः एक छोटे वर्ग या प्रतिदर्श का अध्ययन आवश्यक होता है। यदि जीवन-बीमा के लिए वकीलों के व्यय के अध्ययन की हमारी इच्छा है तो समुक्त राज्य अमरीका के सभी वकीलों को सम्मिलित करना कदाचित् ही संभव होगा। प्रतिदर्श का सहारा लेना जरूरी है, और यह अनिवार्य है कि प्रतिदर्श सम्पूर्ण वर्ग का अधिकतम संभव प्रतिनिधि हो ताकि हम सम्पूर्ण समष्टि के लिए अपेक्षित परिणामों के सम्बन्ध में सन्तुलित अनुमान लगाने में समर्थ हो सकें। प्रतिदर्श का चयन करने की समस्या का अगले अध्याय में विवेचन किया गया है। अध्याय 24, 25, और 26 में यह निर्धारित करने का प्रयत्न किया गया है कि प्रतिदर्शों से प्राप्त परिणामों पर कितना निर्भर किया जा सकता है।

कभी-कभी सांख्यिकी-विद् को पूर्वानुमान करना पड़ता है। उसे एक वर्ष बाद मोटर गाड़ी के टायरों की बिक्री या आगामी कुछ वर्षों की जनसंख्या का पूर्वानुमान करना पड़ सकता है। कुछ वर्ष पहले लेखकों के एक वर्ग की वृद्धा के ग्रीष्मकालीन सत्र में एक विद्यार्थी दिखाई पड़ा और उसने निजी वार्त्तालाप में घोषित किया कि उसने एक ही उद्देश्य

से वह पाठ्यक्रम चिया है ताकि वह ऐसा सूत्र प्राप्त कर सके जिससे वह कपाम के मूल्य का पूर्व-कथन कर सके। उनके अपने लिए तथा उनके मानिकों के लिए कपाम के मूल्यों की कुछ अग्रिय जानकारी प्राप्त करना महत्वपूर्ण था क्योंकि वह संस्था बहुत बड़ी मात्रा में कपाम खरीदती थी। खेद की बात है कि उस नवयुवक को भ्रांति-मुक्त होना पड़ा। हमारी जानकारी के अनुसार पूर्वानुमान के कोई ऐन्द्रजाचिक सूत्र नहीं हैं। इसका यह तात्पर्य नहीं कि पूर्वानुमान करना असंभव है, अपितु इसका अर्थ यह है कि पूर्वानुमान करना एक जटिल प्रक्रिया है सूत्र जिसका केवल एक छोटो-सा भाग है। इसके अतिरिक्त पूर्वानुमान अनिश्चित और खतरनाक है। भविष्य में क्या होगा ऐसा कहने का प्रयत्न करने के लिए, पूर्वानुमान के विषय की पूरी पकड़ उसमें सवधित क्षेत्रों की प्रगति के प्रत्येक क्षण का ज्ञान, और पूर्वानुमान करने की किसी भी यांत्रिक विधि की सीमाओं की पहचान आवश्यक है। पूर्वानुमान संबंधी अतिरिक्त टिप्पणियाँ अध्याय 22 में मिलेंगी।

व्याख्या—किसी जाँच का अन्तिम पग प्राप्त आँकड़ों की व्याख्या है। विश्लेषण से कौनसे परिणाम निकल रहे हैं? आँकड़े हम कौनसी ऐसी बातें बताते हैं जो नई हैं अथवा जो पूर्व मूल कल्पनाओं को पुष्ट करती हैं या उनके बारे में संदेह उत्पन्न करती हैं? मूल सामग्री की परीक्षाओं को ध्यान में रखते हुए परिणामों की व्याख्या करनी चाहिए। ऐसे आँकड़ों से जो स्वयं सन्निकट मान मात्र हैं बहुत सुनिश्चित निष्कर्ष नहीं निकाले जाने चाहिए। परन्तु अन्वेषक के लिए यह आवश्यक है कि वह अपने आँकड़ों के सभी उपयोगी और प्रयुक्त अर्थों का पता लगाए और उनका स्पष्टीकरण करे।

कुछ अनुपयुक्तताएँ

अन्वेषक का अपनी सामग्री के सब संभव दुष्प्रयोगों से बचने के लिए निरन्तर सावधान रहना चाहिए। भ्रमगत और असावधान तर्क या आँकड़ों के अनुपयुक्त प्रयोग से ऐसे अध्ययन का महत्व नष्ट हो जाएगा जो प्रारंभिक अवस्थाओं में प्राविधिक दृष्टि में स्वीकार्य हो सकता है। सशेष प्रक्रियाओं के कुछ उदाहरणों से यह बात स्पष्ट हो सकेगी। पुस्तक के बाद के अध्यायों में वही वही अन्य दोषों का उनसे संबंधित विधियों के संबंध में उल्लेख किया गया है।

पूर्वग्रह—अन्वेषक में पूर्वग्रह की उपस्थिति स्पष्ट ही उसके सम्पूर्ण उपक्रम को प्रभावित बनाने के लिए पर्याप्त है। पूर्वग्रह संबोध या जानबूझ कर हो सकता है; ऐसी दशा में यह जालसाजी का पर्यायवाची होगा। इस प्रकार की सार्विकीय अनुपयुक्तता का एक बहु-प्रचारित उदाहरण साम्यवादी चीन में रेल गाड़ी के एक कर्मचारी से संबंधित है जिसने एक वर्ष बिना किसी बड़े पुनर्कल्पनों के और बहुत कम ईंधन की खपत के साथ आभासत बहुत लम्बा मुरलिन सफर किया। बाद में पता चला कि अनेक दुर्घटनाएँ हुई थी, गुप्त रूप से मरम्मत की गई थी और पुनः ईंधन भरा गया था।¹

दूसरी ओर अनभिप्रेत पूर्वग्रह क्रियाशील हो सकता है, और यह संभवतः अधिक खतरनाक है, क्योंकि अन्वेषक स्वयं इसमें अनभिज्ञ हो सकता है। यह एक सावदेशिक

1. देखिये मिडनी केन, "एनोट बाय स्टैटिस्टिकल टैकीन्ग इन कम्युनिस्ट चाइना", दि अमेरिकन स्टैटिस्टीशियन जून 1959, पृष्ठ 18-21, व्याप्त।

सिद्धान्त प्रतीत होता है कि व्यक्ति अपने सर्वाधिक अनुकूल तथ्यों की व्याख्या करते हैं और उन्हें स्मरण रखते हैं। एक जापानी साहित्यिक गौरव ग्रंथ रेशोमोन जिसका अनेक भाषाओं में अनुवाद हुआ है इस स्पष्ट मानवीय नक्षत्र पर आधारित है। यही कारण है कि बहुत से मुकदमे एक ही घटना के अत्यन्त भिन्न वर्णन के कारण होते हैं, जो सच्ची मत-भिन्नताओं पर आधारित रहते हैं।

जैसा कि हम अगले अध्याय में देखेंगे, सांख्यिकीय आँकड़े कोरी हवा में से नहीं पकड़े जा सकते, जैसे जादूगर अनायास अगुनियों के अग्रभाग से सिक्कों का निर्माण करता हुआ प्रतीत होता है। यह प्रक्रिया ऐसी है जिसमें मावधानी और धीरे पर ध्यान देना अपेक्षित है। प्राप्त होने पर आँकड़ों का उपयोग होना चाहिए और उनकी अकस्मात् उपेक्षा नहीं होनी चाहिए। किसी एक लेखक के सवध में एक ममीक्षक के कथन पर ध्यान दीजिए

ब्लैन्क अध्यवसायी और निर्भीक है। क्या इससे पूर्व किसी विषय पर आँकड़े एकत्र किए गए हैं? उसने अधिक और बहतर आँकड़े इकट्ठे किए हैं। यदि अपनी मूल-भूत प्रकृति के कारण उन्हें चार्टों में नहीं रखा जा सकता तो भी उसने उनके चार्ट बनाए हैं...कभी-कभी स्वयं कालक्रम उसके हाथों में बिगड़ जाता है। यदि उसके उदाहरण एक या दो शताब्दी आगे-पीछे रखने पड़े तो ब्लैन्क तर्क की खातिर अपने आँकड़ों और चार्टों को भी मूल सकता है।

महत्त्वपूर्ण कारक की लुप्ति—मोटर गाड़ियों के लिए पूर्ण रूप से धातु की छन चातू करने के कुछ देर बाद किसी निर्माता कम्पनी को यह सिद्ध करने की आवश्यकता अनुभव हुई कि पूर्ण रूप से धातु की छनो के परिणामस्वरूप कारों के अन्दर अधिक गर्मी नहीं होती। उन्होंने एक परीक्षा का सुभाव दिया जिसमें तीन बातें थी

- 1 लगभग 8 इंच वर्ग का एक उच्च कोर्ट के कपड़े का टुकड़ा लीजिए। उस कपड़े के नीचे उसी आकार का अस्तर लगाइये और अस्तर के नीचे एक थर्मामीटर रखिए।
- 2 लगभग 8 इंच वर्ग का एक अत्यधिक परिष्कृत बहुत बड़िया इस्पात का टुकड़ा लीजिए। उसके नीचे उसी आकार के $\frac{1}{4}$ इंच मोटे फ्लैट और अस्तर के टुकड़े लगाइये तथा अस्तर के नीचे एक थर्मामीटर रखिए।
- 3 ऊपर के प्रत्येक उपकरण को कमरे के तापमान पर एक तह्ते पर रखिए। फिर इस नमस्त उपकरण को बाहर गर्म धूप में ले जाइए। लगभग 10 मिनट तक इसे वही धूप में रहने दीजिए और तब दोनों थर्मामीटरों का तापमान पढ़िए।

उपर्युक्त प्रयोग की कठिनाई यह है कि पाठक को सुभाव के चरण 2 में अत्यधिक परिष्कृत इस्पात के टुकड़े का प्रयोग करने के लिए कहा गया है। मोटर गाड़ियों की छनो पर रोगन होता है। अतः वे अत्यधिक परिष्कृत इस्पात की अपेक्षा अधिक गर्मी सोखती हैं। परीक्षा के इस स्पष्ट दोष से प्रयोग निरर्थक हो जाता है, यद्यपि कपड़े की छन वाली कार की अपेक्षा धातु की छन वाली कार अतिरिक्त ऊष्मा रोधन से वास्तव में अधिक ठण्डी बन सकती है।

असावधानी—गलतियाँ जीवन का अनिवार्य अंग हैं। परन्तु असावधानी कम से कम होनी चाहिए। एक लेखक की पत्नी ने देवदार की सग्रह-पेटी का आकार पूछने के लिए एक बड़े विभाग स्टोर को लिखा। उत्तर में कहा गया, “यह माल 3' x 1' x 1½' आकार में प्राप्य है।”

हम से बहुतों को बिना पत्र के बन्द लिफाफे या सदेश वाले स्थल पर बिना कुछ लिखे पोस्ट काउट प्राप्त हुए हैं, और हमसे से बहुत से मयोगवश दुकानदार को उमका बिल बिना चैक या हस्ताक्षर-रहित चैक के साथ भेज देने के दोषी होते हैं।

एक दुकानदार ने एक प्रकार के मास का 49 सेंट प्रति पाउंड का भाव विज्ञापित किया। उसके एक भण्डार में नौ पैकेट थे जिनमें से प्रत्येक पारदर्शक पदार्थ से लिपटा हुआ था और प्रत्येक पर प्रति पाउंड मूल्य (49 सेंट), वजन और उस टुकड़े के मूल्य की पर्ची लगी हुई थी। तीन पैकेटों पर निम्न चिह्न अंकित थे 3 पाउंड 9½ आउन्स, 2 92 डालर, 4 पाउंड 15½ आउन्स, 4 05 डालर, 4 पाउंड 12½ आउन्स, 3 86 डालर। इन मूल्यों को उनके वजन से भाग करने पर पता चलेगा कि यह मूल्य 81 सेंट प्रति पाउंड की दर से था जो उस समय उस प्रकार के मास के प्रचलित मूल्य से कहीं अधिक था। कई मास उपरान्त उसी दुकानदार के यहाँ मास के अन्य प्रकारों पर भी उसी प्रकार गलत मूल्य लगे देखे गए। अतः मभवत इस उदाहरण को ‘असावधानी’ से भिन्न किसी अन्य शीर्षक के अन्तर्गत रक्षना चाहिए।

अघटित परिणाम—एक साप्ताहिक समाचार-पत्रिका ने जिसका प्रसार स्वस्थ ढंग से बढ़ रहा था एक विशेष वर्ष के लिए यह प्रदर्शन करना चाहा कि उसके पाठक उनकी खपत से कहीं अधिक हैं। अपनी खपत के आँकड़े दिखाने के बाद पत्रिका ने लिखा “और भूतपूर्व डिप्टी पुलिस कमिश्नर के अनुसार जिसने सात विभिन्न नगरों या कस्बों में कैंताओ के घरो से अपने आदमियाँ द्वारा यादृच्छिक उठाई हुई प्रतियों पर 2,16,948 अगुलियों के निशान गिने और पहचाने इनमें से प्रत्येक कैंता 3 26 पृष्ठानुपृष्ठ पाठकों का प्रतिनिधित्व करता है।’ अन्वेषक यह कैसे जान सका कि अगुलियों के निशान पृष्ठानुपृष्ठ पाठकों के थे? अथवा, क्या उसे प्रत्येक अगुली का निशान प्रत्येक पृष्ठ पर मिला और यदि ऐसा हो भी तो क्या इससे यह सिद्ध होता है कि प्रत्येक पृष्ठ पढ़ा गया था? क्या आप कभी वास्तव में कोई पत्रिका पृष्ठानुपृष्ठ पढ़ते हैं?

अतुलनीय आँकड़े—एक वर्ष समाचार पत्रों में अमरीका के अस्थि-संबन्धी प्रसूति-शिक्षा के कालेज की एक सभा का संबाद छपा, जिसमें महानगर के एक समाचार-पत्र ने समाचार दिया कि एक डाक्टर ने कहा कि अस्थि चिकित्सकों द्वारा प्रसूति काल में देखरेख की जाने वाली माताओं में मृत्यु का अनुपात अन्य चिकित्सकों की अपेक्षा आधे से भी कम है। अन्व चिकित्सकों द्वारा प्रसूति-काल में देखरेख की जाने वाली माताओं में मृत्यु की ऊँची दर के कारण सवेदनाहारियों के अत्यधिक प्रयोग प्रसव वेदना में अवरोध और यांत्रिक विधियों पर अत्यधिक निर्भर बताए गए। 14,000 अस्थि संबंधी प्रसव केसों के एक सर्वेक्षण से मातृ मरण दर 2 8 प्रति हजार प्रसव का पता चलना बताया गया। इस गणना की तुलना राष्ट्र की औसत 6 में अधिक प्रति हजार से की गई। यह स्पष्ट होना चाहिए कि समस्त देश के लिए औसत दर सामान्य चिकित्सकों द्वारा परिचर्या किए गए प्रसव के केसों की दर का प्रतिनिधित्व नहीं करती क्योंकि बहुत से प्रसव केस चिकित्सकों की देखरेख में नहीं होते।

एक छोटी मस्ती कार के निर्माता इस बात पर बल दे रहे थे कि उनकी कार के आने से बहुत सी पुरानी कारों के क्रेता नई कार के स्वामियों में बदल गए थे। परिचालन की लागत के सबब में उन्होंने बताया कि “कार के स्वामी एक गैलन गैसोलिन के प्रयोग से 35 मील तक की रिपोर्ट देते हैं जो एक पुरानी कार द्वारा प्राप्त औसत मील की तुलना में कम आय वाले वर्ग के लोगों के लिए बड़े महत्त्व की बचत है।” एक प्रकार की कार के अधिकतम मील की दूसरे प्रकार की पुरानी कारों की औसत मील से तुलना करना निस्सन्देह अनुचित है।

साहचर्य और कारणता की संभ्रान्ति—कभी-कभी ऐसे कारक जो सहचारी हो, गलती से कारणात् संबंधित मान लिए जाते हैं। एक दक्षिणी मौसम-विज्ञ ने खोज की कि अनाज के मूल्य में गिरावट का परागज ज्वर की प्रचंडता से वैपरीत्य संबंध है। इसका यह तात्पर्य नहीं कि अनाज की कम कीमत परागज ज्वर में प्रचंडता उत्पन्न कर देती है, न ही इसका यह अर्थ है कि परागज ज्वर के गंभीर मामलों से अनाज का मूल्य गिर जाता है। अनाज का मूल्य साधारणतः उस समय कम होता है जब कि अनाज की फसल अधिक हुई हो। जब मौसमी स्थितियाँ अनाज की अच्छी फसल के लिए अनुकूल रही हो तो वे काटेदार घास-पात की अच्छी फसल के लिए भी अनुकूल रही होगी। इस प्रकार अनाज के मूल्य की गिरावट और परागज ज्वर के रोगियों के कण्ठों में से प्रत्येक का कारण (कम से कम आंशिक रूप में) मौसम में ढूँढा जा सकता है, परन्तु ये दोनों एक दूसरे पर सीधे निर्भर नहीं हैं। साहचर्य और कारणता की और अधिक चर्चा अध्याय 19 में की गई है।

साहचर्य की कारणता में सभ्रान्ति का एक दूसरा दृष्टान्त एक अनुसंधान सम्मेलन के वक्तव्य से प्राप्त हुआ जिमने वार्षिक आंकड़ों का अध्ययन करने के बाद कहा, “जब खेतों की आय बढ़ती है तब कारखानों के वेतन-चिद्दों भी निरपवाद रूप से उसका अनुसरण करते हैं, परन्तु वे वृद्धि का नेतृत्व नहीं करते। एक कारण है, दूसरा कार्य।” यदि इस प्रकार का क्रम है ही तो इसे वार्षिक आंकड़ों से कदाचित् ही प्रदर्शित किया जा सकता है। यदि कारखानों के वेतन-चिद्दों खेतों की आय का अनुसरण करते हैं तो हमें इस तथ्य को मासिक आंकड़ों का नक्शा बना कर दिखाना चाहिए जैसा कि अन्य श्रेणियों के लिए चार्ट 22 9 और चार्ट 22 10 में दिखाया गया है। कारण के सबब के बारे में यह काफी स्पष्ट है कि जब खेतों की आय में वृद्धि (या कमी) का कारखानों के वेतन-चिद्दों पर तदनुरूप प्रभाव पड़ता ही है तो वेतन-चिद्दों का भी खेतों की आय पर पारस्परिक प्रभाव पड़ता है। इसके अतिरिक्त ये दोनों किन्हीं अन्य कारकों पर भी निर्भर रहते हैं जो साधारण व्यापार के रूप को प्रभावित करने में प्रवृत्त होते हैं।

अपर्याप्त आंकड़े—अपर्याप्त आंकड़ों से उद्भूत किसी निष्कर्ष के सबब में अत्यन्त अनिश्चितता रहती है। एक बहुत छोटा प्रतिदर्श हमें ठीक निष्कर्ष पर ले जा सकता है, परन्तु हम अपने निष्कर्ष पर बहुत अधिक अंश में विश्वास नहीं कर सकते। जब कोई डाक्टर एक नया इलाज विकसित कर रहा हो तो वह कतिपय व्यक्तियों पर प्रयोग करने के बाद ही उसकी अमोघता की घोषणा नहीं कर देता। उसके पास पर्याप्त आंकड़े होने चाहियें ताकि वह परिणामों के सम्बन्ध में अपेक्षाकृत निश्चित हो सके। यदि दो या तीन व्यक्तियों पर उसके इलाज का अनुकूल प्रभाव पड़ता है तो उसका यह दावा करना निरापेक्ष नहीं हो सकता कि वे घटनाएँ मयोगवश नहीं थीं। इन कुछेक की अनुकूल अनुक्रिया इलाज के बिना ही या इसके बावजूद हो सकती है। वास्तव में, एक ऐसा “नियंत्रण” वर्ग होना चाहिए

जिमसे यह दस्तावा जा मके कि अविनया की इनाज के बिना या आम इनाज से कौसी अनुश्रिया होगी । साथ ही नियंत्रण वर्ग और चिकित्सित वर्ग दोनों काफी बड़े होने चाहियें ताकि उनमें दोषमूलन निश्चय निवारण जा मके । प्रतिदर्शों में परिकल्पित मूल्यों की विशद्वस्तना की चर्चा अध्याय 24 में 26 में दी गई है ।

अप्रानिनिधिक आँकड़ों—निष्कर्ष ऐसे आँकड़ों पर आधारित हो सकते हैं जो सरया में पर्याप्त हो परन्तु जो प्रानिनिधिक न हों । एक छोटा प्रतिदर्श प्रानिनिधिक हो सकता है, दूसरी धार एक बड़ा प्रतिदर्श प्रानिनिधिक नहीं भी हो ऐसा हो सकता है ।

अप्रानिनिधिक आँकड़ों पर आधारित निष्कर्ष का एक चित्रप्रतिष्ठित उदाहरण, जिम पर माहिप्य में दीक्षान में जा दिया गया, 1936 के राष्ट्रपति के चुनाव का लिट्टेरी इंडिजेस्ट द्वारा दिया गया पूर्वानुमान है । इंडिजेस्ट ने 1,00,00,000 से अधिक अराजकीय मतपत्र भेजे । इनमें से 23,76,523 वापिस आए और उनसे सकेन मिला कि लैन्डन को 370 और रजवेन्ट को 161 चुनाव मत पड़ेगे । अन्तिम चुनाव परिणामों में रजवेन्ट को 523 और लैन्डन को 8 चुनाव मत प्राप्त हुए । कठिनाई यह थी कि मत-गणना के लिए प्राधार-रूप में प्रयोग की गई डाक सूचियों में ऊँची आर्थिक स्थिति वाले व्यक्तियों की अपेक्षाकृत अधिक बहुनायत थी और इस प्रकार वे मनमान करने वाली समस्त जनता का प्रतिनिधित्व नहीं करती थी ।

अप्रकट वर्गीकरण—कभी-कभी माहिप्यकीय आँकड़ों में निकाले गए निष्कर्ष इसलिए ठीक नहीं होते क्योंकि एक अप्रकट वर्गीकरण की उपस्थिति की ओर ध्यान नहीं दिया गया । आत्महत्याओं के एक अध्ययन में इस प्रकार के अप्रकट वर्गीकरण की उपस्थिति पाई गई । आँकड़ों में ऐसा लगता था कि कुछ विशिष्ट धार्मिक वर्गों में अन्य वर्गों की अपेक्षा आत्महत्याओं की अधिक सम्भावना है । और अधिक विचार करने पर यह प्रकट हुआ कि आत्महत्याओं के शहरी या ग्रामीण क्षेत्रों में बंटे घटनाओं के मामले की ओर ध्यान नहीं दिया गया था । निष्कर्ष, यह नहीं कि आत्महत्याओं की प्रवृत्ति निदिष्ट धार्मिक वर्गों से सम्बन्धित होने की है, बल्कि यह होना चाहिए था कि आत्महत्याएँ शहरी इलाकों में अधिक प्रचलित हैं और ये धार्मिक वर्ग भी शहरी में अधिक सरया में हैं ।

इकाइयों की व्याख्या का अकरण—मोटर गाड़ी या ड्राइवर के लाइसेंस के नवीकरण के साथ प्रत्येक मोटर गाड़ी वाले को दी गई एक पुस्तिका में एक राज्य के मोटर गाड़ी कमिशनर ने इस तथ्य की ओर ध्यान दिलाया कि 26 वर्ष पूर्व "मील मरण दर" 23.6 थी जबकि उसी समय समाप्त हुए वर्ष में "मील मरण दर" 42 थी । इस बात की कोई व्याख्या प्रस्तुत नहीं की गई थी कि यह राज्य की सड़कों की प्रति मील—या प्रति हजार मील—मृत्यु सख्या थी, अथवा वर्ष के दौरान मोटर गाड़ी के प्रति सौ, प्रति हजार या प्रति दस लाख मील सफर की मृत्यु सख्या थी । निश्चय ही यह प्रति मील मोटर-सफर के पीछे मृत्यु-सख्या न थी, यद्यपि मरसरी तीर पर पढ़ने पर ऐसा ही प्रतीत होता था । पुष्टता करने पर पता चला कि मृत्यु सख्या का यह अनुपात सड़क पर प्रति दस करोड़ मील मोटर-सफर का था । राज्य में वर्ष भर में बिके गैमोनिन के गैलनों की सख्या को 13.12 से, जो प्रति गैलन मोल्नी की औसत थी, गुणा करके मील-दूरी प्राप्त की गई थी । प्रसंगवश, इस औसत की यथार्थता के सम्बन्ध में और यह कैसे प्राप्त की गई इस बारे में किसी को भी आश्चर्य हो सकता है । हाँ, गैमोनिन की बिक्री राज्य के कर-वृत्तों से प्राप्त थी ।

कुछ विकासशील देशों में, केन्द्रीय सरकार द्वारा इकाइयों की स्पष्ट व्याख्या करने की विफलता के कारण, एक ही क्रिया में प्रयुक्त विभिन्न विधियों में पर्याप्त भिन्न परिणाम निकले हैं। उदाहरणार्थ, साम्यवादी चीन में, वर्षों तक, सामूहिक सस्थाओं और कम्पूनों के "सचय" के तथा कुल सामूहिक एवं कम्पून आय के मुकाबले उपभोग के अनुपात निकालने के लिए सामूहिक सस्थाओं और कम्पूनों में कम से कम तीन विभिन्न विधियाँ साथ साथ प्रयुक्त की गईं। एक बार एक लेखक ने एक विशिष्ट कम्पून के हिसाब-किताब पर ये तीनों विधियाँ लागू की और वह विकल्प से 27 प्रतिशत, 40 प्रतिशत, तथा 48 प्रतिशत के "सचय" अनुपातों पर पहुँचा।²

आमक योग—हममें से जो समाचार-पत्र के खेल सम्बन्धी पृष्ठों को पढ़ते हैं, उन्होंने संभवतः प्रत्येक शरद् काल में इस आशय का वक्ताव्य देखा होगा कि प्रभी समाप्त हुई वेसवाल ऋतु में हज़ार—या लाख—की एक निश्चित मर्या में शौकीनों ने स्वदेशी टीम का खेल देखा। उदाहरणतया, यह कहा गया कि एक वेसवाल ऋतु में न्यूयार्क के अमरीकनो के स्वदेशी खेलों में 15,38,007 शौकीन दर्शक उपस्थित रहें। यह गणना प्रत्येक स्वदेशी खेल देखने वाले व्यक्ति की सख्या को जोड़कर प्राप्त की गई। जैसा कि असावधानी से बहुधा कहा या सूचित किया जाता है, यह गणना 15,38,007 शौकीनों का प्रतिनिधित्व नहीं करती, वरन् प्रवेश की निदिष्ट सख्या को व्यक्त करती है, जबकि बहुत से व्यक्ति ने एक से अधिक खेल देखे।

बहुत कुछ इसी प्रकार का अर्थहीन परन्तु प्रभावपूर्ण लगने वाला योग एक उद्यान-संस्था द्वारा प्रस्तुत विवरण में उपस्थित था जिसने हान ही में एक अन्य उमी प्रकार की कम्पनी खीदी थी। यह कम्पनी भी दो अन्य संस्थाओं के हान ही के विलय का प्रतिनिधित्व करती थी। विवरण इस आशय का था कि उनका बागवानी के संयुक्त अनुभव का योग अब 295 वर्ष है। यह गणना तीनों कम्पनियों की आयु को जोड़कर प्राप्त की गई थी।

निष्कृष्ट रूप से अभिकल्पित प्रयोग—कोई प्रयोग मार्थक सिद्ध हो इसके लिए यह इस प्रकार से अभिकल्पित होना चाहिए कि जो परिणाम निकले हैं, विचाराधीन कारकों के अतिरिक्त उनके अन्य कारण न हों मकें। निम्नलिखित उदाहरण का पुनः दूसरे सदस्य में अध्याय 25 के अन्त में जिक्र किया जाएगा। बहुत वर्ष पूर्व जब प्रतिदीप्त प्रकाश व्यवस्था पहले पहल चालू हुई तो कुछ लोगों का विश्वास था कि जो व्यक्ति इस प्रकाश के विकिरण में रहेंगे वे बच्य हों जायेंगे। एक रेल मार्ग पर पहले ही प्रतिदीप्त बत्तियाँ लग चुकी थी और इस विश्वास को ब्रह्मते की आशा से उन्होंने एक प्रयोग किया जिसमें चूहों का एक समूह तापीय प्रकाश में तथा दूसरा प्रतिदीप्त प्रकाश में रखा गया। निश्चित कालावधि के उपरान्त पहले समूह के बच्चे सख्या में मदा की भाँति हुए जबकि दूसरे समूह का कोई बच्चा न हुआ। एक सशयालु व्यवस्थापक ने कहा कि चूहों के दूसरे समूह की ध्यान से पुनः परीक्षा की जाए और यह पता चला कि उन समूह के सभी चूहे

2 सिडनी बेलन, "माम एलेक्स आफ चाइनीज़, कम्प्युनिस्ट स्टैटिस्टिक्स," एशियाई अध्ययनों की संस्था, शिकागो के सम्मुख प्रस्तुत प्रबल, मार्च 29 1961, पृष्ठ 11—14, अप्रकाशित।

3 सी० सी० लो, इन्ट्रोडक्शन टु इक्मपेरिमेन्टल स्टैटिस्टिक्स में प्रायोगिक अभिकल्प का एक विवेचन प्राप्त है। मेक ग्रहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क, 1964। साथ ही देखिये डी० जे० फिन्नी, एन इन्ट्रोडक्शन टु दि थ्योरी ऑफ एक्मपेरिमेन्टल डिजाइन, शिकागो युनिवर्सिटी प्रेस, 1960।

समान लिगी थे। यह एक प्रारम्भिक बात है कि दोनों समूहों में नर-मादा की संख्या समान होनी चाहिए थी।

अनुसंधान विधियाँ

यह कल्पना नहीं करनी चाहिए कि सांख्यिकीय विधि ही अनुसंधान में प्रयोगार्थ एकमात्र विधि है, न ही इस विधि को प्रत्येक समस्या का सर्वोत्तम हल मानना चाहिए। जिस प्रकार बढई के पास भिन्न-भिन्न प्रकार के कार्य के लिए उपयोगी विभिन्न औजार होते हैं, उसी प्रकार अनुसंधायक विभिन्न तकनीकों का लाभ उठा सकता है जो उसके व्यवसाय के औजार हैं और जिनमें से प्रत्येक एक विशिष्ट प्रकार की स्थिति के लिए उपयुक्त है। यदि कोई व्यवसायी बढई छेनी के स्थान पर पेंचकम का प्रयोग करता है तो परिणाम कर्मकार के अनुरूप या सन्तोषजनक होने का संभावना नहीं है। इसी प्रकार यह महत्वपूर्ण है कि अनुसंधायक प्रारंभ में ही अपनी समस्या पर ध्यानपूर्वक विचार करे और उस तकनीक या उन तकनीकों का प्रयोग करे जो उस समस्या के उपयुक्त हों। जैसे किसी कार्य को पूरा करने में बढई को एक से अधिक औजारों के प्रयोग की आवश्यकता होती है, वैसे ही अनुसंधायक को प्रायः एक नहीं, बल्कि कई विधियों का बहुधा प्रयोग करना पड़ता है।

जब प्रत्येक अध्ययनगत व्यक्ति या घटना के संबंध में बहुत कुछ जानकारी प्राप्त करने की हमारी इच्छा होती है तो हमारे बहुत से झाँकड़े प्रकृत रूप से अमान्यतामय हो सकते हैं। ऐसी स्थिति में हम अनुसंधान की व्यक्ति या घटना-अध्ययन की विधि का प्रयोग करते हैं जिसका उद्देश्य होता है अध्ययनरत व्यक्ति या घटना को निजी विशेषताओं पर विस्तार से मनन करना और इस प्रकार के बड़े विस्तृत अध्ययनों से सामान्यीकरण करना। व्यक्ति या घटना वृत्तों (जैसे मजदूरी, सतान की संख्या, आदि) के अध्ययन से प्राप्त कुछ जानकारी सांख्यिकीय हो सकती है और जब बहुत से वृत्त सम्मिलित किए गए हों तो उनसे प्राप्त अमान्यतामय जानकारी के सांख्यिकीय सारांश बनाए जा सकते हैं।

यदि सचि का केन्द्र व्यवहार या अभिवृत्तियों के परिवर्तन है तो नामिका तकनीक का प्रयोग किया जा सकता है। इसमें दो या अधिक अवसरों पर उसी वर्ग के व्यक्तियों से माधास्कार किया जाता है। उदाहरण के तौर पर जब उपभोग आदतों और परिवार-बजटी से संबंधित जानकारी प्राप्त की जाती है तो नामिका विधि से मात्रात्मक झाँकड़े प्राप्त किए जा सकते हैं जहाँ तक व्यक्ति या घटना-अध्ययनों का संबंध है, यदि नामिकाएँ

4 सामान्यतः गुणात्मक विषयवस्तुओं से संबंधित क्षेत्रों में परिणामात्मक विश्लेषण के प्रयोग के उदाहरणों के लिए एम० आर्दरगर, "थार्क टूवे एन्ड दि स्विट्स जुटियम स्टाइशस लेटर्स एंस्टैटिस्टिकल टेस्ट ऑफ आचरशिप", जर्नल ऑफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, मार्च 1963, पृष्ठ 85—96, तथा एम० आर्दर एच डी० एन० वेल्लेस, "इन्फरन्स इन एन आचरशिप प्राब्लम", जर्नल ऑफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, जून 1963, पृष्ठ 275—309 देखिए। आर० फॉर तथा पी० जे० बरडून, रिसर्च मेथड्स इन ईकनामिक्स एन्ड बिजनेस, मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क, 1962 तथा एच० होमन, सर्वे डिजाइन एन्ड अनैलिसिस, ग्लेनको का की प्रेस, 1955 के विभिन्न विधियों का वर्णन है। अनुसंधानों की एम० जी० केडल तथा डब्ल्यू० आर० वलेंड, ए डिजाइनरी ऑफ स्टैटिस्टिकल टेम्स, अंतर्राष्ट्रीय स्टैटिस्टिकल इंस्टीट्यूट यूनेस्को, 1959 भी उपयोगी लगेंगी।

काफी बड़ी हो, तो भ्रमात्रात्मक जानकारी, जैसे सार्वजनिक प्रश्नों पर सम्मतियों, के सांख्यिकीय विश्लेषण प्रस्तुत किए जा सकते हैं।

कभी-कभी ऐतिहासिक अभिगम से किसी समस्या का हल किया जा सकता है। यद्यपि ऐतिहासिक विधि अधिकतर वर्णनात्मक तथा भ्रमात्रात्मक है तथापि जब हम आयातों, निर्यातों, जनसंख्या, और अन्य श्रेणियों की वृद्धि या ह्रास पर विचार करते हैं तो हमें उनके सांख्यिकीय पक्ष मिल सकते हैं।

पुनश्च, प्रायोगिक विधि का प्रयोग करना भी उपयुक्त प्रक्रिया हो सकती है। इसमें जिस कारक का हम अध्ययन कर रहे हैं उसी में किंचित् हेरफेर होने दिया जाता है और अन्य कारकों में से अधिकतम को नियंत्रित रखने का प्रयास किया जाता है। उदाहरणतः, यदि हम कार के टायर पर कार के वजन के प्रभाव का अध्ययन करना चाहते हैं कि टायर कितने मील के सफर तक काम दे सकेगा तो हमें सड़क की दशाओ, रफ्तार, तापमान, टायर के आकार, रबड़ और फीते के प्रकार, टायर को फुलाने और अन्य बहुत से कारकों पर नियंत्रण रखना पड़ेगा।

सामाजिक विज्ञानों में, प्रायोगिक विधि विरले ही लागू की जा सकती है और इसके स्थान पर सांख्यिकीय विधि के कुछ पक्षों का प्रयोग किया जाता है। उदाहरणतया, हम जन-समूहों को निर्धारित भोजन पर रहने के लिए बाधित करके और वास्तव में उनके जीवन के अन्य सभी पक्षों या स्थितियों को समान रखकर जीवन की दीर्घता पर विभिन्न प्रकार के भोजनों के प्रभाव का पता नहीं लगा सकते। इसके स्थान पर हमें विभिन्न प्रकार का भोजन करने वाले व्यक्तियों के समूहों का पता लगाना होगा और तब हमें, जैसा कि अध्याय 21 में बताया गया है, उनके जीवन के अधिकतम अन्य पक्षों के महत्व को आँकना और सांख्यिकीय ढंग से नियंत्रित करना होगा, क्योंकि हम प्रयोगात्मक ढंग से उन पर नियंत्रण नहीं रख सकते। प्रयोगात्मक और सांख्यिकीय विधियाँ प्रतिपक्षी नहीं हैं, बल्कि व्यावहारिक दशाओं में सांख्यिकीय विधि प्रयोगात्मक विधि की पूरक होती है। यदि इस प्रकार से प्रयोग किया जा सकता कि सभी परिवर्तों पूणतया नियंत्रित रखे जाते तो संभवतः आँकड़ों की आवश्यकता न पड़ती। अधिक में अधिक हम अधिक महत्वपूर्ण कारकों में से प्रायः कुछ को नियंत्रित कर सकते हैं और इस प्रकार यह आवश्यक हो जाता है कि अन्य गीए विघ्नकारी कारकों के जमघट (जिन्हें कभी-कभी "दैवयोग" की सज़ा दी जाती है) के महत्व का सांख्यिकीय ढंग से मूल्यांकन किया जाए, जैसा कि अध्याय 24 से 26 में वर्णन किया गया है।

कुछ समस्याओं को सुलझाने के लिए आगमन विधि की बजाय निगमन विधि अपनाई जा सकती है। जब निगमन ढंग से एक परिकल्पना स्थापित हो जाय और जब मात्रात्मक आँकड़े प्राप्त हो तो सांख्यिकी की सहायता से परिकल्पना की आगमन परीक्षा की जा सकती है और इस परीक्षा से परिकल्पना की पुष्टि या अविश्वसनीयता सिद्ध हो सकती है। इसके विपरीत, सांख्यिकीय ढंग से प्राप्त सबधों से (जैसे, उदाहरणार्थ, कुछ राज्यों में खेतों के आकार और प्रति एकड़ भूमि के मूल्य के सबध में कुछ निष्कर्ष के नकारात्मक साहचर्य की प्राप्ति) कारणात्मक सबधों का आभास हो सकता है जिनका निगमन विधि से सम्पादन किया जा सकता है। पुनः हमारे पास दो विधियाँ हैं जो प्रति-रोधी न होकर पूरक हैं।

अनुसंधान की इन विधियों का पुरक स्वभाव परिचालन अनुसंधान में भी प्रतिबिम्बित होता है। यह अपेक्षाकृत नया क्षेत्र विशिष्ट प्रवर्ध समस्याओं पर जो किसी संगठन के भीतर मनुष्यों और मशीनों के प्रयोग के इर्द-गिर्द घूमती है, मातात्मक विधियों का अनुप्रयोग करता है। उद्देश्य यह है कि समस्याओं के श्रेष्ठ हल निकाले जाएँ। परिचालन अनुसंधान में (जिसे कभी कभी प्रवर्ध विज्ञान कहा जाता है) अर्थशास्त्र और समाजशास्त्र जैसे सामाजिक विज्ञानों के सिद्धांतों तथा भौतिकी एवं रसायन जैसे भौतिक विज्ञानों के सिद्धांतों को प्रायः धिन्नाया जाता है। परिचालन अनुसंधान में विशेष महत्त्व एकघातीय कार्यक्रम की गणितीय तकनीक का है जिसमें निवेशों, उपजों, तथा उद्देश्यों का परिमाण पूर्ण रूप से स्थिर किया जाता है।

जाँच का भाव—नियन्त्रित निर्देशित मशयानुता—सांख्यिकीय विधि का मार है। जब सांख्यिकी में प्रशिक्षित व्यक्ति समस्या के निश्चित उत्तर पर नहीं भी पहुँच सकते, और कुछ नहीं तो वे ठीक प्रश्न पूछने की पर्याप्त जानकारी रखते हैं। सांख्यिकीय विधि के सार तथा विशिष्ट सांख्यिकीय तकनीकों का अनुप्रयोग करने से सांख्यिकी के सबंध में मड़े खटकों—अर्थात् अर्थवार्थानाओं वा 'भूट, रफू भूठ, तथा सांख्यिकी' के रूप में वर्गीकरण करना तथा अंकड़े मिथ्या भाषण नहीं करने बल्कि मिथ्याभाषी चित्रित होते हैं' आदि की प्रचलन कम करने में सहायता मिलती है।

मुक्त उद्यम तथा आयोजित अर्थव्यवस्था दोनों में, विकसित एवं अविश्वसित देशों में, सांख्यिकीय शिक्षा का मूल्य इस प्रकार में प्रशिक्षित व्यक्तियों को दिए जाने वाले उँचे वेतनों में प्रतिबिम्बित होता है। समुक्त राज्य अमरीका में, प्राणी विज्ञान, जनसांख्यिकी, अर्थशास्त्र, शिक्षा, इंजीनियरी, स्वास्थ्य एवं भेषज, वीमा, बाजार अनुसंधान, मनोविज्ञान, तथा समाजशास्त्र के क्षेत्रों में सरकारी अभिकरण, निजी उद्योग, तथा शैक्षिक संस्थाएँ सांख्यिकी प्रशिक्षित व्यक्तियों की सक्रियता से खोज करती हैं। 1960 के दशक के उत्तर काल में गणितीय सांख्यिकी विद् प्रति वर्ष 20,000 डालर से अधिक कमा रहे थे। बाद के वर्षों में नि सदेह इस प्रकार के वेतन बढ़े हैं।

2

सांख्यिकीय आँकड़े

जब कोई अन्वेषक एक विषय का अध्ययन प्रारम्भ करता है तो वह स्वयं आँकड़े इकट्ठे करने या पहले से ही प्राप्त प्रकाशित या अप्रकाशित मकलनों से आवश्यक आँकड़े प्राप्त करने में से कोई सी प्रक्रिया चुन सकता है। यदि किसी व्यक्ति या संगठन ने ऐसे विश्वस्त आँकड़े तैयार किए हैं जो उम्र समस्या से सम्बन्ध रखते हैं तो वर्तमान जानकारी का प्रयोग करना बहुत कम खर्चीला बैठता है। यद्यपि अपने आँकड़े इकट्ठे करना अधिक महंगा है तो भी इस प्रक्रिया से अनुसंधायक ठीक वही जानकारी इकट्ठी कर सकता है जो विचाराधीन विशिष्ट प्रश्नों के उत्तर के लिए अपेक्षित है।

सभी पाठकों के सामने मौलिक सांख्यिकीय आँकड़े इकट्ठे करने की समस्या उत्पन्न नहीं होगी, बहुतों के लिए जानकारी के निमित्त विद्यमान स्रोतों का आश्रय लेना सम्भव होगा। फिर भी यदि अन्वेषक को सांख्यिकीय आँकड़ों के संग्रह, सम्पादन, और विन्यास की प्रक्रिया और प्रचलन सकटा का कुछ ज्ञान हो तो ऐसे स्रोतों से प्राप्त आँकड़ों का मूल्यांकन और उनका अधिक उत्तम प्रयोग किया जा सकता है।

एक बहुदूत उदाहरण यहाँ संगत है। हैरोल्ड कॉक्स ने, जब वह एक नवयुवक के रूप में भारत में था, एक न्यायाधीन के सामने कुछ भारतीय आँकड़े उद्धृत किए। न्यायाधीश ने उत्तर दिया, 'कॉक्स, जब तुम कुछ और बड़े हो जाओगे तो तुम इनके आश्रय के साथ भारतीय आँकड़े उद्धृत नहीं करोगे। सरकार आँकड़े इकट्ठे करने के लिए बहुत उत्सुक है—वह आँकड़े इकट्ठे करती है, उनका जोड़ करती है, उनकी गुणवत्ता घात निकालती है, उनका धनमूल निकालती है और अत्युत्तम रेखाचित्र तैयार करती है। परन्तु जो बात तुम्हें कभी न भूलनी चाहिए वह यह है कि उनमें से प्रत्येक आँकड़ा पहले-पहल गाँव के चौकीदार से प्राप्त होता है जो केवल अपनी इच्छा के अनुसार जैसा चाहे लिख देता है।'¹ यह भी कह देना चाहिए कि यह कहानी बहुत पहले के भारत की और गकेत करती है। आज भारत में बहुत से योग्य सांख्यिकीविद् और एक सक्रिय सांख्यिकीय संस्था विद्यमान है। सम्भवतः स्थानीय सांख्यिकीय जानकारी के स्रोत के रूप में अब चौकीदार कार्य नहीं करता।²

1 इस कहानी का सर्वप्रथम प्रयोग जानकारी के अनुसार सर जोसिया की स्टाम्प मम ईकनामिक फंक्शनर इन माडर्न लाइफ, पी० एस० किंग एण्ड सन, सदन, 1929, पृष्ठ 258—259 में किया गया है।

2 प्रमुख अविश्वसित क्षेत्रों में सांख्यिकी की एक सक्षिप्त समालोचकीय समीक्षा के लिए सिडनी बनेन, "रोसेट ईकनामिक इक्वलीरियम इन इंडिया एंड कम्युनिस्ट चाइना अनदर इंटर्प्रिप्रेशन," अमेरिकन ईकनामिक रिव्यू, मई 1965, पृष्ठ 31—39 देखिए।

सांख्यिकीय आंकड़ों का संग्रह

संग्रह की विधि—सांख्यिकीय आंकड़े बहुत बार एक ऐसी प्रक्रिया से प्राप्त किए जाते हैं जिसके अन्तर्गत गृह स्वामी, व्यापारी या अन्य सूचनादाता से अभीप्सित जानकारी प्राप्त की जाती है। इसके लिए या तो गणनाकार सूचनादाता के पास जाता है, उससे आवश्यक प्रश्न पूछता है और एक अनुसूची में उत्तर लिख लेता है या सूचनादाता के पास प्रश्नों की एक सूची (जिसे कभी-कभी प्रश्नावली कहते हैं) प्रेषित कर दी जाती है जिसका उत्तर वह अपनी सुविधानुसार दे सकता है। प्रत्येक जनगणना के अवसर पर इकट्ठा किए गए आंकड़े गणना-प्रक्रिया में प्राप्त किए जाते हैं जिसके अन्तर्गत गणनाकार संयुक्त राज्य अमेरिका में प्रत्येक निवास-स्थान पर जाते हैं। कभी कभी पंजीकरण द्वारा जानकारी प्राप्त की जाती है, जिसका तात्पर्य यह है कि जब कोई घटना घटती है या उसके कुछ ही दिन बाद, उपयुक्त अधिकारी को जानकारी की सूचना दे दी जाती है। इस प्रकार जन्म और मृत्यु का पंजीकरण होता आवश्यक है। बहुत से राज्यों में मोटर दुर्घटनाओं की सूचना मोटर गाड़ियों के आयुक्त को देना आवश्यक है।

सामान्य रूपरेखा की दृष्टि से प्रश्नावली भेजकर, गणना प्रक्रिया और पंजीकरण द्वारा आंकड़े प्राप्त करने की समस्याएँ एकसमान हैं। हाँ, पंजीकरण की पद्धति में यह कठिनाई अवश्य है कि बहुत से लोग पंजीकरण की उपेक्षा करेंगे। पंजीयक के लिए निरंतर सतर्क और बार-बार पड़ताल करते रहना आवश्यक होगा। फिर भी, पंजीकरण अधिकतर उपयुक्त ढंग से पदसजित सरकारी अधिकारी के पास कराना पड़ता है, और प्रायः आंकड़े देना विधिक बाध्यता होती है। अधिकतर सांख्यिकीय जानकारी क्योंकि गणना-प्रक्रिया द्वारा या प्रश्नावली भेजकर प्राप्त की जाती है, अतः इस अनुभाग के शेषांश में इन प्रक्रियाओं से आंकड़े इकट्ठा करने की विधियाँ दी जाएँगी।

प्रक्रिया की रूपरेखा—किसी सांख्यिकीय अनुसंधान के सोपानों को, जिसमें आंकड़ों का संग्रह आता है, निम्न प्रकार से नामांकीकृत किया जा सकता है

1. अध्ययन की योजना बनाना।
2. प्रश्न बनाना और अनुसूची तैयार करना।
3. यदि पूर्ण गणना नहीं की जानी है तो प्रतिदर्श के प्रत्येक का चयन करना।
4. जानकारी प्राप्त करने के लिए अनुसूचियों का प्रयोग करना।
5. अनुसूचियों का सम्पादन करना।
6. आंकड़ों को सुव्यवस्थित करना।
7. अन्तिम सारणियाँ और चार्ट बनाना।
8. निष्कर्षों का विश्लेषण करना।

विशिष्ट प्रतिदर्श के चयन के निर्णय को प्रथम सोपान में सम्मिलित कर लेने के अतिरिक्त प्रायः सभी सोपानों का यही क्रम रहेगा। हम यहाँ धातों में से प्रत्येक सोपान का क्रमशः विवेचन करेंगे।

1 अध्ययन की योजना बनाना—यदि एक प्रकरण का सांख्यिकीय ढंग से अध्ययन करना है तो अनुसन्धानक के लिए प्रारम्भ से ही दूसरे के इस क्षेत्र में किए गए पूर्व कार्य से

परिचित होना आवश्यक है। हो सकता है कि उसे यह पता लगे कि पहले ही उसी प्रकरण का किसी अन्य व्यक्ति के द्वारा परीक्षण किया जा चुका है और उसके प्रश्नों का पहले ही उत्तर मिल चुका है। वह अपना अध्ययन इस ढंग से व्यवस्थित करने का विचार कर सकता है ताकि इसकी इससे पूर्व के अध्ययन से तुलना की जा सके। निस्संदेह वह दूसरों के अनुभव और भूलों से लाभ उठाएगा। उसे यह भी पता चल सकता है कि उसके प्रकरण के अनुसंधान में इतनी बड़ी कठिनाइयाँ हैं कि वे अलघ्य है, व्यय बहुत अधिक हो सकता है, अपना यह प्रतीत हो सकता है कि जानकारी देने वाले उस प्रकार की जानकारी को प्रकट करना नहीं चाहते जिसकी आवश्यकता है।

हमारे क्या कुछ कर चुके हैं यह अध्ययन कर चुकने के उपरांत अनुसंधायक उन सामान्य प्रश्नों पर विचार करने को तैयार रहता है जो वह जानना चाहता हो। यदि रोज-गार और बेरोजगारी के अध्ययन की प्रायोजना हो तो प्रत्येक व्यक्ति से संबंधित बहुत-सी पूछताछ संगत होगी। कुछ अधिक महत्व की पूछताछ का सुभाव नीचे दिया जाता है

क्या व्यक्ति के कोई आश्रित हैं? कितने हैं?

व्यक्ति पुरुष है या स्त्री?

उसकी वैवाहिक स्थिति क्या है?

व्यक्ति की आयु क्या है?

उसकी औपचारिक शिक्षा कितनी है?

क्या उसके पास सम्पत्ति है?

उसका साधारण काम-धन्या क्या है? किस उद्योग में है?

इस समय वह किस प्रकार का कार्य कर रहा है? (यदि अध्ययन व्योरेवार हो तो व्यक्ति के विगत कई वर्षों के घ-घों के अनुभव और उनमें प्राप्त मजदूरी की सूची बनाने की ओर ध्यान दिया जा सकता है।)

क्या उसे पूर्णकालिक रोजगार प्राप्त है? अथवा अंशकालिक? क्या वह पूर्ण रूप से बेरोजगार है?

यदि व्यक्ति अंशकालिक कार्य कर रहा है या पूर्ण रूप से बेरोजगार है, तो इसका कारण?

यदि वह पूर्ण रूप से बेरोजगार है, तो कितने समय से? तथा क्या वह काम करने के योग्य और काम करने का इच्छुक है, अथवा, विकल्प से, क्या वह सक्रिय होकर काम ढूँढ रहा है?

निस्संदेह पाठक को अन्य महत्व के प्रश्नों का विचार आएगा, परन्तु इस प्रारंभिक पद के स्वरूप के सकेत के लिए ये प्रश्न पर्याप्त हैं। हम प्रायः सभी महत्वपूर्ण प्रश्नों के उत्तर प्राप्त नहीं कर सकते। इतनी विस्तृत पूछताछ करना बहुत व्ययकारक हो सकता है। कुछ प्रश्न ऐसे हो सकते हैं (जैसे सम्पत्ति के स्वामित्व से संबंधित या मजदूरी संबंधी प्रश्न) जिनका उत्तर देने से आपक प्रायः मना कर देय। अतः पूछताछ के आधार के लिए अत्यन्त महत्व के और व्यावहारिक प्रश्न चुने जाते हैं। यही प्रश्न हैं जो कि अनुसूची में सम्मिलित किए जाएंगे।

सामान्य महत्व की कई ऐसी बातें हैं जिन पर साधारण योजना बनाने के संबंध में प्रायः विचार किया जाता है। इनमें से एक अध्ययन के विस्तार के बारे में है। क्या हमें सारा समुदाय सम्मिलित किया जाएगा या केवल एक प्रतिदर्श? यदि घन और गणनाकार

प्राप्त हैं तो हम पूर्ण गणना कर सकते हैं, किन्तु प्रायः हमें प्रतिदर्श से ही सन्तुष्ट हो जाना चाहिए। अनुसूची पर विचार पूर्ण कर चुकने के बाद हम प्रतिदर्श के चयन का विवेचन करेंगे।

एक अन्य संबंधित समस्या यह है कि अनुसूची डाक से भेजी जाए (इस अवस्था में इसका बहुत सरल और स्वतः स्पष्ट होना जरूरी है) या, गणनाकारों का प्रयोग किया जाए। यदि वृत्तनिक गणनाकारों का प्रयोग करना है तो योग्य व्यक्तियों को ढूँढना आवश्यक है। तथापि, यह प्रायः सत्य है कि गणनाकारों को नियुक्त करने के लिए धन प्राप्त नहीं होता। वास्तव में, कभी-कभी स्थिति यह होती है कि यद्यपि जाँच के परिणाम मूल्यवान हो सकते हैं, परन्तु उनका मूल्य इतना अधिक नहीं होता जितना गणनाकारों को नियुक्त करने पर व्यय आया। अबैतनिक गणनाकारों के रूप में पुनिस के सिपाहियों, कालेज के विद्याधियों, डाकियों, घूमने वाले अधिकारियों और स्कूल के बच्चों का प्रयोग करके भी अध्ययन किये गए हैं।

एक तीसरी बात उस स्थान में संबंधित है जहाँ जापको का साक्षात्कार किया जाएगा। रोजगार-बेरोजगारी के अध्ययन के लिए हम गणनाकारों को गलियों में, काम पर लगे हुए लोगों से उनके काम के स्थानों पर या घरो पर साक्षात्कार करने के लिए भेज सकते हैं। यह स्पष्ट है कि तीनों में से अन्तिम ढंग अधिक अच्छा है। बेरोजगारी के अध्ययन के लिए हमें यह भी विचार करना चाहिए कि बय, निग, काम करने की इच्छा और मानसिक या शारीरिक स्थिति का बिना विचार किए किसी घर के सभी व्यक्तियों की गणना की जाए भयवा नहीं। प्रत्येक व्यक्ति की सूची बनाने से पूर्ण स्थिति का पता चल जाएगा, परन्तु इसके लिए काम भी बहुत करना होगा। रोजगार का अध्ययन करते समय हमारी रुचि उन गृहिणियों में होनी आवश्यक नहीं है जिन्हें घर से बाहर कोई काम नहीं चाहिए। हमारी रुचि प्रौढ लोगों में हो सकती है ताकि यह जानने का प्रयत्न किया जाए कि जनसंख्या का कितना अनुपात सेवा-निवृत्त या बहुत बूढ़ या काम करने के अयोग्य है। प्रायः छोटे बच्चे क्योंकि श्रमिक शक्ति का भाग नहीं होते, इसलिए (एक आयु जैसे) 14 या 16 वर्ष में छोटे सब व्यक्तियों को सम्मिलित न करना वाछनीय हो सकता है। निम्न उदाहरण में हम यह मान कर चलेंगे कि 14 वर्ष से ऊपर की आयु के सब व्यक्तियों की गणना हुई।

2 प्रश्न बनाना और अनुसूची तैयार करना—इस और पहले ही संकेत किया जा चुका है कि वे सभी प्रश्न, जिनका उत्तर हम चाहते हैं, अनुसूची में सम्मिलित नहीं किए जा सकते। उन प्रकरणों को चुनने के उपरांत जिन्हें हम अपनी जाँच में सम्मिलित करना चाहते हैं, हमें प्रत्येक प्रश्न इस ढंग से बनाना चाहिए कि उसका तुरन्त और ठीक-ठीक उत्तर दिया जा सके और तब हमें अनुसूची प्रश्न का प्रारूप बनाना चाहिए। पृष्ठ 36 पर एक अनुसूची प्रश्न दिया गया है। इसका किसी समुदाय के रोजगार और बेरोजगारी के अध्ययन में प्रयोग किया जा सकता है। हाँ, इस अनुसूची के साथ गणनाकारों के लिए अनुदेशों की पुस्तिका या कामच पूरक के तौर पर सलन करना होगा। अनुदेशों में यह व्याख्या होगी कि “कुटुम्ब” और “परिवार” से क्या तात्पर्य है, क्योंकि दोनों पदों का प्रयोग होता है, वय का अर्थ “निकटतम जन्मदिन” (तथाकथित “बीमा-विधि”) या “बीते जन्मदिन” से (तथाकथित “जनगणना-विधि”); “घन्धा” और “उद्योग” पदों का अर्थ क्या है, इत्यादि।

एक बहुत सारी अनुसूची नीचे दी गई है। यह एक पोस्टकार्ड है जो कि कन्ट्री जेंटलमैन नामक पत्रिका को वापिस करना था। यह फार्म न केवल इसकी मादगी के लिए

रुचिकर है वरन् इसलिए भी क्योंकि जिन्होंने सहयोग दिया उनको 'प्रशसा के उपहार' के रूप में वटिस पब्लिशिंग कम्पनी ने एक चमकदार नवीन दस सेन्ट का सिक्का 'भेजा'। कम्पनी का कहना है कि जब कोई सिक्का न भेजा जाए तो ऐसी पोस्टकार्ड प्रश्नावली के लगभग 20 प्रतिशत उत्तर प्राप्त होंगे। जब दस सेन्ट का सिक्का भेजा गया तो 65 प्रतिशत उत्तर प्राप्त हुए। यह भी अनुभव किया गया कि दस सेन्ट के स्थान पर 25 सेन्ट का प्रयोग करके उत्तर लगभग 70 प्रतिशत तक पहुँचाए जा सकते थे।

- 1 आपकी डाक कैसे प्राप्त होती है? आर० एफ० डी० अथवा स्टार मार्ग
डाकघर पर घर घर वितरण
- 2 आपके परिवार के मुखिया का क्या धंधा है?
- 3 उनका किस प्रकार का व्यवसाय है?
- 4 क्या आप फाम या पशु मवधनालय में जीवन निर्वाह करते हैं? हाँ नहीं
- 5 यदि आप फार्म या पशु मवधनालय से जीवन निर्वाह नहीं करते तो क्या आपके परिवार में से कोई—
क कृषि भूमि का स्वामी है या ऐसी भूमि किराए पर लेता है? हाँ नहीं
व फाम पर काम करता है? हाँ नहीं
- 6 यदि आप किसान नहीं हैं तो आपकी कटौती जंटलमैन में रुचि का कारण क्या है?

वटिस पब्लिशिंग कम्पनी द्वारा प्रयुक्त पोस्टकार्ड प्रश्नावली

एक वर्ष की बात है कि लेखकों में से एक ने न्यू ब्रन्जविक शहर की अर्थव्यवस्था के लिए न्यू जर्सी के रूजर्स राज्य विश्वविद्यालय द्वारा किए प्रश्नानुसंधान के एक अध्ययन का निरीक्षण किया और 155 प्रश्नों वाली एक अनुसूची तैयार की जिनमें से कुछ के 9 तक वैकल्पिक उत्तर थे। इसमें प्रश्नों के 9 मिमियोग्राफ पृष्ठ तथा अनुदेशों और अन्य गद्य के 2 पृष्ठ सम्मिलित थे। प्रश्नावली प्राप्त करने वालों में से सकारात्मक के लगभग 42 प्रतिशत ने 25 प्रतिशत कर्मचारियों ने तथा 15 प्रतिशत विद्यार्थियों ने इसे दिए अनुदेशों के अनुसार भरा और रिकार्ड के लिए वापिस किया।³

सार्विकीय अनुसूचियों की रचना एक ऐसी बात है जो वास्तव में उन्हें बनाने और प्रयोग करने से अत्यन्त सतोषपूर्ण ढंग से सीखी जाती है। फिर भी कुछ चेतावनियाँ ऐसी हैं, जो सहायक हैं

3 दि कट्टीयूशन आफ रूजर्स—दि स्टेट यूनिवर्सिटी टु दि ईकानमि आफ दि सिटी आफ न्यू ब्रन्जविक ड्यूरिंग दि कलंडर ईयर 1959, दि न्यूयार्क ईकनॉमिक रिसर्च क्लब्स राज्य विश्वविद्यालय 25 अप्रैल, 1961 पृष्ठ 1—41 व्याप्त अप्रकाशित।

(क) स्पष्टता आवश्यक है—पूर्ण अनुसूची तथा प्रत्येक प्रश्न यथासंभव सरल और स्पष्ट होना चाहिए। यह बात विशेष रूप से ऐसी अनुसूचियों के बारे में सत्य है जो अपनी सुविधा के अनुसार भरी जाने के लिए व्यक्तियों को भेजी जानी है या उनके पास छोड़ी जानी है। एक अस्पष्ट प्रश्न या एक ऐसे प्रश्न से जो अस्पष्ट उत्तर को निमित्त करता है, अनुपयोगी आँकड़े प्राप्त होते हैं तथा समय और धन नष्ट होता है। एक समस्या ने एक अध्ययन करते समय लगभग सैकड़ों माना-पिताओं से प्रश्न किया “आपके बच्चे का जीवन संबंधी दृष्टिकोण उमरी की आयु में आपके दृष्टिकोण से व्यापक है या संकुचित?” स्पष्ट है अनुसंधानकर्ता उत्तर में “व्यापक” या “संकुचित” की अपेक्षा करता था। परन्तु वास्तव में प्राप्त उत्तर प्रायः “हाँ”, “नहीं”, “मुझे संदेह है”, और “मुझे ऐसी आशा है” थे—जिनमें से किसी का कोई अर्थ नहीं था। साथ ही, प्रश्न में इस प्रकार का शब्द प्रयोग है जिसमें इस तथ्य के लिए कोई गुंजाइश नहीं है कि कुटुम्ब में दो या इसमें अधिक बच्चे हो सकते हैं।

वैवाहिक स्थिति के सम्बन्ध में जानें जब “विवाहित या अविवाहित?” कहकर की जाए तो इस पर दो आपत्तियाँ हो सकती हैं (1) “हाँ” अथवा “नहीं” में प्राप्त होने वाला उत्तर अर्थहीन है, (2) सभी व्यक्ति इन दो श्रेणियों में नहीं आते। इस प्रश्न को पूछने का एक अच्छा ढंग हम प्रकार कहना है

पडताल कीजिए क्या

अविवाहित है

विवाहित है... ..

विधवा/विधुर है

विवाह-विच्छेदित है.....

वियोजित है.....

“अविवाहित” का अर्थ स्पष्ट करने के लिए कभी-कभी “कभी विवाह नहीं हुआ” यह पद प्रयुक्त किया जाता है।

अनुसंधानकर्ता को अपने प्रश्नों में केवल इस प्रकार के शब्द-प्रयोग से संतुष्ट नहीं होना चाहिए कि वे समझे जा सकते हैं, उसे उनकी इस प्रावधानों में रचना करनी चाहिए कि उनका समुद्ध अर्थ नहीं लगाया जा सकता।

(ख) सभी प्रश्नों का ठीक-ठीक उत्तर नहीं दिया जा सकता—कितना भी स्पष्ट प्रश्न क्यों न पूछा जाए, कुछ इस प्रकार के प्रश्न हैं जिनके उत्तर असंतोषजनक होने की संभावना है। कुछ जनगणनाओं में आयु के अलग-अलग वर्षों के अनुसार जनसंख्या के वितरण में कुछ विविध अनियमितताओं का पता चला है। 25 वर्ष की आयु से प्रारम्भ करके 70 वर्ष की आयु तक जाते हुए, 55 वर्ष की आयु को छोड़कर, 0 या 5 पर समाप्त होने वाली प्रत्येक आयु में व्यक्तिओं का निश्चित केन्द्रीकरण है। उदाहरणतया, जिनकी 25 वर्ष आयु बतलाई गई वे 24 या 26 वर्ष की आयु वालों से अधिक हैं। कुछ आयुओं पर जो 2 की गुणज हैं गोए केन्द्रीकरण भी रहे हैं, ये केन्द्रीकरण उम्र समय अधिक स्पष्ट है जब आयु के ये सम वर्ष 5 के गुणज के समीप नहीं हैं। इस प्रकार 28, 32, 38, 42, इत्यादि पर 62 तक केन्द्रीकरण है। इसके अतिरिक्त 21 वर्ष जिनकी आयु बतलाई गई ऐसे पुरुष बहुत अधिक प्रतीत होते हैं।

आयु का पूर्णान्न समुक्त राज्य अमरीका की जनगणना के लिए विलक्षण नहीं है : इसकी किसी भी ऐसी जाँच में अपेक्षा की जा सकती है जहाँ आयु, जन्म प्रमाणपत्रों या

जन्म-तिथि के किसी अन्य ठीक वृत्त से प्राप्त नहीं की गई। पूर्णोंको में आयु दिए जाने के कारण समझे जाने वाले कुछ कारक ये हैं (1) गणनाकार को किसी व्यक्ति के बारे में जानकारी आवश्यक तौर पर स्वयं उम्र व्यक्ति द्वारा नहीं दी जाती, प्रायः इसे देने वाला कोई सम्बन्धी, मित्र, मकान-मालिक या कोई अन्य व्यक्ति होता है और इन जापको में से कुछेक को सही जानकारी नहीं भी हो सकती। (2) जब जानबूझ कर आयु ठीक नहीं बताई जाती, जैसा कभी-कभी होता है, तो ऐसा विश्वास करना उचित है कि आयु का प्रायः पूर्णांकन किया जाता है। (3) कुछ व्यक्ति असावधान होते हैं या कभी-कभी व्यक्ति सदा पूर्णोंको में ही सोचता है। जनसंख्या के उन वर्गों में पूर्णांकन सबसे अधिक पाया जाता है जिनमें प्रशिक्षणों का अनुपात सबसे अधिक है। (4) कुछ व्यक्ति अपनी ठीक-ठीक आयु नहीं जानते। (5) गणनाकारों के द्वारा असावधानी हो सकती है। ठीक आयु बताने में कुछ सुधार आयु के स्थान पर या आयु के अतिरिक्त जन्म-तिथि पूछकर हो सकता है। परन्तु यह बात माननी चाहिए कि जब यथार्थ जानकारी का अभाव है, जैसा कि अपने किरायेदारों के लिए मकान मालकिन द्वारा दी गई जानकारी के बारे में है, तो अधिक यथार्थ प्रश्न पूछने से अधिक अच्छे आंकड़े प्राप्त नहीं होते। साथ ही इस अतिरिक्त प्रश्न पूछने में होने वाला व्यय परिशुद्धता में प्रत्याशित वृद्धि से अधिक हो सकता है। जब आयु का प्राथमिक महत्व होता है, जैसा कि बीमे के लिए प्रार्थना-पत्र देते समय, तब प्रायः जन्म-तिथि पूछी जाती है और उसकी लेख्य साक्ष्य से जांच की जा सकती है।

पूर्णोंको में सोचने का एक अन्य हथियार उदाहरण एक चलचित्रशाला द्वारा आयोजित प्रतियोगिता के सम्बन्ध में उत्पन्न हुआ। एक अनियमित आकार के काँच के मर्तबान को कानवेरियो में भरा गया और उन सरसकों के लिए छः पारितोषिक प्रस्तुत किए गए जो मर्तबान में कानवेरियो की सस्या का सर्वाधिक निकट अनुमान लगाएँ। 1,996 अनुमानों के विश्लेषण से पता चला कि 1,465 अनुमान ऐसे थे जो 0 या 5 पर समाप्त हुए।

(ग) कुछ प्रकार के प्रश्नों का परिहार करना चाहिए—जब अभियोजक न्यायवादी ने पत्नी के कथित पीटने वाले से पूछा, 'क्या तुमने अपनी पत्नी को पीटना बन्द कर दिया है?' तो उसने प्रतिवादी को यह मानने की स्थिति में डाल दिया कि उसने अपनी पत्नी को पीटा है, चाहे वह 'हाँ' में उत्तर दे या 'न' में। वैज्ञानिक खोज में इस प्रकार के संकेतक प्रश्नों का कर्नव्यनिष्ठा के साथ परिहार करना चाहिए। मदी के समय में किए गए बेरोजगारी के सर्वेक्षण में बेरोजगारी का कारण पूछने समय गणनाकार यदि यह कहे कि 'मेरा अनुमान है कि आप मदी के कारण बेरोजगार हैं?' तो वह उत्तर का मुभाव दे रहा होगा। इसके स्थान पर उसे पूछना चाहिए, 'क्या कारण है कि आप बेरोजगार हैं?'

इसी प्रकार, ऐसे प्रश्नों का परिहार किया जाना चाहिए जो अनुचित रूप से ध्यान-धीन करने वाले हैं, या धिक्काने वाले हैं। सामाजिक कार्यकर्ताओं के एक अध्ययन में प्रत्येक विवाहित स्त्री से यह पूछा गया कि क्या वह अपने पति के साथ रहती है या नहीं। पूछताछ अविश्वसनीय थी, रोप उत्पन्न करती थी और यदि जिनसे प्रश्न पूछे गए उनमें से प्रत्येक व्यक्ति द्वारा इसका उत्तर दिया जाता तो मुश्किल से ही इससे उपयोगी आंकड़े प्राप्त होते। व्यक्तिगत विषयो (जैसे आयु) से सम्बन्धित प्रश्न चतुराई से पूछने चाहिए—वदाचित् साक्षात्कार के अन्त के निकट जापको का सहयोग प्राप्त होने के बाद पूछे जाने चाहिए। कभी-कभी इस प्रकार का प्रश्न न पूछना अच्छा रहता है, परन्तु इस जानकारी से कि क्या घर में प्लेटें धोने वाली मशीन है, क्या घर अपना है और उसका अनुमानित मूल्य क्या है; व्यक्ति का

घधा, यदि कार है (या कारें हैं) तो उसका (या उनके) भेक, नियुक्त नौकर, यदि कोई हो, इत्यादि से सामान्य आय स्तर का अनुमान लगा लेना चाहिए। एक जनगणना में जनसंख्या के बीस प्रतिशत प्रतिदर्श के लिए आय की राशि पूछी गई और यद्यपि जनगणना के सब प्रश्नों के समान यह प्रश्न कानून के द्वारा अधिष्ठित था तो भी उन लोगों को, जो सीधे जनगणना कार्यालय को यह जानकारी भेजना पसन्द करते थे, एक विशेष गुप्त फार्म दिया गया जिस पर डाक टिकटें लगाने की आवश्यकता नहीं थी। एक सर्वेक्षण में जापको से पूछा गया आप अपने पास साधारणतः कितनी नकदी रखते हैं? आप घर में प्रायः कितनी नकदी रखते हैं? बहुत से लोगो द्वारा इस प्रकार के प्रश्नों का उत्तर देने से इन्कार कर देना प्रत्याशित है।

(घ) उत्तर वस्तुनिष्ठ एवं सारणीकरण के योग्य होने चाहिए—जब तथ्यपूर्ण अध्ययन किए जा रहे हों तो प्रश्न इस ढंग से करने चाहिए कि वस्तुनिष्ठ उत्तर प्राप्त हो। बिल्डिंग की दशा पूछने और गणनाकार को अपने शब्दों से दशा बताने की अनुज्ञा देने के स्थान पर संयुक्त राज्य अमरीका के व्यापार विभाग द्वारा किए गए एक अध्ययन में पूछा गया कि क्या बिल्डिंग अच्छी हालत में है या छोटी-मोटी मरम्मत चाहती है या इमारती मरम्मत चाहती है अथवा आवास के अयोग्य है। यद्यपि इन प्रश्नों के उत्तर पूर्णतया वस्तुनिष्ठ नहीं हैं तो भी कम से कम तुरन्त सारणीकरण के योग्य हैं।

(ङ) अनुदेश और परिभाषाएँ सक्षिप्त होनी चाहिए—गणनाकार और जापक को कभी भी इस सम्बन्ध में कोई सन्देह नहीं होना चाहिए कि क्या सूचना वांछित है और उनके लिए कितने शब्दों या इकाइयों का प्रयोग करना है। एक व्यक्ति के रोजगार के स्तर के बारे में पूछताछ करते समय पूछताछ का किसी निश्चित समय की ओर संकेत होना आवश्यक है। अतः जनगणना में गणनाकार के आने के पूर्व के सप्ताह के बारे में जानकारी माँगी गई।

यदि अशकानिक कमचारी की ठीक स्थिति के बारे में जानकारी वांछित है तो यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि वांछित उत्तर क्या होना चाहिए (1) घण्टे प्रतिदिन, (2) घण्टे (या दिन) प्रति सप्ताह, अथवा (3) सामान्य पूरा समय का भाग।

अध्ययन में प्रयुक्त इकाइयाँ गणनाकार और सूचनादाता दोनों को स्पष्टतः समझ में आनी चाहिए। यदि हम किसानों और फलोद्यानियों से सब के उत्पादन के आँकड़े इकट्ठे कर रहे हैं तो हमें इस बात का उल्लेख करना चाहिए कि हम आँकड़े बुझानों के रूप में चाहते हैं या फला के बक्कों के रूप में। यदि हम घरों में कमरों की संख्या के बारे में सूचना चाहते हैं तो यह बताया जाना चाहिए कि स्नान घरों, रमोई घरों, पाउडर-कक्षों, शृंगार कक्षों इत्यादि का कमरों के रूप में गिनना है अथवा नहीं।

(च) प्रश्नों की व्यवस्था सावधानी से आयोजित होनी चाहिए—सूचीपत्र पर न केवल प्रश्नों की ठीक ढंग से व्यवस्था होनी आवश्यक है ताकि उत्तर के लिए समुचित स्थान रहे बल्कि प्रश्नों का क्रम इस प्रकार का होना चाहिए ताकि प्रत्येक प्रश्न का क्रम से उत्तर देना सरल हो जाए। यदि किसी विचार का तर्कयुक्त प्रवाह आता है तो प्रश्नों की व्यवस्था में उसका अनुसरण होना चाहिए। प्रश्न एक प्रकरण में दूसरे प्रकरण पर आगे पीछे नहीं खिसकने चाहिए।

एक अनुसूची का प्रारूप बनाने के बाद वांछित ढंग यह है कि इसकी एक दल पर परीक्षा की जाए, इसकी कमियाँ ढूँढी जाएँ और तब परीक्षा के प्रकाश में इसे संशोधित किया जाए। यदि परीक्षा के लिए समय नहीं है तो कुछ योग्य अन्वेषकों को इसे पढ़ने और

इसमें मुधार के मुभाव देने के लिए कहा जाए। जब अनुसूची के अन्तिम प्रारूप का निश्चय हो चुके तो इसे भरने के लिए सावधानी से अनुदेश तैयार करने चाहिए। यदि अनुसूचियाँ डाक से शापको को भेजी जानी हैं तो ये अनुदेश यथासंभव स्पष्ट और सक्षिप्त होने चाहिए। यदि गणनाकारो का प्रयोग किया जाना है तो गणनाकारो को दिए जाने वाले अनुदेश पूर्ण होने चाहिए ताकि उनके कार्य में जितनी भी संभव स्थितियाँ उत्पन्न हों उन सबको समाहित किया जा सके।

3 प्रतिदर्श के प्ररूप का चयन करना—संयुक्त राज्य अमरीका की जनगणना संयुक्त राज्य के नागरिकों की पूर्ण गणना है। अर्थात् यह इतनी ही पूर्ण है जितना इसे पूर्ण करना संभव हो सकता है। हो सक्ता है कुछ लोग, जैसे अस्थायी मजदूर, न्याय से भागने वाले और अत्यन्त दूरस्थ स्थानों के निवासी, सम्मिलित न हो पाए हों, परन्तु आशय प्रत्येक को सम्मिलित करने का है और कोई भी जानबूझ कर नहीं छोड़ा गया। इसी प्रकार, कृषि की गणना में संयुक्त राज्य अमरीका के सब खेतों, तथा कुछ विशिष्ट क्रियाओं को, जिनमें पादपगृह, नर्मरियाँ, कुकटघर और मधु-वाटिकाएँ आती हैं, सम्मिलित किया जाता है।

कभी कभी पूर्ण गणन के स्थान पर आंशिक गणन का प्रयोग किया जाता है। यदाकदा केवल बड़ी इकाइयाँ सम्मिलित की जा सकती हैं। उदाहरणार्थ, विनिर्माणों की एक द्विवाचिक गणना में केवल उन संस्थापनों का समावेश किया गया जिनके वार्षिक उत्पादनों का मूल्य 5,000 डॉलर या इससे अधिक था। समाविष्ट संस्थापनों की संख्या की दृष्टि से गणन भ्रष्ट रहे, परन्तु विनिर्माणों में मजदूरों की कुल संख्या का तथा निर्मित वस्तुओं के कुल मूल्य का एक उँचा अनुपात सम्मिलित किया गया था। बाद में एक या अधिक व्यक्तियों को रोजगार देने वाले सब संस्थापनों को सम्मिलित किया गया। इसके भी उपरान्त विनिर्माणों का एक वार्षिक सर्वेक्षण प्रारम्भ किया गया, वार्षिक सर्वेक्षण में एक प्रतिदर्श का प्रयोग किया गया जो आगामी अनुच्छेदों में वर्णित ढंगों का सम्मिश्रण है।

एक सांख्यिकीय अध्ययन में पूर्ण या लगभग पूर्ण व्याप्ति की चेष्टा करना बहुत अधिक खर्चीला या बहुत अधिक समय लगाने वाला हो सकता है। साथ ही, मान्य परिणामों पर पहुँचने के लिए सारी या लगभग सारी समष्टि का गणन आवश्यक भी नहीं है। बड़ी समष्टि पर आधारित एक प्रतिदर्श का हम अध्ययन कर सकते हैं और यदि वह प्रतिदर्श समष्टि का पर्याप्त प्रतिनिधित्व करता है तो हम मान्य परिणामों पर पहुँचने के योग्य होना चाहिए। समष्टि से प्रतिदर्श चुनने के बहुत से तरीके हैं। इनमें से चाहे कोई भी लिया जाए यह स्मरण रखना आवश्यक है कि प्रमुख उद्देश्य है एक प्रतिनिधि प्रतिदर्श प्राप्त करना, अर्थात् वह प्रतिदर्श जिसमें सब कारक उभी अनुपात में हैं जिस अनुपात में समष्टि में हैं जिससे वह प्रतिदर्श लिया गया है। संक्षेप में यह समष्टि का कोई भी 2, 5, 10, या 20 प्रतिशत प्रतिदर्श सम्मिलित करने मात्र की बात नहीं है, परन्तु वह प्रतिदर्श इस प्रकार से चुनने की बात है कि वह यथासंभव अधिक से अधिक प्रतिनिधि हो।

(क) यादृच्छिक प्रतिदर्श—यदि प्रतिदर्श इस प्रकार से लिया जाए कि जिस समय एक मद चुनी जाती है तो समष्टि (या विश्व) में प्रत्येक मद के लिए जाने का समान अवसर हो तो उस प्रतिदर्श को यादृच्छिक प्रतिदर्श कहा जाता है। इन अवस्थाओं में मदों की एक विशिष्ट संख्या के प्रत्येक समुच्चय के चुने जाने की समान सम्भावना होगी। कभी-कभी इसे प्रभावित या सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श कहा जाता है ताकि इसका उन प्रतिदर्शों प्रविधियों से

भेद बताया जाए जो यादृच्छिक प्रतिदर्शों को अन्य आवश्यकताओं से मयुक्त करते हैं, उदाहरणतः विपरीत समष्टि का समुचित समाप्ति उपवर्गों में प्रारम्भिक विभाजन।

जब समष्टियाँ समाप्ति हैं तो जिस विशेषता में हमारी रुचि है उसके संवध में यादृच्छिक प्रतिदर्शों से सतोपजनक निष्कर्ष निकालने की आशा की जा सकती है। उदाहरण के लिए, यदि एक बड़े पात्र में हजारों सगमरमरों की समष्टि है, जिनमें $\frac{1}{3}$ सफेद, $\frac{1}{3}$ काले, और $\frac{1}{3}$ लाल हैं और यदि वे सगमरमर रंग के अतिरिक्त, आकार, रूप, घनता, और अन्य सब विशेषताओं में समरूप हैं तो हमारे पास समाप्ति सहायता है। यदि प्रत्येक बार सगमरमर को निकालने के समय पात्र को घुमाकर, या अन्य ढंग से, सगमरमरों को पूर्णरूपेण मिश्रित किया जा सके तो यादृच्छिकता प्राप्त करना अधिक कठिन नहीं है। संकेतित अवस्थाओं में इस बात की अधिक संभावना है कि सगमरमरों के प्रतिदर्श में तीनों रंग उसी अनुपात में दिखाई देंगे जिस अनुपात में वे समष्टि में विद्यमान हैं, न कि ये रंग किसी अन्य अनुपात में उपस्थित होंगे। इसका यह अर्थ नहीं कि प्रत्येक प्रतिदर्श में समष्टि में विद्यमान अनुपात दिखाई देगा, परन्तु यदि बहुत से प्रतिदर्श लिए जाएँ तो उनमें ऐसी प्रवृत्ति होगी। साथ ही, अधिक असाध्य कठिनाई से ही मिलेंगे।

ऊपर दिए गए उदाहरण में, यादृच्छिकता प्राप्त करना कठिन नहीं था। कल्पना कीजिए कि किसी समष्टि में चार भिन्न आकार के काबलों का समान अनुपात है और सभी एक ही पदार्थ से बने हुए हैं। ऐसी स्थिति में विभिन्न आकारों का यादृच्छिक प्रतिदर्श प्राप्त करने के लिए हमें एक पात्र में काबलों को मिश्रित करना सहायक नहीं होगा क्योंकि छोटे पदार्थों की अपेक्षाकृत प्रवृत्ति तह में जाने की होती है। सतोपजनक सम्मिश्रण संभवतः एक समतल सतह पर प्राप्त किया जा सके, परन्तु यहाँ इस दृष्टि से सावधान होना पड़ेगा कि बड़े काबलों को, क्योंकि वे अधिक प्रमुख हैं, ही न छोट लिया जाए। एक कुछ-कुछ ऐसी ही समस्या अनाज और कोयले के जहाज के प्रतिदर्श बनाने में आती है। अनाज में समा-गता का प्रभाव माना जाता है और अनाज में कई स्थानों पर खड़ी-मीठी दूध डालकर कभी-कभी प्रतिदर्श लिए जाते हैं। यह विधि परिच्छेद (घ) में वर्णित स्तरयुक्त प्रतिदर्श से मिलती-जुलती है।

कभी-कभी मदों को वास्तविक रूप से मिलाया नहीं जा सकता, तो भी यादृच्छिक प्रतिदर्श अभीष्ट होता है। सम्मिश्रण असंभव हो सकता है क्योंकि मदें भारी, प्रचल या भगुर हैं या क्योंकि वे घरेलू वस्तुएँ या अलग-अलग व्यक्ति हो सकते हैं। पुनश्च, सम्मिश्रण संभव हो सकता है, परन्तु यह संभव है कि यादृच्छिकता विश्वसनीय न हो, क्योंकि जो व्यक्ति सम्मिश्रित समष्टि में से मदों को छोटता है वह यादृच्छिक ढंग से मदों को न चुने। कभी-कभी यादृच्छिकता समष्टि में मदों के अंक लगाकर और यादृच्छिक अंकों की सारणी के संकेत द्वारा एक या अनेक प्रतिदर्श लेकर प्राप्त की जा सकती है। इसे "यांत्रिक यादृच्छिकता" कहा जा सकता है, यह पद सिको या पास्को के प्रयोग में भी लागू होता है।

जब पेंचों, कीलों, काबलों, इंटों, तार, या फंक्चरी के अन्य उत्पादों के प्रत्येक समूह में से प्रतिदर्श लिए जाते हैं तो वास्तविक रूप से सम्मिश्रण करना आवश्यक नहीं है, क्योंकि समय-समय पर उत्पादन-प्रवाह में से मदों को छोट जा सकता है। छोटने का ऐसा तरीका

4. उदाहरणार्थ, वार० ए० फिलर तथा एफ० गेटम स्टैटिस्टिकल टेबलज़ फ़ार बायनॉमिकल, ऐग्रीकल्चरल एण्ड मंडिकल रिसर्च, हैकनर पब्लिशिंग कम्पनी, न्यूयार्क, 1949, पृष्ठ 104—109 में दी गई मारणी।

ठीक प्रकार से यादृच्छिक नहीं है और वास्तव में इसमें पूर्वग्रह हो सकता है, यदि मदों के निर्माण में प्रयुक्त मशीन, साँचा, बरमा, आरा या अन्य साधन एक समूह के उत्पादन के बीच में घिसने या अममजित होने लगता है। उत्पादन प्रवाह में से मदों को छाँटना आगे वर्णित विधि से कुछ-कुछ मिलता है।

(ख) व्यवस्थित प्रतिदर्श—जब सूची या फाइल में से, उदाहरणार्थ, प्रत्येक दसवीं मद लेकर प्रतिदर्श प्राप्त किया जाता है, तब प्रतिदर्श व्यवस्थित होता है। प्रथम मद यादृच्छिक ढंग से छाँटनी चाहिए। इस प्रकार का प्रतिदर्श कभी-कभी नामों की वर्णक्रम सूची प्रयत्न वर्णक्रम, अनुक्रमांक या अन्य क्रम से फाइल में रखे गए कार्डों से लिया जाता है। एक जनसंख्या एक घरों की गणना के लिए प्रयुक्त अनुसूची में माँगी गई कुछ जनसंख्या संबंधी जानकारी सूची में लिखे गए केवल 20 प्रतिशत व्यक्तियों के संबंध में प्राप्त की गई। यह प्रतिदर्श प्राप्त करने के लिए अनुसूची में प्रत्येक पाँचवीं पंक्ति पर “प्रतिदर्श पंक्ति निम्न प्रश्न पूछिए” का लेबल लगाया गया। अनुसूची के पाँच फार्म छापे गए, प्रत्येक में प्रतिदर्श की पंक्तियों की व्यवस्था भिन्न थी।

यह महत्वपूर्ण बात है कि मूलभूत सूची, जिसमें से व्यवस्थित प्रतिदर्श चुना जाता है, वास्तव में वह समष्टि है जिसका अध्ययन करना वांछित है। 1936 के राष्ट्रपति के चुनाव की लिटररी डाइजेंट द्वारा ठीक-ठीक भविष्यवाणी करने में असफलता का कारण यह था कि इसका 23 लाख मतपत्रों से भी अधिक का ऊपर में व्यवस्थित दिखाई देने वाला प्रतिदर्श समुचित मूलभूत सूची में से नहीं चुना गया था। मतदाता, मोटर गाड़ियों के स्वामियों तथा टेलीफोन के ग्राहकों की सूचियों में से चुने गए थे। इन सूचियों में कम आय वाले वर्गों के पर्याप्त व्यक्ति सम्मिलित नहीं थे और यह बात आज की अपेक्षा 1936 के लिए और भी अधिक सत्य होगी। 1930 की मदी में न्यूडेलैंड नगर में बेरोजगारी के अध्ययन के लिए प्रतिदर्श लेने के लिए आघार-स्वरूप इसी प्रकार की अपूर्ण सूची का प्रयोग किया गया। प्रतिदर्श बिजली, गैस, तथा पानी के ग्राहकों में से चुना गया था। सूची में निर्धनतम कुटुंबों का समावेश नहीं था।

इस आशय का कोई सामान्य कथन प्रस्तुत नहीं किया जा सकता कि उसी प्रकार के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श की अपेक्षा व्यवस्थित प्रतिदर्श से अधिक विश्वस्त या कम विश्वस्त निष्कर्ष प्राप्त किए जा सकते हैं। वे स्थितियाँ, जिनमें व्यवस्थित प्रतिदर्श को यादृच्छिक प्रतिदर्श से अधिक पसन्द किया जाए या यादृच्छिक प्रतिदर्श को व्यवस्थित प्रतिदर्श से अधिक पसन्द किया जाए, इतनी अधिक पेचीदा हैं कि उनका यहाँ विवेचन नहीं किया जा सकता, परन्तु एक सावधानी का वर्णन कर देना चाहिए। मदों की सूची बनते समय प्रतिदर्श के बीच के अन्तरों (सूची में प्रत्येक पाँचवीं मद, प्रत्येक दसवीं मद) का किन्हीं लगातार बार-बार उत्पन्न होने वाली विशेषताओं से संपात नहीं होना चाहिए।⁵

5 उच्च अध्ययन के लिए देखिए एम० एन० मूर्ती, “सम रीसेन्ट एडवांसिस इन साम्पलिंग थ्योरी”, जर्नल ऑफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, सितम्बर 1963 पृष्ठ 735—755। तथा देखिये ए० एम० मूड एव एफ० ए० घेबिल, इन्ट्रोडक्शन टु दि थ्योरी ऑफ स्टैटिस्टिक्स, द्वितीय संस्करण, मैकग्रा हिल बुक कंपनी, न्यूयार्क, 1965, व्याप्त।

(ग) गुच्छ प्रतिदर्श—गुच्छ प्रतिदर्श का वर्णन प्रारम्भ करने से पूर्व प्रतिदर्शों इकाई पद का परिचय करा देना उपयोगी होगा। प्रतिदर्शों इकाई किसी प्रतिदर्श में मूलभूत सत्ता है और यह एक समरमर, एक काबला, एक व्यक्ति, एक विनिर्माण संस्था, एक खेत, एक परिवार, एक भौगोलिक क्षेत्र, इत्यादि कुछ भी हो सकती है। समरमर के मामले में इकाइयाँ सरल थीं और वे एक-दूसरी से केवल रंग की दृष्टि से भिन्न थीं। अन्य इकाइयाँ जटिल हो सकती हैं और वे एक-दूसरी में बहुत सी दृष्टियों से भिन्न हो सकती हैं। उदाहरणार्थ, विनिर्माण संस्थाएँ, उत्पादन के स्वरूप, निविष्ट पूँजी, कर्मचारियों की संख्या तथा अन्य अनेक दृष्टियों में भिन्न होती हैं। जब हमारी इकाइयाँ लोग हैं तो हम देखते हैं कि वे लिंग, आयु, जाति, धन्धा, रोजगार-स्तर, आर्थिक स्तर, धर्म, इत्यादि की दृष्टि से भिन्न होते हैं। उनमें जो बान समान हो सकती है, वह केवल यह है कि वे मनुष्य हैं और एक ही समुदाय में रहते हैं। जब प्रतिदर्श चुना जाता है तो ये अन्तर महत्वपूर्ण हैं और इनका ध्यान रखना आवश्यक है। प्रतिदर्शों इकाइयाँ जितनी अधिक असमान होगी, प्राति-निधिक प्रतिदर्श चुनने की समस्या उतनी ही अधिक कठिन होगी।

गुच्छ प्रतिदर्श को कभी-कभी क्षेत्र प्रतिदर्श कहा जाता है क्योंकि इसका प्रयोग प्रायः भौगोलिक आधार पर होता है। यह आवश्यक तौर पर इकाइयों के समूहों का यादृच्छिक चयन होना है। उदाहरण के लिए, भौगोलिक आधार पर हम एक नगर के ब्लॉक या महादेश समुक्त राज्य अमरीका की काउन्टी चुन सकते हैं। भौगोलिक उदाहरण-स्वरूप चार आकारों के काबले जिनका पहल वर्णन किया गया है, एक समतल सतह पर, जिसे समान आकार के वर्गों में बाँटा गया है फैलाए जा सकते हैं और वर्गों का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया जा सकता है। ध्यान, काउन्टियाँ या वर्गें गुच्छ⁶ है और प्रत्येक समूह के अन्तर्गत सब वर्तमान इकाइयाँ सम्मिलित की जा सकती हैं। बहुक्रम प्रतिदर्श में समूहों में से इकाइयों के प्रतिदर्शों या समूहों में से उपसमूहों के प्रतिदर्श (उदाहरणार्थ, गुच्छ में काउन्टियों में से नगर) या दोनों आते हैं। बहु-क्रम प्रतिदर्श में एक या अधिक पगों में दूसरे प्रकार के प्रतिदर्शों का भी समावेश हो सकता है।

(घ) स्तरित प्रतिदर्श—जब एक समष्टि के विपरीत होने का ज्ञान है और जब उस विपरीतता का अध्ययन की जाने वाली विषयता पर प्रभाव पड़ता है, तब उस समष्टि को स्तरों में विभाजित किया जा सकता है और प्रत्येक स्तर से इकाइयों के यादृच्छिक प्रतिदर्श लिए जा सकते हैं। भरियों के एक बक्सा की श्रेता को, जब वह उनकी सतह तथा ऊपरी सतह की परीक्षा करने के लिए उल्टी है, विपरीतता के अस्तित्व और इसी प्रकार स्तरों की पहचान होती है। प्रायः प्रत्येक स्तर में से चुनी गई इकाइयों की संख्या कुल संख्या में उस स्तर में इकाइयों की संख्या के अनुपात में होती है। स्तरित प्रतिदर्श का एक रुचिकर प्रयोग समुक्त राज्य अमरीका के युद्धनीतिक वमबारी सर्वेक्षण⁷ द्वारा बहुत वर्ष पूर्व किए गए जापानी मनोबल पर युद्धनीतिक वमबारी के प्रभावों के अध्ययन में किया गया। इस प्रतिदर्श के चुनाव में एक महत्वपूर्ण शर्त यह थी कि प्रत्येक प्रतिदर्श की सूचियों में दिए गए

6. कभी-कभी गुच्छों को 'प्रमुख प्रतिदर्शों इकाइयाँ और गुच्छों में सत्ता के 'प्राथमिक प्रतिदर्शों इकाइयाँ' कहा जाता है।

7. विवेचन के लिए देखिए हीमन, उपरिनिर्दिष्ट, पृष्ठ 158—159, व्याप्त।

व्यक्तियों का कोई प्रतिस्थापन नहीं कर सकते थे। घर पर न होने वाले या अन्य प्रकार से भ्रातृता से न मिलने वाले व्यक्तियों के लिए प्रतिस्थापन किसी भी प्रकार के प्रतिदर्श में त्रुटि का एक भयानक स्रोत है।

ध्यान रखिए कि स्तरित प्रतिदर्श का उस समय तक प्रयोग नहीं किया जा सकता जब तक कि समष्टि और उसके स्तरों के बारे में कुछ जानकारी प्राप्त नहीं है। एक अत्यन्त ही महत्व की बात जिमकी ओर प्रायः ध्यान नहीं दिया जाता यह है कि स्तर वे होने चाहिए जो अध्ययन किए जा रहे विषय से संबंधित हैं। यदि हम एक कॉलेज के पुरुष विद्यार्थियों के स्वास्थ्य का अध्ययन कर रहे हैं तो हम ऐसे स्तरों को स्वीकार कर सकते हैं, यथा वे विद्यार्थी जो घर पर रहते हैं या जो घर पर नहीं रहते, वे जो पूर्णतया, या अंशतः छात्राभिर्भर हैं या बिल्कुल भी छात्राभिर्भर नहीं हैं, वे जो नियमपूर्वक व्यायाम करते हैं या नहीं करते; वे जो धूम्रपान करते हैं या नहीं करते, इत्यादि। परन्तु ऐसे अन्य स्तर हैं जिनका स्पष्ट ही इस समस्या पर कोई प्रभाव नहीं। एक सीमान्त उदाहरण लीजिए, हम ऐसे स्तरों में वे भी मान्य कर सकते हैं जो आदत से ही टोपियाँ या टोप पहनते हैं, जो एक या दोहरे ब्रैस्ट के कोट पसन्द करते हैं या कोई भी अन्य श्रेणियाँ जिनका स्वास्थ्य से संबंध नहीं। दूसरा महत्वपूर्ण विचार यह है कि स्तरित प्रतिदर्श सबसे अधिक लाभदायक उस समय होने है जब स्तर एक-दूसरे से इतने अधिक भिन्न हैं जितना कि समष्टि से संभव है, परन्तु प्रत्येक स्तर के भीतर एकरूपता होनी चाहिए।

बहुत सी सार्वजनिक राय तथा मण्डी अनुसंधान संस्थाएँ स्तरित प्रतिदर्श के सिद्धान्त का प्रयोग करती हैं। कभी-कभी गणनाकारों को नगर के एक विशिष्ट खण्ड (एक भौगोलिक स्तर) में काम करने और यादृच्छिक ढंग से चुने गए लोगों की एक विशिष्ट संख्या से बान करने के लिए कहा जा सकता है। प्रायः चयन यादृच्छिक नहीं होता क्योंकि इसमें वे लोग आते हैं, जो घर पर होने दें वे जो साक्षात्कार के लिए तैयार हैं और वे जो देखने से ही ऐसे प्रतीत होते हैं कि वे बात करने के लिए तैयार हो जाएँगे।

एक असमाप्ति समष्टि के लिए, एक उचित ढंग से स्तरित प्रतिदर्श से उनी आकार के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श की अपेक्षा अधिक विश्वस्त⁸ निष्कर्ष निकलने की आशा हो सकती है। इनसे यह परिणाम निकलता है कि वही विश्वस्तता एक छोटे स्तरित प्रतिदर्श से प्राप्त की जा सकती है। इसमें कुछ खतरा भी है कि अन्वेषक स्तरित प्रतिदर्श में अत्यधिक सुरक्षा का अनुभव करने के कारण बहुत छोटे प्रतिदर्शों का प्रयोग कर लें जो सांख्यिकीय आधार पर विश्वस्त निष्कर्ष प्राप्त नहीं करा सकते। इसके विपरीत, विधि तथा विश्वस्तता सूत्रों का बुद्धिमानी से प्रयोग करके इससे बचाव किया जा सकता है। यद्यपि

8 इस पुस्तक में हम केवल यादृच्छिक प्रतिदर्शों के लिए (अध्याय 24, 25 और 26 में) त्रुटि सूत्रों का विचार करेंगे। अधिक जटिल विधियों से प्राप्त प्रतिदर्शों का मूल्यांकन करने के लिए यादृच्छिक प्रतिदर्शों के व्यवहार की समझ एक आवश्यक आधार है। त्रुटि मूल सांख्यिकीय अनुमान, प्रतिदर्शों की त्रुटियों, तथा प्रतिदर्श सर्वेक्षण विधियों की बहुत सी पुस्तकों में मिल सकते हैं। और अधिक उच्च त्रुटियों के लिए देखिए डब्ल्यू. ए. एरिक्सन, "आप्टिमम स्टैंडिफाइड साम्पलिंग यूजिंग प्रायर इन्फरमेशन, जर्नल ऑफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, सितम्बर 1965, पृष्ठ 750—771, तथा डी. सिंह एव भी. डी. सिंह, "इवल साम्पलिंग फार स्टैंडिफिकेशन वान सससेसिव आर्केयस," तत्रैव, पृष्ठ 784—792।

उचित स्तरण और प्रतिदर्श का आकार दोनों महत्वपूर्ण हैं, तथापि, एक बड़ा प्रतिदर्श घटिया स्तरण की कमी को पूरा नहीं कर सकता। हाँ, एक समाप्ति समष्टि से लिया गया स्तरित प्रतिदर्श उसी आकार के यादृच्छिक प्रतिदर्श की अपेक्षा अधिक विश्वस्त नहीं होता।

(ड) अनुक्रमिक प्रतिदर्श⁹—अनुक्रमिक प्रतिदर्श का कच्चे पदार्थ या निमित्त माल से संबंधित गुण नियंत्रण योजनाओं के संबंध में बहुत विस्तृत रूप में प्रयोग किया गया है, परन्तु धीरे-धीरे इसके अन्य प्रयोग¹⁰ बढ़ रहे हैं। इसमें अपेक्षाकृत कम सत्या में मदों का परीक्षण आता है जिसका परिणाम उस ढेर को स्वीकार या अस्वीकार करने के निर्णय में निकल सकता है जिसमें से प्रतिदर्श प्राप्त हुआ था। यदि प्रथम प्रतिदर्श से कोई स्पष्ट निर्णय नहीं निकलता तो इसे उस समय तक बढ़ाया जाता है (सम्भवतः एक समय में एक मद) जब तक कि निर्णय हो सके।

(व) प्रतिदर्शों के अन्य प्रारूप—पूर्व-वर्णित पाँच प्रकार के प्रतिदर्शों को कभी-कभी “प्रायिकता प्रतिदर्श” कहा जाता है क्योंकि यह प्रायिकता कि एक अनुक्रमिक प्रतिदर्श में सम्मिलित किया जाएगा निश्चिन्त रूप में जानना संभव है। पहले वर्णन की गई प्रतिदर्शों की योजनाओं से भिन्न अन्य योजनाएँ भी हैं। वे वाछनीय प्रक्रियाएँ नहीं समझी जाती क्योंकि उनमें व्यक्तिनिष्ठ कारक आते हैं, अथवा उनकी विश्वस्तता सन्तोषजनक ढंग से निश्चिन्त रूप से नहीं जानी जा सकती, या दोनों बातें हो सकती हैं। इनमें आते हैं : (1) सोद्देश्य प्रतिदर्श—जिसमें कुछ विशेषताओं के बारे में प्रतिदर्श समष्टि के अनुकूल बनाया जाता है—उदाहरण के लिए, औसत आय एवं परिवार का आकार, (2) यथाशक्ति प्रतिदर्श,¹¹ जिसमें एक निश्चित क्षेत्र में काम करने वाले भेंटकर्ताओं को कुछ विशेषताओं वाले व्यक्तियों से बात करने का अनुदेश दिया जाता है (यदि भेंटकर्ताओं को 10 देशज गोरे पुरुषों, 4 हल्की पुरुषों और 3 विदेशज पुरुषों से बात करने के लिए कहा गया है तो इस बात की अधिक संभावना है कि जिन विदेशजों में भेंट की जाएगी वे ऐसे लोग होंगे जो पर्याप्त अच्छी अंग्रेजी बोल सकें हैं ताकि उनसे सन्तोषजनक ढंग से बातचीत की जा सके। इससे अधिकतर अध्ययनों में पूर्वग्रह आ जाएगा क्योंकि वास्तव में अध्ययन की गई समष्टि वह समष्टि नहीं होगी जिसका अध्ययन अभिप्रेत था, (3) यादृच्छिक बिन्दु प्रतिदर्श

9. अनुक्रमिक विवेक्षण को एक पूर्ण व्याख्या प्रारम्भकर्ता अब्राहम बाल्ट की पुस्तक *सीक्वेन्सल अनैलिसिस*, जॉन विली एंड सन्स, न्यूयार्क, 1947 में दी गई है। वाणिज्यिक अनुसंधान में अनुक्रमिक प्रतिदर्शों के अनेक अनुप्रयोग वाशर अनुसंधान का वर्णन करने वाली अनेक प्राथमिक पुस्तकों में मिली हैं।

10. देखिए एफ० जे० एम्कोम्ब, “मीक्वेन्सल मेडिकल ट्रायल”, जर्नल ऑफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, जून 1963, पृष्ठ 365—383, तथा पी० अमिटेव, “सम कनेट्स आन एम्कोम्ब्स पैपर”, तर्जुम, पृष्ठ 384—387। साथ ही देखिए मूड तथा वेबिल, उपरिवर्णित पृष्ठ 383—402।

11. यथाशक्ति प्रतिदर्शों का एक अच्छा यद्यपि पुराना विवरण एफ० सीसटेंसर तथा अन्यो की पुस्तक *दि प्रिन्सिपल ऑफ़ सोशल साइंस रिसर्च काउन्सिल*, न्यूयार्क, 1949, पृष्ठ 83—91 तथा 94—96 में मिल सकता है। यथाशक्ति प्रतिदर्शों के प्रयोग के खतरे की वृष्टि 95 पर अच्छी प्रकार सोदाहरण व्याख्या की गई है।

जिसमें एक मानचित्र में यादृच्छिक ढंग से बहुत से बिन्दुओं का पता लगाना होता है और प्रत्येक बिन्दु के निकटतम प्रतिदर्श की इकाइयों की पूर्वनिश्चित संख्या का गणन करना होता है। (यह तरीका कभी-कभी खेतों के प्रतिदर्श बनाने के लिए प्रयोग में लाया जाता है, परन्तु इसके प्रयोग से छोटे फार्मों की अपेक्षा बड़े फार्मों के समाविष्ट किए जाने की अधिक संभावना है।)

किस प्रतिचयन योजना का प्रयोग करना है, यह निर्णय करते समय अन्वेषक की योजना की कार्यक्षमता पर अवश्य विचार करना चाहिए। यह टिप्पणी पहले ही की जा चुकी है कि एक स्तरित प्रतिदर्श से उसी आकार के यादृच्छिक प्रतिदर्श की अपेक्षा अधिक विश्वस्त निष्कर्ष निकलते हैं (अर्थात् इसमें प्रतिदर्श की त्रुटि कम है)। गुच्छ प्रतिदर्श में यादृच्छिक प्रतिदर्श की अपेक्षा उसी आकार के प्रतिदर्शों के लिए कम विश्वस्त निष्कर्ष निकलने की आशा हो सकती है। किसी प्रतिदर्श की योजना की कार्यक्षमता का संकेत इकाई लागत के संबंध में विश्वस्तता की ओर होना है। अतः एक भौगोलिक गुच्छ प्रतिदर्श की, उदाहरण के लिए एक बड़े राज्य में 20 स्थलों पर, इकाइयों के समूहों के साथ प्रति प्रतिदर्श की इकाई की लागत राज्य भर में इधर-उधर बितरी हुई इकाइयों के साथ उसी आकार के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श की प्रति प्रतिदर्श की इकाई की लागत की अपेक्षा कम हो सकती है। इकाई लागत में अन्तर इतना अधिक हो सकता है कि गुच्छ प्रतिदर्श यादृच्छिक प्रतिदर्श की अपेक्षा पर्याप्त बड़ा किया जा सके जिससे उतना ही खर्च करके यादृच्छिक प्रतिदर्श से प्राप्त हो सकने वाले निष्कर्षों को अपेक्षा गुच्छ प्रतिदर्श से अधिक विश्वस्त निष्कर्ष निकलेंगे।

पूर्व-विवेचित विधियों के मम्मिश्रण के प्रयोग से प्रतिदर्श का चयन किया जा सकता है। सार्वजनिक राय की अमरीकन संस्था¹² द्वारा अपनाया गया ढंग निम्न है।

सार्वजनिक राय की अमरीकन संस्था के राष्ट्रीय सर्वेक्षण का स्थायी प्रतिदर्श वयस्क जनसंख्या का प्रतिदर्श है। स्थायी प्रतिदर्श में से मगदाता जनसंख्या के सन्निकट मान का प्रतिदर्श, जबकि ऐसा प्रतिदर्श अभीष्ट है, चुनने की व्यवस्था की गई है। डिजाइन में सात क्षेत्रों (राज्यों के समूहों) के हिस्से से स्तरण की व्यवस्था है और प्रत्येक क्षेत्र में भौगोलिक वितरण के हिस्से से स्तरण, तीन ग्राम-शहर स्तर, जनगणना आर्थिक क्षेत्र और अन्तिम तौर पर चुने हुए इलाके के आकार की व्यवस्था है। आकार के अनुपात में चुनने की प्रायिकता के साथ यादृच्छिक प्रारंभ से प्रत्येक स्तर के अन्दर इलाकों का एक व्यवस्थित प्रतिदर्श लिया गया था। बड़े शहरी समुदायों के भीतर प्रतिदर्श की इकाइयों¹³ (खण्डों के छोटे गुच्छ) आकार के अनुपात में प्रायिकता के साथ यादृच्छिक ढंग से ली गई। छोटे समुदायों और ग्रामीण क्षेत्रों में प्रतिदर्श के क्षेत्र समान प्रायिकता के साथ लिए गए।

भेदकर्ताओं को चुने हुए क्षेत्र दे दिए जाते हैं और उन्हें ऐसे क्षेत्रों की सीमाओं के अन्दर कार्य करना होता है। प्रत्येक राष्ट्रीय सर्वेक्षण में लगभग 150

12. अमेरिकन इस्टीमेट बाफ पब्लिक ओपीनियन के निदेशक डॉ॰ जार्ज॰ एच॰ गैरर से पत्र व्यवहार द्वारा।

13. स्पष्ट ही ये "प्रमुख प्रतिदर्श इकाइयाँ" हैं। पाद-टिप्पणी 6 देखिए।

प्रतिचयन बिन्दुओं का प्रयोग किया जाता है और प्रत्येक बिन्दु के साथ समान सत्या म साक्षात्कार होते हैं। 1,000 से अधिक भेंटकर्ता कर्मचारी रखे जाते हैं।

कभी-कभी न्यूनाधिक यादृच्छिक ढंग से प्रतिदर्श लिया जाता है। अथवा, अन्वेषक ऐसे आंकड़ों का समावेश कर सकता है जो सुविधाजनक और शीघ्र प्राप्य हों जिसके द्वारा वह विश्वास से घोषणा करेगा कि इस प्रकार लिया हुआ प्रतिदर्श निस्संदेह उस समष्टि का प्रातिनिधिक है जिसका कि वह अध्ययन कर रहा है। उदाहरण के लिए एक अन्वेषक, जिसने यह पता किया कि हाई स्कूल में प्रवेश लेने योग्य 25,00,000 से कुछ कम बच्चों ने प्रवेश नहीं लिया, यह अनुमान लगाना चाहता था कि इन 25,00,000 में से कितने ने आर्थिक दबाव के कारण स्कूल छोड़ा। विद्यार्थियों ने स्कूल क्यों छोड़ा इसके कारणों से संबंधित 16 स्वीकार्य अध्ययनों के मध्य में उमने पता लगा लिया। इन अध्ययनों में से प्रत्येक में 53 में लेकर 274 बच्चों तक तथा कुल मिलाकर 2,525 बच्चे आते थे। अध्ययन 13 विभिन्न राज्यों के स्कूलों में किए गए। एक अध्ययन तीनों बच्चों का किया गया। न्यूयार्क, मसाचुसेट्स, इलीनोइस, मिजीगन, विस्कॉसिन, टेक्सास और कुछ अन्य अधिक जनसंख्या वाले राज्यों से कोई आंकड़े नहीं लिए गए। फिर भी क्योंकि भौगोलिक वितरण विविध था और क्योंकि बड़े नगर, छोटे नगर और ग्राम के बच्चों का समावेश किया गया था अतः अन्वेषक ने निष्कर्ष निकाला "समस्त समूह के अनुमान का आधार बनने के लिए प्रतिदर्श समष्टि के विभिन्न तत्वों का पर्याप्त मात्रा में प्रतिनिधि प्रतिष्ठ होता है।" यह सत्य रहा हो या न रहा हो। प्रतिदर्श न तो यादृच्छिक था, न स्तरित अथवा व्यवस्थित था, और न ही गुच्छ, इसमें केवल जो उपलब्ध था उसका ही समावेश था।

जैसा कि अध्याय 24, 25, और 26 में दिखाया जाएगा, यादृच्छिक प्रतिदर्शों के लिए, प्रतिदर्श जितना बड़ा होगा, उससे निकले निष्कर्षों पर हम उतना ही अधिक विश्वास कर सकते हैं। यह भी दिखाया जाएगा कि समष्टि में जितनी अधिक विविधता है, हम उसी प्रकार के प्रतिदर्शों पर उतना ही कम विश्वास कर सकते हैं। हाँ, केवल प्रकार से ही प्रतिदर्श का प्रतिनिधि होना निश्चित नहीं हो जाता। एक बड़े परन्तु बुरे ढंग से चुने हुए प्रतिदर्श की अपेक्षा एक छोटा यादृच्छिक या स्तरित प्रतिदर्श अधिक अच्छा हो सकता है। कभी-कभी स्थिरता की परख से यह निर्धारित किया जाना है कि प्रतिदर्श कब पर्याप्त बड़ा है। उदाहरणार्थ, मतदाताओं के एक दल में से 1,000 का एक प्रतिदर्श चुना जा सकता है और प्रतिदर्श के 57.3 प्रतिशत से यह सकेत मिल सकता है कि वे एक विशिष्ट प्रत्याशी को वोट देना चाहते हैं। 1,000 अन्य व्यक्ति चुने जा सकते हैं और दोनों दलों से मिलकर 56.9 प्रतिशत दिखाई दे सकने हैं। अन्य 1,000 जोड़ने से प्रतिशतता बदल कर 56.8 हो सकती है और अन्य 1,000 (कुल 4,000) से अनुपात 56.8 पर अपरिवर्तित रह सकता है। इस परीक्षण से यह प्रतीत होगा कि प्रकार के दृष्टिकोण से 3,000 या 4,000 पर्याप्त प्रतिदर्श हैं। परन्तु स्थिरता की परख केवल स्थिरता का परीक्षण करती है, प्रतिनिधित्व का नहीं। इस तथ्य का कि प्रतिशत आवश्यक तौर पर अपरिवर्तित रहता है केवल यह अर्थ है कि हमें बराबर पहले वाला ही निष्कर्ष प्राप्त हो रहा है। कल्पना की जा सकती है कि 1,000 का प्रथम प्रतिदर्श निश्चित तौर पर अप्रातिनिधिक रहा होगा (जैसे, मतदाता जनसंख्या के केवल अपेक्षाकृत गरीब वर्गों में से) और प्रत्येक अगला प्रतिदर्श इसी प्रकार अप्रातिनिधिक रहा होगा।

प्रतिदर्श में पूर्वग्रह के विद्यमान होने की संभावना का पहले ही वर्णन किया जा चुका है। जब प्रतिदर्श का चयन किया जा रहा है उस समय यह आवश्यक है कि पूर्वग्रह को दूर रखा जाए। पूर्वग्रह का अर्थ अन्वेषक का व्यक्तिगत पूर्वग्रह नहीं है जिससे वह अपना प्रतिदर्श जानबूझ कर इस प्रकार चुनता हो कि वह अपने वांछित परिणाम दिखा सके। वह बौद्धिक वेईमानी है। इसका यह भी अर्थ नहीं कि अनुसूची के प्रश्नों का उत्तर देने वाले व्यक्तियों में पूर्वग्रह है। पूर्वग्रह के परिहार का तात्पर्य है—प्रथम, कि प्रतिदर्श लेते समय कोई चयनात्मक कारक विद्यमान न हो तथा, दूसरे यह कि उस समय कोई चयनात्मक कारक विद्यमान न हो जब प्रतिदर्श में सम्मिलित किए गए व्यक्तियों के पास से अनुसूचियाँ वापिस आईं। लिटरेरी डाइजेस्ट 1936 की प्रारम्भिक राय के मामले में एक चयनात्मक कारक विद्यमान था क्योंकि उन मूलभूत सूचियों में जिनमें से प्रतिदर्श चुना गया था जनसंख्या के निम्न आर्थिक स्तरों का समावेश नहीं था। कभी-कभी मूलभूत सूची पूर्ण हो सकती है, परन्तु प्रतिदर्श चुनने के ढंग से पूर्वग्रह उत्पन्न हो सकता है। इस प्रकार, कौटुम्बिक नामों के अक्षरक्रम से वितरण में राष्ट्रीयता के अन्तरों के कारण नामों की अक्षर-क्रम से बनी सूची में से चुनना असन्तोषजनक हो सकता है। यदि सूची के भाग चुने जाते हैं तो इस प्रकार का पूर्वग्रह उत्पन्न हो सकता है; यदि (उदाहरण के लिए) प्रत्येक दसवाँ नाम लिया जाए तो इसकी संभावना नहीं होगी।

यदि डाक द्वारा प्रश्नावली भेज कर सूचना इकट्ठा करने का ढंग प्रयोग में लाया जाए तो दूसरे प्रकार का चयनात्मक कारक प्रायः सामने आता है। जब अनुसूचियाँ डाक से भेजी जाती हैं तो अन्वेषक को कभी यह आशा नहीं होती कि सब की सब वापिस आएँगी, क्योंकि परिप्रश्नों के केवल एक भाग का ही उत्तर आता है तो वह यह निश्चय कैसे कर सकता है कि जिन्होंने उत्तर दिया वे उन सभी के प्रतिनिधि हैं जिन्हें अनुसूचियाँ भेजी गई थीं? प्रायः वह इस सन्देह में निश्चय नहीं कर सकता, कभी-कभी यह स्पष्ट होता है कि वे प्रतिनिधि नहीं हैं। एक छात्र संस्था ने स्नातकों को 363 परिप्रश्न भेजे और प्रत्येक से यह पूछा कि वह अपनी पहले वर्ष की आय की (गुप्त रूप से) रिपोर्ट दे। 133 से उत्तर प्राप्त हुए। यह बिल्कुल संभव है कि इन उत्तरों में चयनात्मक कारक विद्यमान हो। उन छात्रों ने जिनके पास काम नहीं था या जिनकी आय बहुत कम थी संभवतः उत्तर नहीं दिया। यह कल्पना आँकड़ों पर आधारित है जिनसे 1,500 डालर से कम आय के लगभग पूर्ण अभाव का पता लगा, यद्यपि अध्ययन एक महीने के वर्ष में किया गया था। स्पष्ट ही पूर्वग्रह-अस्त प्रतिदर्शों पर आधारित निष्कर्ष न केवल व्यर्थ हैं बल्कि भ्रामक भी होते हैं।

4 जानकारी प्राप्त करने के लिए अनुसूचियों का प्रयोग—जब एजेंट या गणनाकार उन व्यक्तियों के पास, जिन्होंने जानकारी देनी होती है, अनुसूचियाँ ले जाते हैं तो गणनाकार खोज के अभिप्राय की व्याख्या और सहयोग की प्रार्थना कर सकते हैं। पूछने समय प्रत्येक प्रश्न की स्पष्ट रूप से व्याख्या की जा सकती है। स्पष्ट है कि गणनाकारों को अपना काम प्रारम्भ करने से पूर्व ध्यानपूर्वक अनुदेश देना आवश्यक है। कभी-कभी उन्हें अनुसूची और मुद्रित अनुदेशों का अध्ययन करके परीक्षा देनी होती है। गणनाकार प्रश्नातीत सत्यनिष्ठा वाले व्यक्ति तथा धैर्यशील, नम्र और चतुर भी होने चाहियें। बहुत से व्यक्ति सांख्यिकीय (या अन्य) जानकारी देने के रुझान से रुष्ट होते हैं, बहुत से हिचकिचाहट करते हैं, कुछ इन्कार कर देते हैं। गणनाकार को अपनी भेट की इस प्रकार

योजना करनी चाहिए कि यथा-संभव कम समय लगे और यदि संभव हो तो वांछित जानकारी प्राप्त करने की प्रत्येक चेष्टा करनी चाहिए। यदि गणनाकार पहुँचने से पूर्व व्याख्या का पत्र पहुँच जाता है, तो कई बार उसका कार्य आसान हो सकता है। कभी कभी गणनाकार साक्षात्कार कर लेते हैं और अनुसूचियों बाद में भरते हैं। यह इस सिद्धान्त के आधार पर किया जाता है कि यदि उस समय टिप्पणियाँ नहीं लिखी जाती तो लोग बात करने में अधिक स्वतंत्रता अनुभव करते हैं। परन्तु यह विश्वास किया जाता है कि यह एक अवांछनीय ढंग है, विशेष तौर पर उम्र समय जबकि बहुत से तथ्य स्मरण रखने और बाद में लिखने हों। गणनाकारों को प्रत्यक्ष-पत्र साथ रखने चाहिए ताकि जिन व्यक्तियों के पास जाएँ वे अपने बालों के पदीय सम्बन्ध के बारे में सन्तुष्ट हो सकें। यद्यपि गणनाकार जितना अधिक संभव होता है उतनी चतुराई से जानकारी प्राप्त करने की प्रार्थना करता है, तथापि कभी कभी उसे उत्तरदाना उत्तर देने में इन्कार कर सकता है। प्रायः एक ग्रन्थ मुलाकाती एक अलग प्रकार के ढंग से अधिक सफल हो सकता है। कभी कभी एक विशेष रूप से योग्य कार्यकर्ता द्वारा अधिक कठिन मामलों का अनुपरीक्षण करना एक अच्छी योजना है। यदा कदा गणनाकार का एक ऐसे व्यक्ति में सामना हो सकता है जो सहयोग देना नहीं चाहता और जो अध्ययन के सम्बन्ध में विस्तार से बात करना चाहता है। ऐसी स्थिति में अच्छी अप्रत्यक्ष सुविधाएँ परिसम्पत्ति होती हैं।

गणनाकारों का प्रयोग करने की अपेक्षा डाक से अनुसूचियाँ भेजना, सर्वप्रथम, आँकडे एकत्र करने का कम खर्चीला ढंग है। इसमें एक अतिरिक्त लाभ यह भी है कि जानकारी देने वाला व्यक्ति संभवतः व्यस्त या अनुविधाजनक समय में गणनाकार ढाँगा प्राप्त होने की बजाय अपनी सुविधा के अनुसार फार्म भर सकता है। साथ ही डाक द्वारा भेजी गई प्रश्नावली में (हाँ बशर्ते कि जापक को यह विश्वास हो कि उसकी पहचान गुप्त है) ऐसी गुप्त सूचना दी जा सकती है जो कि जापक गणनाकार को बताने में हिचकिचाएगा। दूसरी ओर, एक बड़े अनुपात में व्यक्ति डाक द्वारा भेजे गए परिप्रश्नों का उत्तर नहीं देते और बहुत सा अनुपरीक्षण कार्य आवश्यक हो सकता है। यह भी बड़ा खतरा है कि जापक प्रश्न को न समझे अथवा जानबूझ कर या अ-व्यथा अशुद्ध उत्तर दे। अतः अनुसूची के साथ न केवल स्पष्ट संक्षिप्त निर्देश भेजना आवश्यक है बल्कि जाँच के उद्देश्य की व्याख्या और सहयोग की प्रार्थना करने के लिए एक संक्षिप्त पत्र भी भेजना चाहिए। एक साधारण उपहार द्वारा (जैसे कि कटिस पब्लिशिंग कम्पनी द्वारा भेजा गया मिक्का) एक अधिक अनुपात में उत्तरों को सुनिश्चित किया जा सकता है। किसी भी स्थिति में पता लिखा हुआ और टिकटें लगा हुआ (अथवा व्यवसाय-उत्तर) लिफाफा भेजना चाहिए। यदा-कदा गणनाकारों द्वारा एक हवाई डाक व्यवसाय-उत्तर लिफाफा इस आशा से प्रयोग किया जाता है कि इसके परिणाम, स्वरूप अधिक और शीघ्र उत्तर प्राप्त होंगे। जब अनुपरीक्षण कार्य आवश्यक हो तो जिन व्यक्तियों ने अपने फार्म वापिस नहीं भेजे उन्हें परिप्रश्न का स्मरण कराने और पुनः सहयोग की प्रार्थना करने के लिए व्यक्तिगत विनम्र पत्र लिखे जाएँ। जब उचित हो, हवाई डाक-पत्रों, विशेष वितरण पत्रों, रजिस्टर्ड पत्र (यह निश्चित करने के लिए कि पत्र वितरित हुआ है), तारों या टेलिफोन पर बातचीत द्वारा अनुपरीक्षण कार्य किया जाए। हाँ, अन्वेषक को ऐसा कार्य नहीं करना चाहिए जिससे वह बनावट लगने लगे, उसे अधिक आग्रह नहीं करना चाहिए। जब अनुसूचियों में से केवल कुछ ही अन्तिम तौर पर प्राप्त हुई हो तो स्थिति का ध्यानपूर्वक परीक्षण करना आवश्यक है ताकि यह निश्चय किया जाए

कि कोई चयनात्मक कारक विद्यमान नहीं रहा। अथवा, यदि किसी चयनात्मक कारक की उपस्थिति प्रतीत होती हो तो स्थिति के उपचार के लिए एक अनुपूरक अन्वेषण करना आवश्यक हो सकता है।

5 अनुसूचियों का सम्पादन करना—भरी हुई अनुसूचियाँ प्राप्त होने के उपरान्त आंकड़े सारणीकरण के लिए ठीक रूप में करने के लिए कुछ मात्रा में प्रारम्भिक कार्य आवश्यक होता है। सम्पादकीय कार्य विविध हैं। किसी छोट अध्ययन की स्थिति में एक सम्पादक पूर्ण कार्य कर सकता है। बड़े अध्ययन में, सम्पादन की भिन्न अवस्थाएँ कई सम्पादकों में बाँटी जा सकती हैं।

(क) परिकलन—यह प्रायः अधिक अच्छा है कि गणनाकारो या जानकारी देने वाले व्यक्तियों को कोई परिकलन करने के लिए न कहा जाए। इस प्रकार यदि घर में कमरों की संख्या और परिवार में सदस्यों की संख्या के संबंध में जानकारी प्राप्त की गई है तो भीड़ का कुछ प्रत्यय देने के लिए सम्पादक प्रति कमरा व्यक्तियों के अनुपात का परिकलन कर सकता है। यदि असतिपूरित दुर्घटनाओं के द्वारा समय के नाश और कई एक कर्मचारियों में से प्रत्येक की दैनिक मजदूरी के संबंध में आंकड़े इकट्ठे किए गए हैं तो सम्पादक प्रत्येक मामले में दुर्घटनाओं के कारण नष्ट हुई आय का परिकलन कर सकता है।

(ख) सकेतीकरण—सारणीकरण में प्रायः सकेतीकरण से सुविधा हो जाती है। जब मशीन के द्वारा सारणीकरण (जिम पर थोड़ा आगे विवेचन किया जाएगा) प्रयोग में आता है तो अनुसूची में सब प्रविष्टियाँ केवल सख्यात्मक सकेत के रूप में होय रह जाती हैं। यदि सारणीकरण शारीरिक हो तो भी मौलिक प्रविष्टियों को पढ़ने की चेष्टा करने की बजाय सकेत चिह्न अक्षरों सख्याओं या अक्षरों, और सख्याओं के सम्मिश्रण की खोज करना अधिक आसान हो सकता है। सारणीकार का कार्य इस तथ्य से और भी आसान हो सकता है कि सम्पादक मुवाब्ब डग से लिखता है या उसे लिखना चाहिए और एक विशिष्ट रंग, प्रायः लाल, का प्रयोग करता है।

पृष्ठ 36 पर सख्यात्मक सकेत के अनुसार सम्पादित बेरोजगारी अनुसूची दिखाई गई है। यांत्रिक साधनों से सारणीकरण आसान बनाने के लिए पहले से ही सख्याओं में अभिव्यक्त प्रविष्टियों को छोड़ कर प्रत्येक प्रविष्टि का सख्यात्मक दृष्टि से सकेत दिया गया है। ध्यान दीजिए कि प्रश्न 7 स्वतः सकेतित था। प्रश्न 5 और 6 के लिए एक सरल सकेत योजना निम्न प्रकार से हो सकती है -

- 10 व्यावसायिक
- 20 लिपिक (अथवा अनिर्दिष्ट)
- 30 घरेलू एवं व्यक्तिगत सेवा
- 40 सरकारी कर्मचारी (अध्यापकों को छोड़कर)

व्यापार और परिवहन

- 50 परचून और थोक व्यापार
- 51 दलीफोन और तार
- 52 रेलवे, एक्सप्रेस, गैस, बिजली का प्रवाह
53. जल परिवहन

- 54 वेब तथा दलाली
55 बीमा तथा म्यावर सपदा
56 अन्य

विनिर्माण और यान्त्रिक घड़े

- 60 निर्माण व्यापार, ठेकेदार
61. निर्माण व्यापार, श्रमिक
62 मिट्टी, काच, और पत्थर के उत्पाद
63 खाद्य और सम्बन्धित उत्पाद
64 लोहा, इस्पात, और उनके उत्पाद
65 धात्विक उत्पाद, लोहे और इस्पात को छोड़कर
66 कागज, छपाई, और प्रकाशन
67 पहलने के परिधान और वस्त्र
68 मोटर गाड़ियाँ, पुर्जे, तथा टायर
69 काष्ठसज्ज और फर्नीचर
70 हवाई जहाज
71 अन्य निर्माण और यान्त्रिक घड़े
75 श्रम (अन्यथा अनिर्दिष्ट)
80 स्वनिर्भोजित (10 या 60 को छोड़कर)
90 विविध रोजगार जो ऊपर निर्दिष्ट नहीं
100 अप्रतिवेदित

(ग) गूढ़-लेखवाचन—कभी-कभी गणनाकार या ज्ञापक का लेख पढ़ना कठिन हो सकता है। यह बात तब विशेषतः सत्य होती है जब गणनाकार अनुसूची में धर से बाहर वर्षा या वर्ष में प्रविष्टि करता है। ऐसी कापी के लेख का गूढ़-वाचन करना सम्पादक का कार्य है, वह न केवल सारणीकार का समय बचाता है बल्कि ठीक निष्कर्षों को भी सुनिश्चित करता है। यदि प्रविष्टियाँ अक्षरशः पढ़ने योग्य नहीं हैं तो अनुसूची गणनाकार या उस व्यक्ति को जिसने जानकारी भेजी है वापिस भेजनी पड़ सकती है।

(घ) पड़ताल करना—असंगतियों के लिए सम्पादक अनुसूचियों की परख कर सकता है। हो सकता है वह और जन्मतिथि की प्रविष्टियाँ आपस में न मिलें। यदि कोई व्यक्ति 8 वर्ष की आयु का उत्तर दे रहा है और विवाहित भी दिखाया गया है तो संभवतः कुछ भ्रम है। इसी प्रकार यदि कोई स्त्री पूरा समय जोहार के तौर पर कार्य करती हुई बताई गई है तो संभव है (यद्यपि आवश्यक नहीं) कि भ्रमती हो गई हो। यदि उनका प्रयोग करना हो तो इस प्रकार की प्रविष्टियों की जाँच करना आवश्यक है।

(ङ) पूर्णता के लिए परीक्षण करना—यह देखने के लिए कि कोई प्रविष्टि छूट तो नहीं गई या भ्रमपूर्ण तो नहीं है सम्पादक के लिए अनुसूची की जाँच करना आवश्यक है। यदि छूटी हुई जानकारी महत्व की है तो अनुसूची गणनाकार या ज्ञापक को वापिस भेजनी जरूरी है। अन्यथा सम्पादक छूटी हुई जानकारी के स्थान पर “अप्रतिवेदित” (N. R. = Not Reported) या तदनु रूप सख्यात्मक संकेत लिख देता है।

6 आँकड़ों को सुव्यवस्थित करना—अनुसूचियों का सम्पादन हो चुकने के बाद

अन्तिम सारणियाँ और चार्ट बनाने से पूर्व आंकड़ों को संगठित करना आवश्यक है। इसके लिए तीन विधियों का प्रयोग हो सकता है।

(1) गणन अथवा गिनतीपत्र—उदाहरणार्थ, 20 मार्च, 19— को समाप्त होने वाले सप्ताह में, उद्योग के अनुसार, परिवारों के पुरुष मुखियाओं ने कितने घण्टे काम किया यह दिखाने के लिए, आइए हम एक गणनपत्र पर विचार करें। गणन-पत्र पृष्ठ 38 पर दिखाया गया है और यह समुदाय के एक क्षेत्र से परिवारों के पुरुष मुखियाओं के लिए सब सम्पादित कार्डों से प्राप्ति आंकड़ों का प्रतिनिधि है। हस्त-सारणीकरण के लिए उद्योग समूहों का सहायक सकेत आवश्यक नहीं है (हस्त सारणीकरण में अगले उप-परिच्छेद में वर्णित अंक प्राप्त करने और हाथ से छांटने दोनों का समावेश होता है), परन्तु पूर्ण उद्योग के पदनाम के स्थान पर सकेत मक्याओं के प्रयोग में गिनती-पत्र में स्थान बचता है। जब यांत्रिक सारणीकरण किया जाता है तो सहायक सकेत आवश्यक है।

ध्यान से देखिए कि गणन-अंकों की पाँच के समूहों में व्यवस्था की गई है, जिनमें से चार ऊर्ध्वोपर और एक विरुद्ध है। इससे गिनती सरल हो जाती है। गणन-अंकों का दूसरा सेट परस्पर के प्रयोजन के लिए है। क्योंकि गिनती-पत्र केवल एक क्षेत्र के लिए है, इसलिए पूर्ण समुदाय के आंकड़े प्राप्त करने के लिए यह आवश्यक है कि ऐसे कई गिनती-पत्रों के निष्कर्षों को मिलाया जाए। परिणामस्वरूप प्राप्त होने वाली सारणी 2.1 के समान प्रतीत हो सकती है।

एक छोटे अध्ययन से जानकारी का सङ्गठन करने के लिए गिनती-पत्र उपयोगी ढंग है। परन्तु यदि बहुत सी अनुसूचियों का गणन करना है या यदि वर्गीकरणों को उपविभाजित करना वांछित है तो गणन-पत्र दुष्कर हो जाता है। उदाहरणार्थ, यदि हम घण्टों के वही प्रकार प्रयोग करना चाहते हैं जैसेकि गणन-पत्र में दिखाए गए हैं, परन्तु पुरुषों और स्त्रियों को भी दिखाना चाहते हैं और साथ ही परिवारों के मुखियाओं और जो परिवारों के मुखिया नहीं हैं उनमें प्रभेद करना चाहते हैं, तो हमारे पास दो प्रमुख श्रेणियाँ होगी “परिवार का मुखिया” तथा “परिवार का मुखिया नहीं”। इनमें से प्रत्येक को “पुरुष” और “स्त्री” में विभाजित लिया जाएगा और इन चार श्रेणियों में से प्रत्येक को पृष्ठ 38 पर गिनती-पत्र में दिखाए गए वर्गों में आगे उपविभाजित किया जाएगा। इसके लिए $4 \times 6 = 24$ कालम की आवश्यकता होगी और इसके परिणामस्वरूप एक बहुत बड़ा गिनती-पत्र उत्पन्न होगा। हाँ, इसे कई गणन-पत्रों में तोड़ा जा सकता है, परन्तु यह और भी अच्छा होगा यदि आंकड़े सुव्यवस्थित करने की एक भिन्न विधि का प्रयोग किया जाए।

(2) हाथ से छांटें—जब किसी अध्ययन में, बहुत बड़ी संख्या में अनुसूचियाँ नहीं आती और जब अनुसूचियाँ पर्याप्त छोटी तथा गत्ते या भारी कागज पर हो, ताकि उनसे तुरन्त काम लिया जा सके, तब आंकड़ों को दस्ती छांट के ढंग से संगठित किया जा सकता है। यदि हम पूर्वगामी अनुच्छेद में वर्णित जानकारी प्राप्त करना चाहते हैं तो हम (1) चार ढेरों में कार्डों को छांट सकते हैं—परिवारों के पुरुष मुखिया, परिवारों की स्त्री मुखिया, पुरुष जो मुखिया नहीं, और स्त्रियाँ जो मुखिया नहीं, (2) इन चार ढेरों में से प्रत्येक को 27 उद्योग श्रेणियों में छांट सकते हैं ताकि अधिक से अधिक 108 ढेर होंगे; तथा (3) इनमें से प्रत्येक ढेर को पृष्ठ 38 पर दिखाए गए काम के घण्टों के सबमों में छांट सकते हैं। तब वांछित आंकड़े प्राप्त करने के लिए प्रत्येक ढेर के कार्डों को गिना जाएगा।

नाम जोहन्स डे क्षेत्र 103 परिकार 0682

पता 100 अनिस्ट स्ट्रीट कांठे (61) बलवाकर ख. जोन्स

1 परिवार के मुखिया से सम्बन्ध मुखिया (1) 2 वय 38

3 लिय भेद पुरुष (1) 4 स्नून के वर्ष 6 (1)

5 नियमित रोजगार

6 कर्मस्थान रोजगार

घरा राज

(61) घरा राज

(61) उद्योग गृह निर्माण

(61) उद्योग गृह निर्माण

7 यह निम्नलिखित के लिए कि यह व्यक्ति 20 मार्च 19 को समाप्त होने वाले मन्नाह में प्राथमिक तौर पर गया कर रहा था एक सप्ताह पर एक मन्नाहों

(01) मुद्रा या बिम में प्राप्ति के लिए काम कर रहा है।

02 स्वनियोजित।

काम में गया है या स्वनियोजित है परन्तु कार्य नहीं कर रहा क्योंकि

03 छुट्टी पर।

04 कुरा मौसम।

05 श्रम क्लेश।

06 30 दिन या कम की अवधि छुट्टी।

07 पगनी बीमारी।

08 अन्य

09 काम में नहीं 30 दिन के अंदर गया कार्य प्रारम्भ करता।

10 काम में नहीं काम की खोज में।

11 अनियत कामकार कोई नियमित कार्य नहीं।

12 स्त्रुम में जाता।

13 पैता में।

14 घर की देखभाल (कर्मचारी के रूप में नहीं)।

15 परिवार के कार्य पर या परिवार के व्यापार में अवैतनिक कर्मकार।

16 स्वैच्छिक कर्मकार, परिवार के कार्य या परिवार के व्यापार में नहीं।

17 सेवा निवृत्त।

18 "पारंपरिक या सामाजिक दृष्टि में कार्य करने के अयोग्य।

19 मरणा का निवासी।

20 अन्य

8 यदि निम्नलिखित मन्नाह इस व्यक्ति ने, प्राप्ति के अंदर, या परिवार के कार्य या परिवार के व्यापार में, या स्वनियोजित व्यक्ति के रूप में कोई कार्य किया तो उसने जिनने घंटे कार्य किया ? 30 घंटे।

9 यदि यह व्यक्ति कार्य की खोज करता रहा है तो वह कितने मन्नाह तक रोजगार ढूँढता रहा/ढूँढती रही ? मन्नाह

टिप्पणी

(3) **यांत्रिक सारणीकरण**—यांत्रिक सारणीकरण में वही मौलिक प्रक्रम होता है, जो हाथ से छँटाई में होता है, परन्तु यह बहुत अधिक तेज है। यांत्रिक छँटाई और सारणीकरण (गिनने और जोड़ने) की युक्तियों ने सांख्यिकीय अध्ययन की जानकारी को संगठित करने का कार्य अत्यन्त शीघ्रता से हो सकता है, हाँ शर्त यह है कि अध्ययन काफी विस्तृत हो ताकि ऐसे साधन का प्रयोग हो सके। यांत्रिक सारणीकरण के साधन के प्रयोग की उस हालत में सिफारिश की जाती है जबकि बड़ी सख्या में अनुसूचियों का विश्लेषण करना हो या जब प्रत्येक अनुसूची में अनेक प्रविष्टियाँ हों। इस प्रक्रम में आवश्यक तौर पर निम्न पग आते हैं :

(क) समुचित सकेतों का प्रयोग करके अनुसूची में सब प्रविष्टियों को सख्यात्मक मद्दे में बदलना।

(ख) सकेत सख्याओं का प्रतिनिधित्व करने के लिए छिद्र करके एक छिद्रण कार्ड पर ये प्रविष्टियाँ अंकित करना।

(ग) मशीनों के प्रयोग से कार्डों को छांटना और आँकड़ों को एकत्र करना।

पृष्ठ 36 की सम्पादित अनुसूची के आँकड़ों को दिलाने के लिए पृष्ठ 39 पर एक कोरा छिद्रण कार्ड और एक कार्ड का बड़ाया हुआ छिद्रित भाग भी दिखाया गया है। कार्ड (103) में प्रथम प्रविष्टि उस क्षेत्र की पहचान करती है जहाँ में अनुसूची आई। अगली प्रविष्टि, जिसमें 4 कालम प्रयोग किए गए हैं, परिवार की पहचान कराती है और यदि वांछित हो तो प्रत्येक परिवार के कार्डों को इकट्ठा करने के योग्य बनाती है। अगले दो कालम परिवार के भीतर कार्ड की सख्या का संकेत करते हैं क्योंकि एक परिवार के लिए कई कार्ड हो सकते हैं। यदि अभीष्ट हो तो कुल मिलाकर पहली नौ सख्याओं से किसी अनुसूची और इससे बने हुए पंच कार्डों को इकट्ठा करना संभव होता है। अगले कालम में "1" के द्वारा यह दिखाया गया है कि व्यक्ति एक परिवार का मुखिया है, "2" से यह संकेत होगा कि वह मुखिया नहीं है। अगले दो कालमों में बय दिखाई गई है। अगले कालम में "1" यह संकेत करता है कि प्रत्यर्थी पुरुष है, स्त्री के लिए "2" पंच किया गया है। अगले कालम में इन सख्याओं में स्कूल के वर्षों का संकेत है : 1, 0—6 वर्ष, 2, 7—12 वर्ष; 3, 13—16 वर्ष, 4, 17 या अधिक 0, अप्रतिवेदित। उद्योग संकेत, जो पहले ही दिया जा चुका है, अगले चार कालमों में है, दो कालम नियमित रोजगार के लिए और दो वर्तमान रोजगार के लिए हैं। दो और कालमों में स्वयं के संकेतक प्रश्न 7 के उत्तर दिए हैं। प्रश्न 8 का उत्तर सख्यात्मक होगा और यह अगले दो कालमों में आता है। अन्तिम तीन कालमों में प्रश्न 9 के सख्यात्मक उत्तर आते हैं। ध्यान दीजिए कि इस अनुसूची के लिए पंच कार्ड का केवल एक भाग प्रयोग करना आवश्यक है।

कार्ड तैयार हो चुकने के बाद, उनका सत्यापन होता है। यह कार्य प्रत्येक छिद्रित कार्डों को, उस अनुसूची के साथ पढ़कर जिनका वह प्रतिनिधि है, किया जाता है। कार्डों का प्रकाश के किसी स्रोत पर रखकर या किसी काली पृष्ठभूमि पर परीक्षण होता है। बंकल्पिक तौर पर, "सत्यापक" कहलाने वाली एक विशिष्ट मशीन का प्रयोग किया जा सकता है। सत्यापक मशीन कार्डों को पंच करने वाली मशीन से मिलती-जुलती है परन्तु यह कार्डों को पंच नहीं करती।

सत्यापन के बाद, कार्डों को छाँटा जाता है और उनका मशीन से सारणीकरण होता है। इलेक्ट्रॉनिक सांख्यिकीय मशीनों में यह काम होता है। वे छाँटती हैं, गिनती हैं, जोड़

क्षेत्र 1

गणन कर्ता जेन रिमथ

पढताल कर्ता विलियम जेन्स

उद्योग तथा जितने घण्टे व प विय
परिवारों के पुस्तक मूल्या

उद्योग मनू	35 घण्टे या अधिक	28परन्तु35 घण्टे से कम	21परन्तु28 घण्टे से कम	14परन्तु21 घण्टे से कम	7परन्तु14 घण्टे से कम	7 प 2 से कम
0	1					
20	2			0		
30	2	2	2			1
40	27	2		1		
50	16	0	2	2	2	
5	3					
52	32	2	2	2		1
53	6		2			
54	3					
55	5	0				
56	2					
60	4	2				
6	25	5	2	3	2	
62						
63	8	0	3			
64	7	5	3	4	2	2
65	4		1		0	
66	3	2	0			
67	5			5		
68	2	3	2			
69	4	0				
70	6		2			
71	0		0			
75						
80	7	3	2	0	2	
90	2					
00						

करती हैं और परिणाम छापती है। य मशीन पूर्व स्थापित कसोटियों पर आधारित जानकारी [मन्गलन के अतगन अनुच्छेद (घ) देखिए] की सगति के लिए काडों का मत्पापन भी करती है।

अनेक अध्ययनों के लिए उपयोगी एक सरल माधन जिसे कोसाट¹⁴ कहते हैं किनारों के साथ छिने बाने काडों का प्रयोग होता है। छिद्र और किनारे के बीच में काट के भाग का रखा बनाकर जानकारी लिखी जाती है जसा कि यहाँ दिखाया गया है

14 कोसाट की बिन्नी रायल मकबी कम्पनी #295 मधिमन एवेय ययाग एन० बार्द० द्वारा की जाती है।

सारणी 11

20 मार्च 19— को समाप्त होने वाल सप्ताह में शहरी आबादी में परिवारों के मुख्य मुखियाओं द्वारा काम के घण्टे उद्योग समूह के काम से

उद्योग समूह	35 घण्टे या अधिक	28 पर तु 35 घण्टे से कम	21 पर तु 28 घण्टे से कम	14 पर तु 21 घण्टे से कम	7 पर तु 14 घण्टे से कम	7 घण्टे से कम	कुल
व्यावसायिक	247	16	12	1	2		278
निपिक (अथवा अनिपिक)	10	5	4	13			32
घरेलू और व्यक्तिगत सेवा	386	125	44	11	6	9	581
सरकारी कामचारी (अध्यापकों को छोड़कर)	1 563	232	48	25	11	15	1 894
वापार और परिवहन	6 339	532	269	166	49	34	7 389
परचून और थोक व्यापार	2 207	65	103	33	25	9	2 442
टेलीफोन और तार	120	3	20	6	2		151
रेलवे एकमप्रस गस विजली का प्रकाश	3 119	408	66	94	11	20	3 718
जल परिवहन	308	12	71	16	5		412
बक तथा दलाली	239	8	5	6	1	2	261
बीमा तथा स्थावर संपदा	245	20	4	9	5	3	286
अन्य	101	16		2			119

विविधता तथा यांत्रिक धय	8 468	1,054	693	268	85	78	10,646
निर्माण व्यापार ठेकेदार	557	27	4	2		1	591
निर्माण व्यापार श्रमिक	1 223	311	108	67	31	8	1,748
मिट्टी काँच और पत्थर के उत्पाद	251	30	15	21		3	317
लाकड़ और संबंधित उत्पाद	1 243	47	124	8	2	47	1,427
लोहा इस्पात और उनके उत्पाद	2 205	308	211	53	26	5	2 850
धातुक उत्पाद, नौह और इस्पात को छोड़कर	213	25	76	8	13		340
कागज छपाई और प्रकाशन	220	41	37		4	7	298
पहनने के परिधान और वस्त्र	304	13	21	62	1	1	411
मोटर गाड़ियाँ पुर्ण तथा टायर	1 083	102	41	25	5	3	1,253
काष्ठखण्ड और फर्निचर	293	100	8	2	1	2	416
हवाई जहाज	703	33	36	17	1	1	792
धन्य	168	17	12	3	2		203
	12	7	3	3	6	4	35
गन्ना (अथवा प्रतिनिध)							
स्वनिर्मित	1,530	88	49	18	23	11	1 719
विविध	63	10	7	2			82
अप्रतिनिधित	1		1	1			3
कुल परिवारों के पुरुष मुखिया	18 619	2 069	1 130	508	182	151	22,659

इन सारणी में दिखाए गये आंकड़ उदाहरण के प्रयोजनों के लिए हैं वे किसी वास्तविक गणना का प्रतिनिधित्व नहीं करते ।

के एक छोटे अंश में अतीव जटिल गणितीय क्रियाएँ सम्पन्न करने में समर्थ है बल्कि ये आँकड़ों और उन्हें तैयार करने वाले अनुदेशों को संग्रह करके भी रख सकती हैं। व्यापारिक उपक्रमों द्वारा स्वचालित आँकड़ें ससाधन उपकरण का बेतन-चिट्ठा तैयार करने, परिसम्पत्ति एवं देयताओं संबंधी और विशेषकर वस्तु-सूचियों के विस्तृत रिकार्ड रखने, तथा विभिन्न वैकल्पिक बहिर्वर्णित क्रियाओं के निष्कर्षों के विश्लेषण तैयार करने के लिए प्रयोग किया जाता है।

7. प्रस्तुति तथा विश्लेषण—हाथ से या यांत्रिक साधनों से अनुसूचियों की जानकारी को संगठित कर चुकने के बाद, अन्तिम सांख्यिकीय सारणियाँ और चार्ट बनाए जा सकते हैं। मासिकीय सारणियों का विवरण अध्याय 3 में दिया गया है। ग्राफ के द्वारा प्रस्तुति पर अध्याय 4, 5, और 6 में विचार किया गया है। मासिकीय आँकड़ों का विश्लेषण अध्याय 7 से 26 में दिया गया है।

वर्तमान स्रोतों का प्रयोग

प्राथमिक बनाम गौण स्रोत—जैसा कि इस अध्याय के प्रारम्भ में सकेत किया गया है, एक प्रक्षिप्त अध्ययन में उपयोग के योग्य सांख्यिकीय आँकड़ें पहले ही विद्यमान हो सकते हैं। आँकड़े प्रकाशित हुए हों या न भी प्रकाशित हुए हों। वे एक व्यक्ति, एक व्यापारी कोठी, एक अनुसंधान संस्था, एक व्यापार संस्था, एक स्थानीय, राज्य या संघ के सरकारी कार्यालय, एक समाचार-पत्र या पत्रिका इत्यादि द्वारा इकट्ठे किए जा सकते हैं। कुछ प्रकाशनों में, जैसे यूनाइटेड स्टेट्स सेन्सस ग्रॉफ पाब्लेशन एन्ड हाउसिंग के ग्रन्थों में, केवल प्रचालक संस्था द्वारा इकट्ठे किए गए आँकड़े होते हैं। इस प्रकार के स्रोत प्राथमिक कहलाते हैं। अन्य प्रकाशनों के प्रकाशन करने वाली संस्था के प्रतिरिक्त अन्य संस्थाओं द्वारा प्रारम्भ में संकलित किए गए कुछ या सब आँकड़े इकट्ठे होते हैं। इन्हें गौण स्रोत कहा जाता है। संयुक्त राज्य व्यापार विभाग के व्यापार अर्थशास्त्र के कार्यालय से मासिक प्रकाशित होने वाला सर्वे ऑफ करन्ट बिजनेस एक गौण स्रोत है क्योंकि इसमें बहुत से सरकारी और गैर-सरकारी स्रोतों से प्राप्त आँकड़े होते हैं। स्पष्ट है, जब कभी संभव हो प्राथमिक स्रोत का प्रयोग करना अधिक अच्छा है परन्तु प्रायः किसी गौण स्रोत का प्रयोग अधिक सुविधाजनक हो सकता है। संयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो का वार्षिक प्रकाशन स्टैटिस्टिकल एब्सट्रैक्ट ग्रॉफ दि यूनाइटेड स्टेट्स आँकड़ों का एक अमूल्य गौण स्रोत है।

प्राथमिक स्रोत को अधिमान देने के कारण हैं

(1) गौण स्रोत में प्रतिलेखन की अशुद्धियाँ हो सकती हैं जो प्राथमिक स्रोत से आँकड़े नकल किए जाते समय हो गई हो।

(2) प्रायः प्राथमिक स्रोत में प्रयुक्त मंदी और इकाइयों की परिभाषाएँ होती हैं। यह एक महत्वपूर्ण विचार है क्योंकि जब तक प्रयोग करने वाले को यह ठीक-ठीक पता नहीं कि इकट्ठा करने वाली संस्था द्वारा प्रयोग किए गए प्रत्येक पद या इकाई का क्या अर्थ है तब तक आँकड़ों का बुद्धिमत्तापूर्ण प्रयोग कठिन हो सकता है। जब आँकड़े कई एक स्रोतों से लिए जाते हैं उस समय इसका विशेष महत्व है कि पदों और इकाइयों की परिभाषाओं की छानबीन की जाए। कभी-कभी “कुटुम्ब” पद का पिता, माता, और सतान यह सीमित अर्थ हो सकता है, कभी-कभी इसका न्यूनाधिक “परिवार” (एक घर में रहने वाले) के पर्यायवाची के रूप में प्रयोग किया जा सकता है। कभी-कभी “निर्यात” पद का संकेत कुल

निर्यात (पुनः निर्यात मिलाकर) हो सकता है, कभी-कभी केवल समुक्त राज्य के माल का निर्यात। यद्यपि एक मापी हुई बुशल 2,150 4 घन इंच होती है, तथापि सब वस्तुओं के लिए एक बुशल में उसी संख्या में पाउंड नहीं होते। उदाहरण के लिए, छिनके सहित हरी मटर की फलियों का एक बुशल 22 पाउंड वजन का होता है, जई के एक बुशल में 32 पाउंड वजन होता है, और सेब के एक बुशल का भार 45 पाउंड होता है, परन्तु गेहूँ, सेम, मटर या आलू का एक बुशल 60 पाउंड वजन का होता है। स्टैटिस्टिकल एस्ट्रिक्ट प्राफ दि यूनाइटेड स्टेट्स में, यद्यपि यह एक गौण स्रोत है, इकाइयों की आवश्यक परिभाषाएँ होती हैं।

(3) प्राथमिक स्रोत में प्रायः अनुसूची की एक प्रतिलिपि और प्रतिदर्श का चयन करने तथा आंकड़े एकत्र करने में प्रयुक्त क्रियाविधि का वर्णन होता है, इस प्रकार पाठक यह निश्चय करने के योग्य होता है कि अध्ययन के निष्कर्षों पर कितना विश्वास किया जाए।

(4) प्राथमिक स्रोत में प्रायः आंकड़े अधिक विस्तार में होते हैं। गौण स्रोत में प्रायः जानकारी का कुछ भाग छोड़ दिया जाता है या सबकों को मिला दिया जाता है, जैसे कि नगरों के स्थान पर काउन्टियाँ दिखाई जाएँ, या काउन्टियों के स्थान पर राज्य।

आंकड़ों की उपयुक्तता—आंकड़ों की विश्वस्तता, यथार्थता, और प्रयोज्यता का विश्वास किए बिना विश्लेषक को प्राथमिक या गौण स्रोत से आंकड़ों का प्रयोग नहीं करना चाहिए। इस सिलसिले में विचार के योग्य बहुत से बिन्दु हैं।

(1) यदि गणन प्रतिदर्श पर आधारित था, तो क्या प्रतिदर्श प्रातिनिधिक था?

(2) क्या अनुसूची अच्छी प्रकार अभिकल्पित की गई थी? क्या कोई प्रवाहक प्रश्न या सदिग्ध प्रश्न समाविष्ट किए गए थे?

(3) क्या एकत्र करने वाली एजेंसी पूर्वग्रह-रहित थी, यद्यपि इसे "कोई अपना मतलब निकासना था"? यह स्मरण रखना अच्छा है कि पूर्वग्रह का समावेश जानबूझ कर या अनजाने में हो सकता है।

(4) क्या असावधान गणन के कारण कोई चयनात्मक कारक भा गया था? उदाहरणार्थ, बेरोजगारी के एक अध्ययन में, जिन घरों में कोई नहीं है उन घरों के अनु-परीक्षण के सबंध में उपायिक असावधान हो सकते हैं और इस प्रकार आंकड़ों में रोजगार-प्राप्त व्यक्तियों की संख्या वास्तविक से कम दिखाई देगी।

(5) क्या गणनाकार बोध एवं उक्ति एवं से शिस्त के? कठोरता का कन शिक्ति गणनाकारों पर उपयोगी निष्कर्षों के लिए निर्भर नहीं किया जा सकता।

(6) क्या सम्पादन सावधानी और बुद्धि अन्तःकरण से किया गया था? सम्पादकों द्वारा असावधानी से संकेतन या परिकलन से अग्रगण्य मूल्यवान अध्ययन के निष्कर्ष मूल्यहीन हो सकते हैं।

(7) क्या सारणीकरण (गिनती पत्र, छंटवाई या यांत्रिक सारणीकरण) सावधानी से किया गया था और उसका ठीक-ठीक सत्यापन किया गया?

(8) क्या प्रयोग की गई परिभाषाओं, अध्ययन किए गए क्षेत्र और क्रियाविधि की विधियों की दृष्टि से आंकड़े खोज के अधीन समस्या पर लागू होते हैं?

गणनाकारों, सम्पादकों और सारणीकारों द्वारा किए गए कार्य की कोटि का निश्चय करना सदा सम्भव नहीं होता। जैसा कि अभी-अभी नोट किया था, प्राथमिक स्रोतों

से प्रयोग की गई अनुसूची की प्रतिलिपि का पुनरुत्पादन हो सकता है और अनुसरण की गई प्रणालियों तथा क्रियाविधियों का न्यूनतम ठीक ठीक वर्णन मिल सकता है। अतिरिक्त जानकारी प्रायः पत्र-व्यवहार द्वारा प्राप्त की जा सकती है।

दिए हुए एक स्रोत से वर्षों की अवधि के दौरान आँकड़े प्रयोग करते समय हमें यह निश्चय कर लेना आवश्यक है कि पदों की परिभाषाएँ बदली नहीं है, अथवा यदि वे बदल गई हैं तो परिवर्तन के लिए उचित छूट दे देनी चाहिए, यदि ऐसा करना संभव हो। उदाहरणार्थ, 1950 की जनगणना के लिए शहरी जनसंख्या को एक नई परिभाषा का प्रयोग किया गया। इस पाठ में, हम पुरानी और नई परिभाषाएँ¹⁵ देकर स्थान नहीं घेरेंगे, परन्तु परिवर्तन का उद्देश्य था अधिक बड़े और घने बसे हुए अनियमित स्थानों को शहरी के तौर पर सम्मिलित करना, जैसे कि नगरों के चारों ओर के उपान्त क्षेत्र तथा एक शहरी उपान्त के बाहर 2,500 या इससे अधिक निवासियों के अनियमित स्थान। 1950 के आँकड़ों का सारणीकरण दोनों पुरानी और नई परिभाषाओं के आधार पर किया गया था और पुगनी परिभाषा के प्रयोग में 8,89,27,464 शहरी आबादी तथा नई परिभाषा के आधार पर 9,64,67,686 शहरी आबादी थी। पहले की जनगणनाओं के आँकड़े केवल पुरानी परिभाषा के आधार पर प्राप्त हैं।

समाचार-पत्र माध्यम तथा सांख्यिकीय आँकड़ों के अच्छे स्रोत नहीं होते विशेषतः जब आँकड़े एक समाचार के रूप में हों। इसका एक कारण यह है कि समाचार-पत्र की प्रति इतनी तीव्रता से तैयार की जाती है और छापी जाती है कि सामग्री का उतने ध्यान से प्रूफ वाचन नहीं किया जा सकता जितना कि पत्रिकाओं और पुस्तकों की अन्तर्वस्तु का। इसके अतिरिक्त समाचार पदों में उद्धृत वृत्त में आँकड़े ऐसे व्यक्तियों के भाषणों और वक्तव्यों से लिए जाते हैं जो स्वयं मद्दिग्ध विश्वस्तता के स्रोत होते हैं। उदाहरणार्थ, देश के एक प्रमुख समाचार-पत्र में एक समाचार में दिए गए इस वक्तव्य पर विचार कीजिए। (भास्ट्रेलियन) ऊन की अनुमानित उपज 37,40,000 गॉट्स है, जो किरिबाई पर अधिकतम है। योग्य प्रेक्षकों का विचार है कि खरगोशों के विनाश से (जो भेड़ों का घास खा जाते थे) उपज में 2,50,00,000 गॉट्स बढ़ गई है।¹⁶ समाचार पद से यह निश्चित करने का कोई ढंग नहीं है कि कौन-सी संख्या ठीक है। तो भी प्रथम संख्या लगभग ठीक है, दूसरी संख्या अत्यन्त अशुद्ध है।

विभिन्न स्रोतों से प्राप्त आँकड़ों की तुलनात्मकता—जब आँकड़े दो या अधिक स्रोतों से लिए जाने हैं तो प्रत्येक स्रोत की विश्वस्तता पर विचार करना आवश्यक है और इसके अतिरिक्त प्रयोग करने वाले को यह निश्चित करना जरूरी है कि विभिन्न स्रोतों से प्राप्त आँकड़े तुलना योग्य हैं। आइए हम तुलना की कमी के कुछ कारणों की सूची बनाएँ।

(1) पदों की विभिन्न परिभाषाएँ प्रयोग में लाई गई हो सकती हैं। कोयले का उत्पादन संयुक्त राज्य सैन ब्यूरो द्वारा 2,000 पाउंड के छोटे टनों में दिया जाता है जब कि एक समय कोयले के निर्यात को विदेशी और घरेलू व्यापार ब्यूरो द्वारा 2,240 पाउंड के बड़े टनों में दिखाया जाता था। छोटे टनों का अब दोनों ब्यूरो प्रयोग करते हैं। संयुक्त

15. नई परिभाषा और परिवर्तन का स्वरूप जनगणना के संयुक्त राज्य ब्यूरो, यू० ए० सेंसस ऑफ पापुलेशन, 1950, खंड II, कंरेंक्टिस्टिक्स ऑफ दि पापुलेशन, भाग I, संयुक्त राज्य सरकार, पृष्ठ 9-10 में दिए गए हैं।

राज्य के कच्ची और साफ चीनी के स्टाको की रिपोर्ट कृषि विभाग द्वारा छोटे टनो में दी जाती है, कच्ची चीनी के क्यूबा के स्टाक वीकली स्टैटिस्टिकल शुगर ट्रेड जर्नल द्वारा स्पेनी टनो में दिए जाते हैं। एक स्पेनी टन में 2,271.64 ग्रैजी पाउंड होते हैं। मानो ये तीन प्रकार के टन पर्याप्त मात्रा में अति में डालने वाले नहीं थे, पोतपरिवहन में प्रयुक्त दो अन्य "टनो" की जानकारी प्राप्त करना आवश्यक है। ये कुल टन और नेट (या रजिस्टर्ड) टन हैं, जिनमें से प्रत्येक 100 घन फुट का प्रतिनिधि है। कुल टन खोखु (हल) की क्षमता तथा नीभार, स्टोर, यात्रियों, और कर्मों दल के लिए प्राप्त डेक पर घिरे हुए स्थान को कहते हैं, जबकि नेट टन कुल टनो में से चालक मशीनों, ईंधन, कर्मों क्वांटरो, स्वामी के केबिन और नीचालन स्थानों को निकाल कर आते हैं—दूसरे शब्दों में, लगभग नीभार और यात्रियों के लिए प्राप्य स्थान।

लेखा की विभिन्न प्रणालियों के कारण, "लाभ" पद के विभिन्न उद्योगों में विभिन्न अर्थ हो सकते हैं। रेल मार्ग का लाभ एष विभागीय स्टोर के लाभ से कहीं भिन्न हो सकता है। लगभग पूर्ण रूप से साक्षेदारी में चलने वाले एक विशिष्ट उद्योग में एक अनुसंधानकर्ता ने पता किया कि बहुत-सी फर्म कोई लाभ नहीं दिखा रही थी और फर्मों में बड़े अन्तर विद्यमान थे। हिस्सेदार प्रायः अपने भाप को भरपूर वेतन दे रहे थे और इसलिए अध्ययन के लिए एक नए पद "लाभ तथा हिस्सेदारों के वेतन" को प्रयोग में लाया गया। वय का वृत्त पिछले जन्मदिन के हिसाब से, निकटतम जन्मदिन के हिसाब से, या प्राच्य पद्धति के अनुसार, आगामी जन्मदिन के अनुसार दिया जा सकता है। अतः वय के आंकड़ों की तुलनात्मकता वृत्त के आधारों द्वारा प्रभावित होती है।

(2) परिकलन या अनुमान की विभिन्न प्रणालियों का प्रयोग किया गया हो सकता है। उदाहरण के लिए, न्यूयार्क नगर पुलिस कमिश्नर के अनुसार 10 मार्च, 1966 और 7 अप्रैल, 1966 के बीच न्यूयार्क शहर में चोरी और लूट की घटनाएँ लगभग दुगुनी हो गईं। परन्तु 'वृद्धि' "केवल मात्र" रिपोर्ट करने की विधियों में परिवर्तन के कारण थी। कई मामलों में पहले महापराधों को उपापराधों के रूप में रिपोर्ट किया जा चुका था।¹⁶

(3) प्रतिदर्श इस प्रकार चुने गए हो सकते हैं कि निष्कर्षों की तुलना नहीं की जा सकती। अथवा, संयोगवश, एक अध्ययन प्रतिदर्श पर आधारित रहा हो जब कि दूसरा पूर्णरूपेण गणन हो। हाँ, प्रतिदर्श का चुनाव इस प्रकार करना संभव है कि किसी अध्ययन के निष्कर्ष पूर्वकल्पित निष्कार के दबदबस्ती अनुकूल चलाए जा सकें।

(4) गणन, सम्पादन, और सारणीकरण के सबंध में यथार्थता के विभिन्न स्तर रह सकते हैं।

(5) संभव हो सकता है कि समाविष्ट क्षेत्रों की दृष्टि से या निर्दिष्ट कालावधि की दृष्टि से स्रोत तुलना के योग्य न हों। यदि तैयिक अन्तर बहुत अधिक नहीं तो कभी-कभार तुलनाएँ की जा सकती हैं या समजन किए जा सकते हैं।

चाहे अन्वेषक प्राथमिक स्रोतों का प्रयोग कर रहा हो या गीए स्रोतों का, स्पष्ट प्रशुद्धियों और मुद्रण दोषों की तलाश में रहना आवश्यक रहता है। उदाहरण के लिए, एक वर्ष एक गीए स्रोत द्वारा बताया गया कि महादेशीय संयुक्त राज्य में 3,81,10,000

16 सपुक्त प्रेस, "न्यूयार्क स-डै टू थ्रू आन नाइव," पैसिफिक स्टार्ब एन्ड स्ट्रिप्स, 8 अप्रैल, 1966, पृष्ठ 3।

अश्वशक्ति सभाव्य जल विद्युत् 90 प्रतिशत समय के लिए प्राप्त थी, जबकि 91,66,000 अश्वशक्ति सभाव्य जल विद्युत् 50 प्रतिशत समय के लिए प्राप्य थी। यह स्पष्ट है कि 90 प्रतिशत समय की अपेक्षा 50 प्रतिशत समय के लिए आवश्यक तौर पर अधिक सभाव्य अश्वशक्ति प्राप्य होगी। प्रत्येक राज्य के लिए आंकड़े दिए गए थे, और यदि इन व्योरो को जोड़ा जाए तो प्रतीत होता है कि 5,91,66,000 अश्वशक्ति सभाव्य जल शक्ति 50 प्रतिशत समय के लिए प्राप्य थी। स्पष्ट है कि यह मुद्रण की अशुद्धि थी जो आंकड़े छापते समय हो गई, या सभवतः प्राथमिक स्रोत से आ गई। आंकड़ों के अनुभवी प्रयोगकर्ता को इस प्रकार का स्पष्ट विरोधाभास तुरन्त दिखाई दे जाएगा।

सांख्यिकीय सारणियाँ

प्रस्तुति की विधियाँ

सांख्यिकीय प्रस्तुति की चार विधियाँ उपलब्ध हैं। ग्राफ़िक्स (1) पाठ के एक अनुच्छेद में समाविष्ट हो, (2) सारणी के रूप में रखे हो, (3) अर्ध-सारणीक व्यवस्था में रखे हो, अथवा (4) लेखाचित्र विधि द्वारा वर्णित हो।

पाठ प्रस्तुति—ग्राफ़िक्स और पाठ को मिलाना कोई विशेष प्रभावपूर्ण साधन नहीं है। क्योंकि व्यक्ति को समस्त ग्राफ़िक्स के समुच्चय का अर्थ समझ में आ सके, इससे पूर्व, यह आवश्यक है कि सारे अनुच्छेद को पढ़ा जाए या कम से कम अवलोकन किया जाए। इस प्रकार से रखे हुए ग्राफ़िक्स को अधिकतर व्यक्ति आसानी से नहीं समझ सकते और पाठक के लिए वैयक्तिक ग्राफ़िक्स को अलग करना विशेष रूप से कठिन होता है। परन्तु इसमें यह लाभ है कि लेखक विशिष्ट ग्राफ़िक्स की ओर ध्यान दिना सकता है और इस प्रकार उन पर जोर दे सकता है तथा महत्व की तुलनाओं की ओर ध्यान आकर्षित कर सकता है। पाठ प्रस्तुति का एक उदाहरण निम्न है।

संयुक्त राज्य की 1960 की जनगणना के अनुसार कोलोरेडो में 8,70,467 पुरुष और 8,83,480 स्त्रियाँ थीं। पहाड़ी मण्डल में सबसे अधिक जनसंख्या वाले इस राज्य में 1950 में 6,65,149 पुरुष और 6,59,940 स्त्रियाँ थीं। 1960 और 1950 की दोनों जनगणनाओं के समय पर जनसंख्या में कोलोरेडो के बाद एरीजोना था। इसमें 1960 में 6,54,928 पुरुष और 6,47,223 स्त्रियाँ थीं, 1950 की गणना के समय 3,79,059 पुरुष और 3,70,528 स्त्रियाँ थीं। 1960 में उटाह पहाड़ी राज्यों में चौथे स्थान पर था जबकि 1950 में यह तीसरे स्थान पर था। 1960 में इसमें 4,44,926 पुरुष तथा 4,45,703 स्त्रियाँ थीं, जबकि 1950 में इसमें 3,47,636 पुरुष और 3,41,226 स्त्रियाँ थीं। न्यू मेक्सीको जो 1950 में चौथे स्थान पर था 1960 में उटाह को विस्थापित करके तीसरे स्थान पर आ गया। 1960 में इसमें 4,79,770 पुरुष और 4,71,253 स्त्रियाँ थीं जबकि 1950 में इसमें 3,47,544 पुरुष और 3,33,643 स्त्रियाँ थीं। मोनटाना, इडाहो, व्योमिंग और नेवादा दोनों 1960 और 1950 में क्रमशः पाँचवें, छठे, सातवें और आठवें स्थान पर थे। 1960 में मोनटाना में 3,43,743 पुरुष और 3,31,024 स्त्रियाँ थीं, 1950 में, इसमें 3,09,423 पुरुष और 2,81,603 स्त्रियाँ थीं। इडाहो में जिसमें 1960 में 3,38,421 पुरुष और 3,28,770 स्त्रियाँ थीं, एक दशान्त पूर्व 3,03,237 पुरुष और 2,85,400 स्त्रियाँ थीं। जनसंख्या की दृष्टि से पहाड़ी राज्यों में सबसे छोटे राज्य से अगले व्योमिंग में 1960 में 1,59,015 पुरुष और 1,61,051 स्त्रियाँ थीं जबकि 1950 में जनसंख्या

1,54,853 पुरुष और 1 35 676 स्त्रियाँ थी। आठ पहाड़ी राज्यों में सबसे कम जनसंख्या वाला नेवादा था जिसमें 1960 में 1,47,521 पुरुष और 1 37,757 स्त्रियाँ थी। दस वर्ष पूर्व इसमें 85,017 पुरुष और 75 066 स्त्रियाँ थी।

सारणीक निरूपण—वही आंकड़े जो पूर्व के पाठ विवरण में समाविष्ट थे सारणी 3 1 तथा 3 3 में दिखाए गए हैं। साथ ही, प्रत्येक राज्य के लिए सारणियों में लिए अनुपात दिखाया है, जिसका अध्याय 7 में वर्णन किया जाना है। सांख्यिकीय आंकड़ों को बिठाने की यह विधि प्रायः पाठ के प्रयोग से श्रेष्ठ है। एक सारणी अपने शीर्षक के साथ पूर्णतः स्वतः स्पष्ट होनी चाहिए। यद्यपि इसके साथ प्रायः व्याख्या का अनुच्छेद या महत्वपूर्ण आंकड़ों की ओर ध्यान दिलाने वाला एक अनुच्छेद हो सकता है।

सारणी 3 1

1950 और 1960 में पहाड़ी विभाग के राज्यों में लिंग के अनुसार निवासियों की संख्या

राज्य	पुरुष		स्त्रियाँ		पुरुष प्रति 100 स्त्रियाँ, 1960
	1960	1950	1960	1950	
कोलोराडो	870 467	665,149	883,480	659,940	98 5
एरीजोना	654 928	379 059	647,223	370,528	101 2
उटाह	444 924	347,636	445,703	341,226	99 8
न्यू मेक्सीको..	479 770	347,554	471,253	333,643	101 8
मोन्टाना	343 743	309,423	331,024	281,603	103 8
इडाहो	338 421	303,237	328,770	285,400	102 9
वयोमिंग ..	169,015	154,653	161 051	135,676	104 9
नेवादा	147,521	85,017	137 757	75 066	107 1

1960 के लिए जनसंख्या के आंकड़े, संयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो यू० एम० सेंसस आफ पापूलेशन 1960, खण्ड 1, कंरैक्विस्टिक्स आफ दि पापूलेशन, पृष्ठ XIII, प्रत्येक राज्य से संबंधित भाग की सारणी A से उद्धृत 1950 के आंकड़े संयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो यू० एस० सेंसस आफ पापूलेशन 1950, खण्ड 2 कंरैक्विस्टिक्स आफ दि पापूलेशन, प्रत्येक राज्य से सम्बंधित भाग की सारणी 13 से उद्धृत। पुरुष/100 स्त्रियाँ संयुक्त राज्य व्यापार विभाग, ऐस्टैटिस्टिकल एक्सट्रैक्ट आफ दि यूनाइटेड स्टेट्स, 1964 यू० एस० जी० पी० जी० वार्षिक डी० सी० 1964, पृष्ठ 21 से उद्धृत।

वह स्पष्ट दिखाई देता है कि सारणी पाठ विवरण से बहुत सक्षिप्त है क्योंकि पंक्ति और कालम शीर्षकों से व्याख्यात्मक विषय को दोहराने की आवश्यकता नहीं रहती। क्योंकि आंकड़ों के साथ कोई पाठ प्रस्तुत नहीं होता, इसलिए प्रस्तुति अधिक सक्षिप्त है। मदों की स्टब (बाएं हाथ का कालम और उसका शीर्षक) और बक्स शीर्ष (अन्य कालमों के शीर्षकों) में युक्तिपूर्ण व्यवस्था से सारणी स्पष्ट और पढ़ने में सरल हो जाती है। आंकड़ों के लिए स्तम्भों और पंक्तियों के प्रयोग से तुलनाएँ सरल हो जाती हैं।

सारणी 3.2 में एक सारणी के विभिन्न भाग कुछ अलग किए गए हैं और पहचान के लिए उन पर लेबल लगा दिए हैं। एक सारणी में कम से कम चार आवश्यक भाग होने चाहिए, स्टब, वक्तव्य शीर्ष, तथा पिण्ड। एक प्रारम्भिक टिप्पणी (देखिए सारणी 3.5) तथा एक या अनेक पाद-टिप्पणियाँ, जैसे सारणी 3.2 में, भी विद्यमान रह सकती हैं। यदि सारणी में आंकड़े मौलिक नहीं हैं तो एक स्रोत टिप्पणी भी दी जाती है जो कभी-कभी प्रारम्भिक टिप्पणी के साथ होनी है परन्तु प्रायः सारणी के नीचे, और यदि कोई पाद-टिप्पणियाँ विद्यमान हों तो सारणी की पाद-टिप्पणियों के नीचे होती है।

अर्थ-सारणिक निरूपण—जब किसी विवेचन में केवल कुछ आंकड़ों का प्रयोग होना है तो पाठ को नोडा जा सकता है और आंकड़े निम्न प्रकार से दिए जा सकते हैं :

संयुक्त राज्य के कारखानों से मोटर गाड़ियों की बिक्री की संख्या थी

1962 में 69,33,240.

89931

1963 में 76,37,728.

1964 में 77,51,822

यह विधि प्रायः प्रयोग नहीं की जाती, परन्तु यह इस दृष्टि से उपयोगी है कि आंकड़े पाठ से ऐसे अलग कर दिये जाते हैं जैसे यदि उन्हें एक या दो वाक्यों में दिया जाता तो न होते। प्रामाणिक तौर पर, आंकड़ों की, यदि वे पाठ में होते तो उसकी अपेक्षा अधिक शीघ्रता से तुलना की जा सकती है।

लेखाचित्री निरूपण—एक सीमित मात्रा में जानकारी को शीघ्र प्रस्तुत करने के लिए लेखाचित्री साधन बहुत ही उपयोगी एवं प्रभावपूर्ण है। अगले तीन अध्यायों में वक्रों, दण्ड चाटों, चित्रों, तथा अन्य सांख्यिकीय रेखाचित्रों का वर्णन है।

प्रमुख विचार

सारणियों के प्रकार—प्रयोग की दृष्टि में, सारणियाँ दो प्रकार की हैं। प्रथम तो सामान्य या सदर्भ सारणियाँ हैं जो जानकारी के संग्रह के रूप में प्रयुक्त होती हैं। ये प्रायः बहुत विस्तृत होती हैं और बहुत में पृष्ठ घेरती हैं। ऐसी सारणियों में तुरन्त सदर्भ के लिए व्यवस्थित विस्तृत जानकारी मिलती है। सामान्य सारणी में प्रविष्टियों की ऐसी व्यवस्था करने की कोई चेष्टा नहीं की जाती ताकि विशिष्ट मदों पर जोर डाला जाए, न ही प्रायः कोई व्यक्ति कानमों और पंक्तियों की व्यवस्था करने के लिए होता है ताकि अन्वेषक द्वारा वांछित तुलनाएँ महत्वपूर्ण हों। सदर्भ सारणी का प्राथमिक और प्रायः एकमात्र उद्देश्य आंकड़ों को इस प्रकार प्रस्तुत करने का होता है कि पाठक तुरन्त वैयक्तिक मदों को ढूँढ सके। सदर्भ या सामान्य सारणियाँ प्रायः एक परिशिष्ट में या प्रकाशित रिपोर्ट के एक अलग भाग में रखी जाती हैं।

दूसरे स्थान पर सारांश या पाठ सारणियाँ हैं जो प्रायः आकार में अपेक्षाकृत छोटी होती हैं और जो जितना संभव है उतना प्रभावपूर्ण ढंग से एक निष्कर्ष या कुछ घनिष्ठ रूप से संवर्धित निष्कर्षों को दिखाने के लिए बनाई जाती हैं। जबकि सदर्भ सारणी स्टब और शीर्षक में उपशीर्षकों और उप-उपशीर्षकों सहित कुछ जटिल हो सकती है, सारांश सारणी वनावट में अपेक्षाकृत सरल होनी चाहिए। यह प्रायः पाठ विवरण के साथ होती है और इसलिए पाठ सारणी भी कहलाती है। यदि एक पाठक में यह अपेक्षा की जाती है कि वह अपना ध्यान एक चालू सारांश से हटाकर एक सारणी पर लगाए तो यह आवश्यक है कि सारणी बहुत भरावट नहीं बल्कि सरल और समझने में सरल हो। बहुत अधिक पाठकों

सारणी 32

संयुक्त राज्य अमरीका के क्षेत्रों, अधीन क्षेत्रों, तथा अन्य क्षेत्रों की 1960 की जनसंख्या तथा क्षेत्रफल } शीर्षक

क्षेत्र	जनसंख्या		वर्ग मीलो में कुल क्षेत्रफल	आवृत्ति
	संख्या	कुल का प्रतिशत		
कुल	183,285,009	100 00	3,628,150	
महादेशीय संयुक्त राज्य	178,464,236	97 37	3,022,387	
हवाई...	632,772	0 35	6,424	
अलास्का	226 167	0 12	586,400	
अधीन क्षेत्र				
प्योटोरिको	2,349,544	1 28	3,435	
गुआम	67,044	0 04	206	
संयुक्त राज्य के अधीन द्वीप	32 099	0 12	133	
अमेरिकन समोआ . . .	20,051	0 01	76	
मिडवे द्वीप	2,356	**	2	
वेक द्वीप	1'097	**	3	
अन्य द्वीप*	504	**	37	
नहर क्षेत्र†	42,122	0 0	553	
कान द्वीप ‡	1,872	**	4	
प्रशांत द्वीपों का न्याय क्षेत्र ..	70,724	0 04	8,484	
विदेशों में जनसंख्या‡	1,374,421	0 75	..	

पाद-टिप्पणियाँ { * इस श्रेणी में सम्मिलित द्वीपों, तटों समुद्री चट्टानों, और अन्य चट्टानों की सूची के लिए नीचे दिए स्रोत को देखिए । कुछ द्वीपों का क्षेत्रफल उपलब्ध नहीं था ।
† पनामा गणराज्य में सम्मिलित के द्वारा संयुक्त राज्य के अधीन ।
‡ नाइजेरिया गणराज्य में घटते पर लिये ।
§ निजी व्यापार, भ्रमण इत्यादि के लिए विदेशों में गए नागरिकों की छोड़ कर, जिन को उनके निवास के सामान्य स्थान पर गणना की गई है ।
** एक प्रतिशत के नीचे आश में कम ।

स्रोत नोट { संयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो, यू० एम० सेन्सस आफ पापूलेशन 1960, पृष्ठ 1, कैरेक्टिस्टिक्स आफ दि पापूलेशन भाग A नम्बर आफ इन्ट्रिक्टिन्स, सारणी 1 पृष्ठ 13 से लिए गए आंकड़ ।

की रिपोर्टों में मंत्र सारणियों को लाँघ जाने की प्रवृत्ति होती है । इस प्रवृत्ति का सफलतापूर्वक निराकरण अभी हो सकता है जब सारणियाँ इतनी सरल बनी हुईं प्रतीत हो कि वे रुचिकर हो सकें और जब ऐसे लेखाचित्र दिए जाएँ जो आकर्षक हों और बहुत जटिल न हों । सारासं सारणी की जो उद्देश्य पूर्ण करना होता है उसके कारण से उसमें दिखाई गई मदों की जहाँ बाधित हो वहाँ जोर डालने की दृष्टि से व्यवस्था की जाएगी और कालम और पंक्तियाँ इस प्रकार रखी जाएँगी ताकि अत्यन्त महत्त्व की तुलनाएँ सरलता से हो सकें ।

एक सारांश सारणी प्रायः आवश्यक तौर पर एक या अधिक सदस्य सारणियों में रखी जानकारी को संक्षिप्त करने का परिणाम होती है, यद्यपि कभी-कभी एक सारांश सारणी, पूर्णतया या अंशरूपेण, एक या अनेक अन्य सारांश सारणियों पर आधारित हो सकती है। कभी-कभी एक सारांश सारणी सीधे अनुसूची रूप में रखे आंकड़ों से बनाई जा सकती है। एक या अनेक सारणियों से कोई अन्य सारणी बनाने में प्रयोग की जा सकने वाली विधियाँ निम्नांकित हैं।

1. वे आंकड़े जो वर्तमान समस्या के लिए महत्वपूर्ण नहीं हैं, छोड़े जा सकते हैं। इस प्रकार यद्यपि लगभग 20 राज्य ऐसे हैं जो बिटूमनी कोयले की पर्याप्त मात्राएँ उत्पादित करते हैं तो भी केवल 10 या 12 प्रमुख राज्यों के आंकड़े अलग से दिखाना पर्याप्त हो सकता है।

2. विस्तृत आंकड़ों को समूहों में मिलाया जा सकता है। उदाहरणार्थ, राज्यों के अनुसार दिखाए गए आंकड़ों को भौगोलिक विभागों में इकट्ठा किया जा सकता है। पुनश्च, अलग-अलग उद्योगों के अनुसार दिखाए गए आंकड़ों को व्यापक औद्योगिक समूहों में मिलाया जा सकता है। उदाहरण के लिए, ईंट, टाइल, और टैरा कांटा उत्पादों का विनिर्माण, सीमेंट, काँच और मिट्टी के बर्तनों का विनिर्माण, तथा सगमरमर, ग्रेफाइट, स्लेट, और ऐसे उत्पादों को खानों से निकालना, को बड़े सर्गों "मिट्टी, पत्थर, तथा काँच के उत्पाद" में मिलाया जा सकता है।

3. आंकड़ों की व्यवस्था बदली जा सकती है। इस प्रकार नगरों की वर्गीकरण के अनुसार व्यवस्था के स्थान पर नगरपालिका के आकार के अनुसार व्यवस्था की जा सकती है।

4. मौलिक पूर्ण आंकड़ों के स्थान पर या उनके अतिरिक्त, औसत, अनुपात, प्रतिशतता या अन्य परिकल्पित माप दिए जा सकते हैं। प्रतिशतताओं का एक कालम सारणी 3.4 में दिखाया गया है। यह देखने में आया कि ये आंकड़े उस सामग्री की व्याख्या सरल बना देते हैं जिन पर वे आधारित हैं।

तुलनाएँ—जबकि कालों और पक्षियों में व्यवस्था आंकड़ों की तुलना को आसान बना देती है, इस प्रकार के प्रतिपादन से महत्वपूर्ण तुलनाओं पर स्वयमेव ध्यान केन्द्रित नहीं होता। जिन आंकड़ों की तुलना की जाती है उन्हें निकटस्थ कालों या वस्तुओं में रखकर यह किया जा सकता है। इस प्रकार यह देखा जा सकता है कि पुरुषों या स्त्रियों के लिए दो जनगणनाओं में प्राप्त आंकड़ों की तुलना सारणी 3.1 से सरल हो गई है जबकि सारणी 3.3 में उनमें से प्रत्येक जनगणना में पुरुषों और स्त्रियों की संख्या की तुलना करना आसान हो जाता है।

इन सारणियों में से प्रत्येक भली-भाँति निर्मित की गई है, परन्तु प्रत्येक एक भिन्न तुलना पर ध्यान केन्द्रित करती है। सारणी निर्माण में सबसे अधिक महत्वपूर्ण विचारों में से एक यह है कि जिन आंकड़ों की तुलना करनी है, उन्हें सन्निकट सन्निधि में रखना आवश्यक है। यह स्मरण रखना चाहिए कि अक्सर दो या अधिक श्रेणियों की तब अधिक सरलता से तुलना होती है जब उन्हें साथ की वस्तुओं में रखने की अपेक्षा साथ के कालों में रखा जाए और किसी श्रेणी के अक्सर की एक दूसरे के साथ उस समय अधिक

सरलता से तुलना होती है जब उन्होंने एक पक्ति में रखने की अपेक्षा उनकी एक कॉलम में व्यवस्था की जाए।

अनुपातों, प्रतिशतताओं और तो या अन्य परिकल्पित सम्बन्धों के प्रयोग से तुलनाएँ बहुत सरल हो सकती हैं। अनुपात सारणी 7 4 में दिखाए गए हैं, प्रतिशतताएँ

सारणी 3 3

1950 और 1960 में पहाड़ी विभाग के राज्यों में लिंगानुसार निवासियों की संख्या

राज्य	1960		1950		1960
	पुरुष	स्त्रियाँ	पुरुष	स्त्रियाँ	पुरुष/100 स्त्रियाँ
कोकोरोडो	870,467	883,480	665,149	659,940	98.5
एरीजोना	654,928	647,223	379,059	370,528	101.5
उटाह	444,924	445,703	347,636	341,226	99.8
न्यू मेक्सीको	479,770	471,253	347,554	333,643	101.8
मोन्टाना	343,743	331,024	309,423	281,603	103.8
इडाहो	338,421	328,770	303,237	285,400	102.9
वयोमिंग	169,015	161,051	154,853	135,676	104.9
नेवादा	147,521	137,757	85,017	75,066	107.1

1960 के जनगणना ऑफिस संयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो यू० एस० सेन्सस आफ पापूलेशन 1960 खण्ड I कैरेंडिक्टिक्स आफ दि पापूलेशन, पृष्ठ XIII, प्रत्येक राज्य में सम्बंधित भाग की सारणी ए में दिए गए 1950 के ऑफिस संयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो यू० एस० सेन्सस आफ पापूलेशन 1950 खण्ड II कैरेंडिक्टिक्स आफ दि पापूलेशन, प्रत्येक राज्य में सम्बंधित भाग की सारणी 13 से लिए गए। पुरुष/100 स्त्रियाँ संयुक्त राज्य आधार विभाग, स्टैटिस्टिकल एक्स्ट्रैक्ट्स आफ दि यनाइटेड स्टेट्स, 1964, यू० एस० जी० पी० ओ०, वाशिंगटन डी० सी०, 1964 पृष्ठ 21 से उद्धृत।

सारणी 3 4

1960 में संयुक्त राज्य की शहरी जनसंख्या की क्षेत्रानुसार रचना

क्षेत्र	कुल शहरी संख्या	शहरी क्षेत्रों के भीतर	
		संख्या	प्रतिशत
उत्तरपूर्व	35,840,140	30,611,324	85.4
उत्तरकेंद्रीय	35,481,254	26,550,170	74.8
दक्षिण	32,160,250	21,501,114	66.9
पश्चिम	21,787,106	17,185,879	78.9
कुल	125,268,750	95,848,487	76.5

ऑफिस संयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो यू० एस० सेन्सस आफ पापूलेशन 1960 खण्ड I, कैरेंडिक्टिक्स आफ दि पापूलेशन, भाग ए, नम्बर आफ इन-हैबिटेंट्स, सारणी 17, पृष्ठ 1—26 में दिए गए।

जो वास्तव में अनुपात का एक प्रकार है (अध्याय 7 देखिए), सारणी 3 2 तथा 3 4 में सम्मिलित है। अनुपात तथा प्रतिशतताएँ उस समय विशेषतः उपयोगी होती हैं जब तुलना किए जाने वाले पूर्णक बहुत हों। ध्यान दीजिए कि सारणी 3 2 तथा 3.4 में प्रतिशतताओं के प्रयोग से अपेक्षाकृत बृहत् जनसंख्या के आंकड़ों की सहज ही तुलना की जा सकती है। जब सारणियों में मासिक घट-बढ़ दिखाई जाती है और अधिकतम तथा निम्नतम दोनों नोट की जाती हैं, तो तुलना के लिए “अधिकतम के प्रतिशत के रूप में निम्नतम” यह प्रतिरिक्त प्रविष्टि उपयोगी है। उदाहरणार्थ, मूल अंग्रेजी पुस्तक का द्वितीय संस्करण, पृष्ठ 58 देखिए। श्रीमते सारणी 14 1, 14 3, तथा 14 7 में दिखाई गई है।

बल—किसी मद को सारणी में समुचित स्थान पर रखने से उस पर उचित बल देना संभव हो जाता है, क्योंकि पाश्चात्य लोग बाएँ से दाएँ और ऊपर से नीचे पढ़ते हैं, परिणाम यह निकलता है कि स्टब में सबसे महत्व का स्थान चौटी पर होता है और बस-शीर्ष में सबसे महत्व की स्थिति दाईं ओर होती है, इसी प्रकार सबसे कम महत्व का स्थान स्टब के तल में और बस-शीर्ष के दाईं ओर होता है। नोट कीजिए कि सारणी 3 3 में इस सिद्धान्त के अनुसार पुरुषों पर बल दिया गया है, न कि स्त्रियों पर, और 1960 की 1950 की अपेक्षा अधिक महत्वपूर्ण स्थान दिया गया है।

सारणी 3 5

1963—64 में समुद्रपार देशों से संयुक्त राज्य अमरीका में विदेशी आगन्तुक*
(यान्त्री हज़ारों में)

समुद्रपार क्षेत्र तथा वर्ष	कुल	व्यवसाय	बिहार	पारगमन	विद्यार्थी
समुद्रपार देशों से आए कुल :					
1964	1,098	150	807	110	31
1963	847	122	613	84	28
यूरोप तथा भूमध्यसागरीय :					
1964	527	93	376	54	4
1963	398	75	278	40	5
बैस्ट इंडीज़, केन्द्रीय तथा दक्षिण अमरीका :					
1964	414	21	346	35	12
1963	332	20	273	28	11
अन्य समुद्रपार क्षेत्र					
1964	157	36	85	21	15
1963	117	27	62	16	12

*कैनेडा और संवत्सीको में आगन्तुकों को छोड़कर, संयुक्त राज्य में नियुक्त विदेशी सरकारों के व्यक्तियों तथा विदेशी व्यवसायियों को छोड़कर।

सर्वे आफ करन्ट बिजनेस, जून 1965, खण्ड 45, न० 6, पृष्ठ 28 में उद्धृत, संयुक्त राज्य न्याय, आवास एवं देशीकरण सेवा विभाग से लिए आंकड़े।

जाद प्राय अधिक्तरम महेन्व के या न्यूनतम महेन्व के न्यान पर रचे जात हैं, यह हम बात पर निर्भर करना है कि उन पर बन देना जादित है अथवा नहीं। जब "जोड" म्द्व में जोटी पण दिवाया जाना है तो, नारणी 3.2 के समान, अको की पहली पक्ति के नीचे एक रेखा खींचनी चाहिए। यदि जोड की प्रविष्टि म्द्व के ठन में है तो नारणी 3.4 के समान इन अको के ऊपर रेखा खींची जानी है। एक वैकल्पिक ढन यह है कि, नारणी 3.5 के समान, जोडों को अलग करन के लिए रेखा की अपेक्षा रक्ति न्यान छाटा जाता है। म्द्व में 'जोड' पन्ने का बाहू इसकी स्थिति कैसी हो हो गयासभव जगह छोड़ कर दिवाना चाहिए।

अलग-अलग अको या कालना या अको की पक्तियों पर भी नारणी 3.5 के समान माटे टाप्प के प्रयोग में बन टाना जा सकता है। जब रोजगार, विप्री या अन्य कारकी के मानिक उचार-बटाव दिवाया जाने है तो अधिक्तरम अक का मोट टाप्प में दिवाया जा सकता है और न्यूनतम को निरुद्धे टाप्प में रखा जा सकता है। प्राय निरुद्धे टाप्प का प्रयोग बन की अपेक्षा अवधार के मचन के लिए हाना है। अतः एर्वाक्चरल स्टैटिस्टिकन के कुछ निर्गमों में जनगणना के अर निरुद्धे टाप्प में हैं जबकि भेप नभी अक समुक्त राज्य कृषि विभाग द्वारा मकलिन या अनुमानित हैं। कभी-कभी निरुद्धे टाप्प का प्रयोग घाटी, अर्थात् जाद निकालने के लिए घटाई जान वाला मदो तथा जोड में न निकाली जाने वाली मदो का दिवाय के लिए भी किया जाता है।

स्टव में मदो की व्यवस्था तथा शीपक —एकन किए जा सकन वाले सांख्यिकीय अंकजो के मूलभूत स्वभाव का विचार कचे यह नोट किया गया था (पृष्ठ 3) कि अंकजो भौगोलिक, तैयिक, गुणात्मक या मात्रात्मक वर्गों की ओर मकेन कर सकन हैं। अब हमारी रुचि उन विधिनों में है जिन्हें नारणी के स्टव या बचन शीप में मदो की व्यवस्था करने में प्रयुक्त किया जा सकता है। व्यवस्था की विधि का आशिक रूप में अंकजो के स्वभाव (मूल भौगोलिक, तैयिक, गुणात्मक या मात्रात्मक) में तथा आशिक तौर पर हम विचार में कि अंकजो सकेन नारणी में प्रकट हाने हैं अथवा नारणी में, निर्धारण होगा। व्यवस्था की कई विभिन्न विधियाँ प्रयोग में लाई जा सकती हैं।

वर्णानुक्रमिक—व्यवस्था की यह विधि एक सामान्य नारणी में प्रयोग के लिए प्रगमनीय ढंग में लागू की जानी है क्योंकि इससे वैयक्तिक मदो को आसानी में ढूँढा जा सकता है। स्पष्ट ही मूल पाठ नारणियों के लिए यह उपयोगी विधि नहीं है। इसका केवल उन श्रेणियों के लिए प्रयोग हो सकता है जिनका भौगोलिक या गुणात्मक दृष्टि से वर्गीकरण हुआ है।

भौगोलिक—व्यवस्था की भौगोलिक विधि का भौगोलिक दृष्टि से वर्गीकृत श्रेणियों के लिए प्रयोग किया जा सकता है, परन्तु इसका केवल तभी अनुप्रयोग किया जा सकता है जब एक साम्य प्रयोग न्यायित हो चुका हो और केवल तभी इसका प्रयोग किया जाना चाहिए जब सांख्यिकीविद को विश्वास हो कि उसके पाठक वर्गीकरण में परिचित हैं। समुक्त राज्य और विभिन्न राज्यों के भौगोलिक विभागों का प्रथागत क्रम 1960 के समुक्त राज्य जनगणना के भाग I में समुक्त राज्य नाराज की बहुत सी नारणियों में देखा जा सकता है। यद्यपि जनगणना में राज्यों के लिए व्यवस्था की भौगोलिक विधि का प्राय प्रयोग किया गया है, तथापि हमने किमी राज्य की कार्टिनों की लगभग निरपवाद रूप से वर्णानुक्रम सूची बनाई गई है। सकेन की सुविधा के लिए एक सामान्य नारणी में भौगोलिक व्यवस्था

मुश्किल से ही उतनी सन्तोषजनक होती है जितनी कि वर्णक्रम की व्यवस्था। यद्यपि यह दलील दी जा सकती है कि भौगोलिक व्यवस्था में प्रायः साथ लगने वाले, और तुलना योग्य क्षेत्रों को साथ-साथ रखा जाता है अतः यह स्पष्ट होना आवश्यक है कि भौगोलिक व्यवस्था में सदा ऐसा नहीं होता। यह एक माराश सारणी के लिए प्रायः व्यवस्था की अच्छी विधि नहीं है क्योंकि इस व्यवस्था में महत्वपूर्ण मदों को महत्वपूर्ण स्थितियों में नहीं रखा जाता।

परिमाण—एक माराश सारणी में मदों की व्यवस्था की एक अति सन्तोषजनक विधि उन्हें आकार के अनुसार सूची में रखने की है ताकि प्रायः सबसे बड़ी मद सर्वप्रथम हो परन्तु कभी-कभी इसमें विपरीत क्रम में भी रखा जाता है। सारणी 3.3 के स्तब में दिखाए गए राज्य 1950 में परिमाण के क्रम से दिए गए हैं। जब सबसे बड़ी मद सर्वप्रथम रखी जाती है तो (सूच्य की दृष्टि से) सबसे महत्वपूर्ण मदों को सबसे अधिक महत्व की स्थितियों में रखा जाता है। एक सामान्य सारणी में आकार के अनुसार मदों की व्यवस्था उपयोगी नहीं है क्योंकि इससे वैयक्तिक मदों को ढूँढ़ना उतना सरल नहीं होता जितना वर्णक्रम व्यवस्था में होता है। भौगोलिक या गुणात्मक दृष्टि से वर्गीकृत आंकड़ों की परिमाण के अनुसार व्यवस्था की जा सकती है। इसी प्रकार कालक्रम में वर्गीकृत आंकड़ों की भी व्यवस्था की जा सकती है, परन्तु जब उनकी परिमाण के अनुसार व्यवस्था की जाती है तो उनका कालक्रम नष्ट हो जाता है।

ऐतिहासिक—कालक्रम के आधार पर वर्गीकृत आंकड़ों की प्रायः कालक्रमानुसार या ऐतिहासिक दृष्टि से व्यवस्था की जा सकती है। जब वर्षों की सूची बनाई जाती है तो सबसे हाल की या सबसे पहले की तिथि सर्वप्रथम दिखाई जा सकती है। परन्तु महीनों की सूची प्रथमानुसार सबसे पहले जनवरी से बनाई जाती है। जब ऐतिहासिक व्यवस्था की आवश्यकता होती है तो यह या तो सामान्य या मूल पाठ सारणियों में प्रयोग की जा सकती है। ऐतिहासिक व्यवस्था का प्रयोग अध्याय 12 की विभिन्न सारणियों के स्तब में किया गया है।

प्रयागत—कुछ आंकड़ों की जो मौनिक तौर पर गुणात्मक होते हैं, प्रायः प्रयागत वर्गों के अनुसार व्यवस्था की जाती है। निर्यात और आयातों का प्रायः पाँच श्रेणियों में वर्गीकरण किया जाता है—कच्चा माल, कच्चा खाद्य, विनिर्मित खाद्य, अर्ध-विनिर्माण तथा अन्तिम विनिर्माण। मध्यम राज्य अमेरिका की जनसंख्या को जब तयकथित “जाति के मूलस्थान” के आधार पर वर्गों में बाँटा जाता है तो इसका प्रायः निम्न वर्गों में उपविभाजन होता है : देशज गोरे, विदेश में जन्मे गोरे, नीग्रो, भारतीय, जापानी, चीनी, तथा “शेष सब”। इनकी प्रायः दिए गए क्रम से सूची बनाई जाती है। जब सारणी में एक “शेष सब” वर्ग आता है तो यह प्रायः स्तब में सबसे नीचे या बक्स शीर्ष में दाईं ओर रखा जाता है। अच्छा सांख्यिकीय व्यवहार कहता है कि “शेष सब”, “मिश्रित”, या “अप्रतिवेक्षित” वर्ग में अपेक्षाकृत छोटी समस्याएँ सम्मिलित होनी चाहियें, अन्यथा वर्गीकरण की पर्याप्तता या आंकड़ों के एकत्रीकरण की यथार्थता पर प्रश्न उठाया जा सकता है। प्रयागत वर्गों के अनुसार व्यवस्था या तो मूल पाठ सारणी या संकेत सारणी के लिए उचित है। परिमाणात्मक आंकड़ों की वर्गों में व्यवस्था की जा सकती है, जैसा कि सारणी 8.6 के स्तब में दिखाया गया है। ऐसी व्यवस्थाएँ प्रायः सबसे छोटी समस्या के मूल्य के वर्ग से प्रारम्भ होती हैं और मूल पाठ सारणी या संकेत सारणी में प्रयुक्त की जा सकती हैं।

क्रमिक—मदों को इस प्रकार रखा जाता है कि अन्तिम अंक पहले दिए गए अकों से तर्कमग्न ढंग से विस्तृत होता है। उत्तरोत्तर व्यवस्था का एक उदाहरण एक सारणी

के वक्म शीर्ष म दिवाया गया या जिमम एक् वर्ष मे समुक्त राज्य मे हडतालों की सग्या के मासिक आंकडे प्रस्तुत किए गए। बक्म शीर्ष मे उत्तरोत्तर शीर्षक थे

पूर्व मास से चालू	मास मे प्रारम्भ	मास के दौरान चल रही	मास मे समाप्त	मास के अन्त मे शेष
-------------------	-----------------	---------------------	---------------	--------------------

उत्तरोत्तर व्यवस्था मूल पाठ या सकेत सारणी दोनों के लिए उपयुक्त है।

सत्यात्मक—नगरो के बाडों का नाम प्राय वाडें 1, वाडें 2, इत्यादि रखा जाता है। जब ऐसे उपविभागों के लिए आंकडे दिवाए जाते हैं तो प्राय सत्यात्मक व्यवस्था का अनुमरण किया जाता है। कभी-कभी काउन्टियों की प्रसीमाएँ और जिलों की सत्याएँ लगी होती है, कारखाने के विभागों और विक्तेनाओं के इलाकों या विक्रय क्षेत्रों को भी सत्यात्मक नामों से पहचाना जा सकता है। यह विधि मूल पाठ या सकेत सारणी किसी में भी आ सकती है। श्रेणियों को भी गई मग्याएँ किसी आधारभूत व्यवस्था को पहचानने में सहायक प्राय लेवल मात्र होती हैं। उदाहरणार्थ, एक जूते के कारखाने में, विभाग 1 कटाई विभाग था, विभाग 2 फिटिंग विभाग, विभाग 3 लास्टिंग विभाग, इत्यादि।

व्यवस्था की विभिन्न विधियाँ प्रयोग करते समय याद रखिए कि सकेत सारणी में सकेत की अधिकतम सुविधा की दृष्टि से मदों की व्यवस्था होनी चाहिए, जब कि मूल पाठ सारणी में महत्वपूर्ण मदों पर बल देने और उचित तुलनाओं पर बल देने की दृष्टि से व्यवस्था होनी चाहिए।

सारणी निर्माण का व्यौरा

शीर्षक तथा पहचान—प्रत्येक सारणी के साथ एक शीर्षक होना चाहिए और यह रीति के तौर पर सारणी के ऊपर रखा जाना है। शीर्षक की शब्द-रचना स्पष्ट होनी चाहिए और इसे संक्षेप में यह बताना चाहिए कि अधिक महत्वपूर्ण बातें पहले कही जाएँ और मदों की किस प्रकार व्यवस्था की गई है और कौन-सी कालावधि ली गई है इनसे सर्वाधिक बक्तव्य धन की ओर रखे जाएँ। प्राय शीर्षक क्रम से बताता है 'क्या, कहाँ, कैसे वर्गीकृत, और कब'। शीर्षकों के उदाहरण इस अध्याय की विभिन्न सारणियों में दिखाए गए हैं। यह ध्यान दिया जाए कि जब शीर्षक में कई पक्तियों के प्रयोग की आवश्यकता होती है तो एक विपर्यय सूची-स्तम्भ व्यवस्था का प्रयोग किया जाता है।

यदि शीर्षक संख्या है तो प्रमुख शीर्षक के ऊपर "सूचक शीर्षक" रखना, या कभी-कभी पूर्ण शीर्षक के स्थान पर सूचक शीर्षक रखना लाभकारी हो सकता है। यह छोटा शीर्षक सारणी में आंकड़ों के केवल मात्र सामान्य स्वभाव को बताना है। सारणी 71 के लिए एक सूचक शीर्षक "1963 और 1964 में समुक्त राज्य में नए निर्माण" हो सकता है।

जब किसी अध्ययन में एक से अधिक सारणियाँ सम्मिलित हो तो सारणियों को लगातार सख्याएँ देना वांछित है ताकि प्रत्येक को शीर्षक के स्थान पर सख्या से पहचाना जा सके।

प्रारम्भिक तथा पाद-टिप्पणियाँ—एक सारणी के साथ एक प्रारम्भिक टिप्पणी, एक या अधिक पाद-टिप्पणियाँ और एक श्रोत टिप्पणी सलम्न हो सकती हैं। प्रारम्भिक टिप्पणी ठीक शीर्षक के नीचे और छोटे-मोटे कम महत्व के टाइप में रखी जाती है। प्रारम्भिक

टिप्पणी में सम्पूर्ण सारणी या इसके महत्त्वपूर्ण भाग के सम्बन्ध में व्याख्या होती है, जैसा कि सारणी 3 5 में है।

वैयक्तिक अको या एक कॉलम या अको की पंक्ति के सबंध की व्याख्या पाद-टिप्पणियों में दी जानी चाहिए। स्टब प्रविष्टियों और कॉलम शीर्षकों के सबंध की पाद-टिप्पणियों का संकेत सख्याओं द्वारा किया जा सकता है, परन्तु अको से सम्बन्धित पाद-टिप्पणियों की पहचान किमी चिह्न (*, †, ‡, इत्यादि) से होनी चाहिए, जैसा कि सारणी 3 2 में है, या किमी अक्षर से, परन्तु अधिमानत किसी संख्या द्वारा नहीं। इस पुस्तक में अको, स्टब प्रविष्टियों, कॉलम शीर्षकों और सारणी शीर्षकों से संबंधित पाद-टिप्पणियों के लिए चिह्न प्रयुक्त किए गए हैं।

स्रोत-टिप्पणियाँ—जैसे पहले संकेत किया गया है, स्रोत टिप्पणी शीर्षक के नीचे या पाद-टिप्पणियों के नीचे भी सकती है। इस पाठ में प्रायः दूसरी कार्य-प्रणाली का अनुकरण किया गया है। सारणी में रखे गए आंकड़े प्रायः वही सामग्री नहीं होगी जो संक्षेपक ने इकट्ठी की है। प्रायः एक या अधिक प्रकाशित या अप्रकाशित स्रोतों से लिए गए होंगे। स्रोत-टिप्पणी पूर्ण होनी चाहिए और इसमें लेखक, शीर्षक, पृष्ठ, प्रकाशक, तथा तिथि देने चाहिए। उद्धृत आंकड़ों के स्रोत का उल्लेख करना शिष्टता मात्र ही नहीं है, बल्कि इस जानकारी में पाठकों को आंकड़ों की विश्वसनीयता का कुछ विचार प्राप्त होता है और उसके लिए उद्धृत अको की यथार्थता आंकड़ों के लिए या अतिरिक्त जानकारी प्राप्त करने के लिए मौलिक स्रोत देखना संभव हो जाता है।

कभी-कभी आंकड़े प्राथमिक स्रोत की अपेक्षा गौण स्रोत से लिए जाते हैं, क्योंकि गौण स्रोत अधिक सुविधाजनक हो सकता है। ऐसी स्थिति में दोनों स्रोतों का उल्लेख करना वांछित हो सकता है, उदाहरण के लिए, 'स्रोत - नेशनल बोर्ड ऑफ फायर अडरगाइजर्स, जैसाकि स्टैटिस्टिकल एंक्क्वैरिड ऑफ दि यूनाइटेड स्टेट्स, 1964 में पृष्ठ 482 पर उद्धृत है।' सारणी 3 5 देखिए।

एक मारणी के लिए आंकड़े कभी-कभी दो या अधिक विभिन्न स्रोतों से लिए जा सकते हैं। जब ऐसा किया जाता है तो यह आवश्यक है कि आंकड़े तुलना योग्य हों। आंकड़ों की तुलनात्मकता के महत्त्व का विवरण अध्याय 2 में दिया गया है। इस विषय पर इस समय अधिक कहना आवश्यक नहीं है।

जब किमी स्रोत में स्पष्ट अनुद्धियाँ मिलती हैं तो तथ्य की प्रतीति देना अच्छा है। एक बार मासिक लेबर रिव्यू में दि ओरियन्टल ईकनॉमिस्ट से एक सारणी छापी गई जिसमें दिखाया गया कि एक वर्ष में जापान में 10 उद्योगों में कुल वेतन 64,73,40,199 येन था, परन्तु एक पाद-टिप्पणी में संकेत किया गया कि यदि 10 उद्योगों में से प्रत्येक के लिए दिए गए अको को जोड़ा जाए तो परिणाम 64,74,30,199 येन है।

प्रतिशतताएँ—जब किमी सारणी में प्रतिशतता का प्रयोग होता है तो स्टब या शीर्षक प्रविष्टि में स्पष्ट संकेत होना चाहिए कि प्रतिशतता का सबंध किन आंकड़ों से है। इस प्रकार केवल "प्रतिशत" शब्द का परिहार होना चाहिए, इसके स्थान पर "योग का प्रतिशत" "वृद्धि या कमी का प्रतिशत," इत्यादि वहे। कभी कभी मारणियों को "संख्या" विभाग (पूर्ण अको को दिखाने वाला) और "प्रतिशत" विभाग में बाँटा जाता है, जैसा सारणी 8 6 में है। इस सारणी और सारणी 7 2 में प्रतिशतनाओं की ओर संकेत करने वाले पर्याप्त शीर्षकों के प्रयोग का उदाहरण है।

जब अलग अलग प्रतिशतताएँ एक प्रतिशत के दसवें भाग तक ठीक निखी जाती हैं, जैसाकि रिवाज है, तो जोड़ प्रायः 100 0 से थोड़ा सा अधिक या कम होगा क्योंकि पूर्णांकन करते समय घनात्मक या ऋणात्मक शेष इकट्ठे किए जाते हैं। यदि प्रतिशतताएँ एक प्रतिशत के सौवें या हजारवें भाग तक दर्ज की जाएँ तो जोड़ 100 0 के अधिक निकट होगा। यद्यपि “योग का प्रतिशत” कालम का जोड़ 100 0 से थोड़ा अधिक या कम हो तो भी जोड़ 100 0 के बराबर दिखाया जाता है, क्योंकि यदि विस्तार में हिमाब किया जाए तो अलग-अलग प्रतिशतता का यही परिणाम होगा। यदि कोई जोड़ 99 8 से कम या 100 2 से अधिक बनता है तो गमती देखने के लिए गणनों को पुनः देखना उचित होता है।

संस्थाओं का पूर्णांकन—भ्राति दूर करने और तुलनाएँ सरस बनाने के लिए बहुत से अंकों की संख्याओं का पूर्णांकन किया जा सकता है। संस्थाओं का उस समय भी पूर्णांकन किया जा सकता है जबकि सकलनकर्ता यह अनुभव करता है कि वे अंतिम अंक तक सही न होकर केवल हजारों या लाखों के रूप में सही हैं। इस तथ्य की ओर ध्यान दिलाने के लिए कि वे अनुमान थे सारणी 17.2 में दिखाए गए उत्पादन अंकों का पूर्णांकन किया गया (परन्तु कोई अंक छोड़े नहीं गए)।

जब संस्थाओं का पूर्णांकन किया जाता है तो इस संबंध का कथन प्रारम्भिक टिप्पणी में या स्टब में अथवा बक्स शीर्ष में किया जाना चाहिए। शब्दावली हो सकती है, “, दस लाखों में,” “0,00,000 छोड़ कर,” इत्यादि। सारणी 3 6, 7.1 तथा 7 2 में पूर्णांकित संस्थाएँ हैं और इस तथ्य का उल्लेख प्रारम्भिक टिप्पणी में या उचित बक्ष-शीर्ष में किया गया है।

उदाहरण के लिए, यदि किन्हीं आँकड़ों को श्रेणी को हजार डालरों में व्यक्त करना है तो पूर्णांकन निकटतम हजार में किया जाता है। इस प्रकार 2,648,302 डालर, 2,648 (हजार) डालर हो जाएगा और 7,226,782 डालर 7,227 (हजार) डालर बन जाएगा। यदि शीर्षक “हजार डालरों में” सारणी के बक्स शीर्ष (या स्टब) में प्रारम्भिक टिप्पणी के रूप में आ जाता है तो डालर चिह्न आवश्यक नहीं रहता।

प्रायः पूर्णांकन से कोई बड़ी त्रुटि नहीं आ जाती। यदि संस्थाओं की प्रत्येक श्रेणी का पूर्णांकन किया जाए तो कुछ बढ़ जाएंगी और कुछ कम हो जाएंगी, परन्तु इस प्रकार आई हुई त्रुटियों में एक दूसरे का प्रतिकुलन करने की प्रवृत्ति होती है। साथ ही यह अनुभव किया जा सकता है कि किसी बड़ी संस्था के सब अंकों को दिखाना भ्रामक शुद्धता का आभास देता है। उदाहरणार्थ, 1960 में संयुक्त राज्य की जनसंख्या 17,93,23,175 व्यक्ति आँकी गई। परन्तु ये आँकड़े इकाइयों तक या सैकड़ों तक भी कठिनाई से ही ठीक हो सकते थे। तो भी यह कहा जा सकता है कि 17,93,23,175 आँकड़े वे हैं जो सर्वोत्तम प्राप्त विधियों से प्राप्त किए गए हैं और इसलिए संभवतः किन्हीं भी पूर्णांकित आँकड़ों से अधिक सही हैं। इन दो दृष्टिकोणों के गुण-दोषों से निरपेक्ष छ (या कम) महत्वपूर्ण अंक वांछित तुलनाओं के लिए प्रायः काफी सही हो सकते हैं। पूर्णांकन (तथा महत्वपूर्ण अंकों) का अधिक उल्लेख पृष्ठ—126—127 पर तथा परिशिष्ट न में किया गया है।

जब परिकल्पित मूल्यों, जैसे जोड़ों, प्रतिशतताओं, और औसतों को पूर्णांकित आँकड़ों की सारणियों में दिखाया जाता है तो यदि संभव हो तो इन मूल्यों का पूर्णांकन करने से पूर्व मूलभूत आँकड़ों से इनका गणन किया जाना चाहिए।

योग—हमने पहले देखा है कि योग जब अत्यधिक महत्त्व के हो तो वे स्टब में ऊपर की ओर और शीर्षक में बाईं ओर रखे जा सकते हैं। जब जोड़ों पर बल देना वांछित न हो, तो उन्हें स्टब में नीचे की ओर तथा शीर्षक में दाईं ओर रखा जा सकता है।

सारणी 3 5 में जोड़ के कॉलम तथा जोड़ पंक्ति दोनों हैं। इस प्रकार की व्यवस्था के परिणामस्वरूप एक सख्या प्राप्त होती है जिसे बम्भी-कभी “कुल जोड़” या “जोड़ा हुआ कुल जोड़” कहा जाता है। यह तथ्य कि आंकड़ों से जब उन्हें ऊपर से नीचे तथा समस्तर पर जोड़ा गया एक ही जोड़ प्राप्त होता है, कोई निश्चित बीच नहीं है, क्योंकि हो सकता है कि दो या अधिक परिपूरक गलतियाँ हो गई हो। परन्तु यह प्रायः नहीं होता। हमारे पास निश्चित प्रमाण है कि या तो गलतियाँ की नहीं गई या एक में अधिक की गई।

इकाइयाँ—सारणी के एक स्तम्भ या पंक्ति में सख्याओं के माप की इकाइयाँ प्रायः स्वतः स्पष्ट हो सकती हैं। यदि ऐसा न हो तो सारणी 7 2 के समान तो इकाई की प्रकृति

सारणी 3.6

जनवरी—दिसम्बर 1964 में स्टॉक बाजार ग्राहक ऋण*
(10 लाखों में)

मास	संयुक्त राज्य सरकार के प्रतिरिक्त अन्य कुल ऋणपत्र	न्यूयार्क स्टॉक बाजार की फर्मों पर शुद्ध ऋण शेष		क्रय करने और रखने के लिए दलाली एवं व्यापारियों के प्रतिरिक्त अन्यो को बैंक ऋण	
		सं० रा० सरकार ऋणपत्र	अन्य ऋणपत्र	सं० रा० सरकार ऋणपत्र	अन्य ऋणपत्र
जनवरी . . .	\$ 7,250	\$22	\$5,524	\$108	\$1,726
फरवरी . . .	7,120	21	5,384	97	1,736
मार्च	7,141	21	5,366	97	1,775
अप्रैल	7,314	21	5,510	101	1,804
मई	7,277	19	5,439	96	1,838
जून	7,229	18	5,370	94	1,859
जुलाई	7,160	25	5,289	70	1,871
अगस्त	7,096	21	5,187	69	1,909
सितम्बर	7,142	19	5,221	81	1,921
अक्तूबर	7,101	20	5,185	69	1,916
नवम्बर	7,108	20	5,160	64	1,948
दिसम्बर	7,053	21	5,079	72	1,974

* प्रथम तीन स्तम्भों में मास के अन्त के लिए आंकड़े हैं, शेष अन्तिम बुधवार के लिए हैं।

फेडरल रिज़र्व व्लेडिन, वॉशिंगटन, डी० सी०, जनवरी 1965, पृष्ठ 143 से लिए आंकड़े।

का पाद-टिप्पणी या स्वप्न शीर्षक में स्पष्ट कर देना चाहिए। यदि व्याख्या मारणी की सब सन्धाओं पर लागू होती हो तो उसे प्रारम्भिक टिप्पणी के रूप में दिया जा सकता है। झलर-चिह्न के प्रयोग के कारण अधिक इकाइयों के अंकित सामान्यतः स्वतः स्पष्ट होते हैं। ध्यान दीजिए कि मारणी 36 में यह चिह्न स्वप्न में केवल प्रथम प्रविष्टि के साथ ही आया है।

मारणी का आकार और स्वरूप—प्रायः मारणी इस प्रकार अभिव्यक्ति की जानी चाहिए कि यह न बहुत लम्बी और संकुचित हो, न बहुत छोटी और चौड़ी हो। मारणी को जिस स्थान पर आना है उसके अनुसार ठाना जाना भी आवश्यक है। प्रायः यह परिनीमा पुस्तक या रिपोर्ट के पृष्ठ के रूप में आती है। हाँ, मारणी के लिए पृष्ठ की मारी लम्बाई या चौड़ाई घेरना आवश्यक नहीं। यदि शिष्ट हुए स्थान की अपेक्षा मारणी बहुत बड़ी है तो उसे कई छोटी मारणियों में बाँटा जा सकता है। टाइप के आकार को छोटा करके मारणी को पृष्ठ पर लाना संभव हो सकता है, परन्तु छोटा करना मुवाच्यता की बीमारी नहीं होना चाहिए। यदि मुझे हुए पृष्ठ का प्रयोग वांछित नहीं है तो मारणी की दो सामान्य नामों के पृष्ठों पर व्यवस्था की जा सकती है। जितने वांछित में पृष्ठों की पूर्णतया मीट मिटान की कठिनाई के कारण, दूसरे पृष्ठ पर प्रायः स्वर दोहराया जाता है। जब मरकेन मारणियाँ कई पृष्ठों पर चालू रहती हैं तो उन्हें ऊर्ध्वरूप या क्षैतिज रूप में मोड़ा जा सकता है। दाना में से कई भी स्थिति है, प्रत्येक पृष्ठ पर पूर्ण स्वर और शीर्षक प्रविष्टियाँ आनी चाहिए, शीर्षक प्रत्येक पृष्ठ पर दोहराया जाना चाहिए और पाद-टिप्पणियाँ समुचित पृष्ठ के नीचे आ सकती हैं, या मारणी के अन्त में इकट्ठी की जा सकती हैं।

किसी मारणी के क्षैतिज विस्तार का निर्धारण निम्न बातों से ध्यान में रखकर किया जा सकता है

(1) स्वर की चौड़ाई, जिसका निर्धारण सबसे दीर्घ प्रविष्टि से होता है। (स्थान बचाने के लिए एक बहुत दीर्घ प्रविष्टि का दो या अधिक पंक्तियों में रखा जा सकता है, मारणी 35 के स्वर को देखिए।)

(2) प्रत्येक पंक्ति की चौड़ाई, जिसका निर्धारण प्रत्येक वक्त्र शीर्ष में सबसे बड़ी सन्धा या प्रविष्टि से होता है। (घट्टों के बीच में हाइफन लगाकर, स्वप्न शीर्षक में किसी प्रविष्टि को क्षैतिज रूप से छाटा और ऊर्ध्वरूप से बसा किया जा सकता है।)

(3) रेखांकन।

(4) हाशिए।

ऊर्ध्वरूप विन्ध्य को निम्न बातों का विचार करके निश्चित किया जा सकता है।

(1) शीर्षक, प्रारम्भिक टिप्पणी, पाद टिप्पणियों, और खोल-टिप्पणी के लिए अपेक्षित स्थान। क्योंकि शीर्षक की पहली पंक्ति चौड़ाई में मारणी से नहीं बटनी चाहिए, इसलिए स्वप्न शीर्षक के लिए कई पंक्तियों की आवश्यकता हो सकती है।

(2) स्वर या वक्त्र शीर्ष में शीर्षक के लिए आवश्यक पंक्तियों की संख्या, जिसके लिए सबसे अधिक ऊर्ध्वरूप स्थान की आवश्यकता होती है।

(3) मारणी के पिण्ड में पंक्तियों की संख्या।

(4) रेखांकन।

(5) हाशिए।

रेखांकन—इस पाठ में अधिकतर सारणियाँ एक रेखा से रेखांकित दिखाई गई हैं और दोनों ओर खुली हैं। कभी-कभी दो रेखाओं का रेखांकन प्रयोग में आता है, परन्तु दोहरी रेखाओं से हस्तरेखांकित या छपी सारणियाँ कुछ जटिल प्रतीत होती हैं। दोनों दिशाओं की ओर से सारणियों को विरल ही बन्द किया जाता है और कभी-कभी उनकी एक दिशा खुली और एक बन्द नहीं होनी चाहिये। ऐसा प्रतीत होता है कि मूल पाठ सारणियों को बिना रेखांकन के, चाहे वह ऊर्ध्वाधर हो या क्षैतिज, प्रयोग करने की प्रवृत्ति बढ़ रही है।

इस पुस्तक में तथा अन्यत्र सारणियों के परीक्षण से पता चलेगा कि

(1) सारणी के पिण्ड में क्षैतिज रेखाएँ प्रयुक्त नहीं की जाती, मिलाव उस स्थिति के जब जोड़ अलग करने हो और प्रायः जब सारणी को भिन्न भागों में अलग करना हो।

(2) प्रमुख और गौण बक्स शीर्षों को अलग करने वाली क्षैतिज रेखाएँ स्टब शीर्षक में जानू नहीं रहती।

(3) बक्स शीर्षों को अलग करने वाली सभी ऊर्ध्वाधर रेखाएँ केवल उन बक्स शीर्षों के बीच में आती हैं जिन्हें वे अलग करती हैं, वे इन बक्स शीर्षों के ऊपर नहीं आती।

आंख का मार्गदर्शन—प्रत्येक तीन, चार, या पाँच पंक्तियों के बाद एक रेखा छोड़ देने से, जैसा कि सारणी 3 6 में है, आंख के लिए सारणी में पंक्तियों का अनुसरण करना आसान बन जाता है। सारणी के स्टब में संकेतकों का प्रयोग भी सहायक होता है।

शून्य—सारणी में शून्य दिखाने की प्रथा नहीं है (परिकल्पन प्रपन को छोड़कर)। जब किन्हीं मामलों का अस्तित्व न मिला हो या जब किसी मद का मूल्य शून्य हो तो इस तथ्य का संकेत बिन्दुओं (.) या छोटे डैशों (- -) से किया जा सकता है। जब सूचना की कमी के कारण प्रविष्टि के लिए कोई अब न हो तो उस तथ्य के संकेत के लिए पाद-टिप्पणी का प्रयोग करना चाहिये।

टाइप का आकार और प्रकार—टाइप (या अक्षरों) के आकार और प्रकार में बहुत अधिक भिन्नता वांछित नहीं है। प्रायः शीर्षक सबसे प्रमुख होना चाहिए और यह प्रायः अपेक्षी की स्थिति में बड़े और छोटे कैपिटल अक्षरों में या मोटे टाइप में रखा जाता है। स्टब और शीर्षक में सूचन भदे और सारणी के पिण्ड में एक प्रायः एक ही आकार के टाइप में रखे जाते हैं। पाद-टिप्पणियाँ, प्रारम्भिक टिप्पणी और अंत-टिप्पणी प्रायः सारणी के पिण्ड में प्रयुक्त टाइप में छोटे टाइप में रखी जाती हैं।

सांख्यिकीय रिपोर्टें

सांख्यिकीय रिपोर्टें बनाते समय, सारणियों को तैयार करने का ढंग आंशिक रूप से रिपोर्ट की आवश्यक प्रतियों की सख्या और अंशतः उन पर आने वाले खर्च में तय होगा। सारणियाँ हस्तलिखित, टाइप की हुई, अनुलेखाचित्रित, बहुलेखाचित्रित, हस्तलिखित या टाइप की गई सारणियों से फोटोस्टैट या फोटोग्राफ के ढग से पुन तैयार की गई प्रतिकृति, या छपी हुई हो सकती हैं।

अपेक्षाकृत सरल सारणियों को छोड़कर अन्य सारणियाँ तैयार करने के लिए यन्त्र छोड़ने की लोच और टाइप के आकार के कारण साधारण टाइप की मशीन के

प्रयोग में विशिष्ट अंगुलिधा है। एक 'पाइका' टाइप वाली और एक 'इलाइट' टाइप वाली दो टाइप की मशीनें प्रयोग करके अधिक लोच सार्ई जाती है। स्टब प्रविष्टियों और पिण्ड के लिए 'इलाइट' टाइप का प्रयोग करने कुछ स्थान बचाया जा सकता है। चर अन्तर छोड़ने वाली और विभिन्न प्रकार और आकार की टाइप वाली टाइप की मशीन प्रयोग करके सारणियों की योजना में कुछ अधिक लोच सार्ई जा सकती है।

यदि किसी रिपोर्ट की केवल कुछेक ही प्रतियाँ चाहिएँ और यदि सारणियाँ सरल हैं तो सारणियाँ और सलग्न पाठ टाइप किया जा सकता है तथा कार्बन प्रतियाँ बनाई जा सकती हैं। यदि कई दर्जन प्रतियाँ चाहिएँ तो खुले हाथ में लिखी या टाइप की गई सामग्री की फोटोस्टेंट प्रतियाँ बनाई जा सकती हैं। इस विधि से छोटा करना या बड़ा करना संभव है और प्रतियाँ कुछ शीघ्र प्राप्त हो सकती हैं क्योंकि इसमें कोई प्लेट बनाने की आवश्यकता नहीं होती। यदि इससे अधिक प्रतियाँ चाहिएँ तो अनुलेखाचित्रण या बहुलेखाचित्रण की विधि अपनायी जा सकती है। सारणियाँ फोटो-प्रॉफ़सेट रंग से भी बनाई जा सकती हैं जो काफी सन्तोषजनक और प्रायः छपाई से सस्ती होगी, क्योंकि इसमें टाइप सैट करने की जरूरत नहीं होती। इसमें बड़ा या छोटा करना भी संभव है तथा टाइप की हुई सामग्री कम की जा सकती है जिससे $8\frac{1}{2} \times 11$ इंच के 4 साधारण पृष्ठ (पाइका टाइप के) एक पृष्ठ पर आ जाएँगे। यह ध्यान देने की बात है कि यदि सन्तोषजनक प्रतियाँ प्राप्त करनी हैं तो टाइप की हुई प्रति थ्रेष्ठ होनी चाहिए।

4

लेखाचित्री निरूपण I :

अंकगणितीय पैमानों के प्रयोग वाले वक्र

लेखाचित्रीय विधि

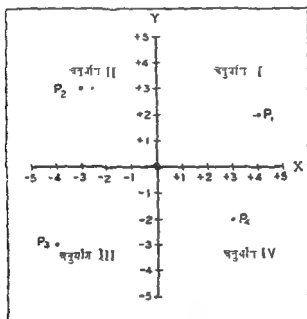
मूलपाठ, सारणी, और अर्ध-सारणी की विधियों द्वारा सांख्यिकीय आंकड़ों के निरूपण की ओर पहले ही ध्यान दिया जा चुका है। साधारणतया सांख्यिकीय आंकड़े सारणी के रूप में या चार्ट के रूप में प्रस्तुत किए जाएंगे। इस अध्याय और इसके बाद के दो अध्यायों में लेखाचित्री विधियों द्वारा सांख्यिकीय आंकड़ों के चित्रण का विवरण दिया गया है। जैसा कि इस पुस्तक के पृष्ठों को देखने से तुरन्त ही दिखाई देगा, चार्ट और लेखाचित्र ध्यान आकर्षण करने में आकड़े प्रस्तुत करने के किन्हीं भी अन्य उपायों से अधिक प्रभावी हैं। अतः पाठकों द्वारा चार्ट को छोड़ जाने की उतनी सम्भावना नहीं है जितनी सारणी को छोड़ जाने की है। एक सरल, आकर्षक, अच्छी प्रकार बनाए हुए लेखाचित्र को, जिसमें सीमित तथ्य दिखाए गए हों, समझने में भी सारणी की अपेक्षा अधिक आसानी है।

सीमित मात्रा में आंकड़े प्रस्तुत करने के लिए अपने महत्वपूर्ण प्रभाव के कारण चार्ट एक अत्यधिक उपयोगी सांख्यिकीय माध्यम बन जाता है। ता भी कुछ परिमिताओं की ओर ध्यान देना चाहिए। प्रथम तो चार्टों में उतने तथ्य नहीं दिखाए जा सकते जितने सारणी में दिखाए जा सकते हैं। सारणी में अनेक कॉलम और पंक्तियाँ हो सकती हैं, परन्तु चार्ट 4 2 की कल्पना कीजिए जिसमें छह या आठ आड़ी-तिरछी और अन्तर्वर्तित करने वाली रेखाएँ हैं और यह तुरन्त स्पष्ट हो जाता है कि कबो चार्ट में केवल सीमित मात्रा में जानकारी दिवानी चाहिए। दूसरे, यद्यपि सारणी में यथायथ मूल्या दिए जा सकते हैं, चार्ट में साधारणतः केवल सन्निकट मूल्य ही दिखाए जा सकते हैं। सारणी में हम जितने चाहें उतने अधिक अथवा दर्ज कर सकते हैं परन्तु चार्ट पर हम केवल सन्निकट मूल्य लगा सकते हैं। उदाहरणार्थ, वे आंकड़े जिन पर चार्ट 4 2 आधारित है, सारणी में टूटो और दसों की ठीक संख्या के रूप में दिखाए जा सकते हैं, जबकि चार्ट में केवल हजारों में, या अधिक से अधिक सैकड़ों में दिखाए जा सकते हैं। इस प्रकार चार्ट सामान्य स्थिति की एक स्पष्ट भाँकी देने के लिए उपयोगी हैं, परन्तु सफ़मोल की नहीं। तीसरे, चार्टों को बनाने में

कुछ समय लगता है क्योंकि प्रत्येक चार्ट मौलिक चित्र होना है। परन्तु यह कठिनाई चार्ट के उस अधिक प्रभाव से समाप्त हो जाती है जो उसमें सारणी की तुलना में होता है।¹

चार्टों के प्रकार

इस पाठ में हम निम्न का विवेचन करेंगे वक्र या रेखा आरेख ; दंड चार्ट जिनमें एक विषय तुलनाएँ आती हैं, क्षेत्रफल आरेख, जिनमें द्वि-विषय तुलनाएँ आती हैं (विशेषकर वृत्ताकार आरेखों को मिलाकर जिनमें एक या द्वि-विषय तुलनाएँ या कोणों की



चार्ट 4.1. वक्र आलेखन के लिए अक्ष

तुलनाएँ आती हैं), आयतन आरेख जिनमें तृतीय विमीय के प्रत्यक्षीकरण और द्विविषय तुलनाओं की आवश्यकता होती है, चित्र लेख, जिनमें आयतन आरेख और दण्ड चार्ट दोनों के रूप आते हैं, तथा सांख्यिकीय मानचित्र। अन्य विशिष्ट प्रकार के चार्टों और कुछ उन चार्टों का जो कि लेखाचित्री हैं परन्तु सांख्यिकीय नहीं हैं (उदाहरणार्थ, सपठन एवं प्रक्रिया चार्ट), यहाँ वर्णन नहीं किया गया है परन्तु उनका विवेचन लेखाचित्री विधियाँ पर लिखी गई पुस्तकों में आता है। इस अध्याय में केवल अकर्मण्यताय पैमानों का प्रयोग करने वाले वक्रों पर विचार किया जाएगा। अगले अध्याय में लघुगुणकीय ऊर्ध्वपर पैमाने और

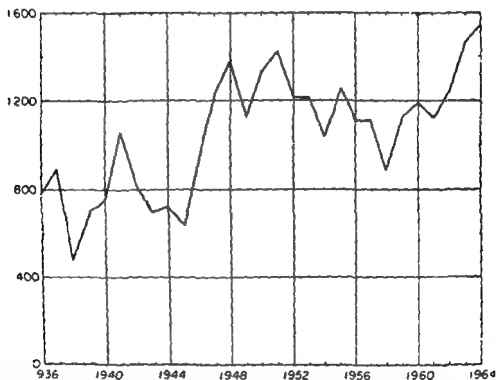
1 विनियम पत्रकार, जिसे 18वीं सदी के उत्तरार्द्ध में लेखाचित्री विधि का "नन्तान आविष्कारक" समझा जाता है, कहता है "इस विधि में प्रस्तावित लाभ और की अपेक्षा अधिक यथायं विवरण प्रस्तुत करने में नहीं है बरन नेत्रों के सामने एक चित्र [चार्ट] प्रस्तुत करके, जिसमें समयों पर, क्रमिक प्रगति और साधन परिमाणों का अत्रिक सरन और स्थायी विचार प्रस्तुत करने में है, जिसके अनुपात अभिव्यक्ति के लिए अभिप्रेत राज्या के योग से मिल सकते हैं।" ईकनामिक हिस्ट्री, फरवरी 1935, पृष्ठ 103-109 पर एच० ग्रे० कुर्बर्ग तथा हेलन एम० वाकर का "प्लेसिंग एंड डिज चार्ट्स" लेख देखिए।

अकगणितीय क्षैतिज पैमाने का प्रयोग करने वाले चक्रों की ओर ध्यान दिया जाएगा। अध्याय 6 में दण्ड चाटों, क्षेत्रफल आरेखों, आयनन आरेखों, विचलनेखों, तथा सांख्यिकीय मानचित्रों के सक्षिप्त विवरण सम्मिलित किए जाएंगे।

चक्र आलेखन

जब सांख्यिकीय आँकड़ों को चक्रों के रूप में दिखाया जाता है तो एक दूसरी को काटती हुई दो रेखाओं के संकेत से बिन्दुओं का आलेखन किया जाता है। ये रेखाएँ घड़ कहलाती हैं और चाटें 4। में दिखाई गई हैं। क्षैतिज रेखा “X-घड़” के रूप में पहचानी

दूक और बसें,
हजारों में



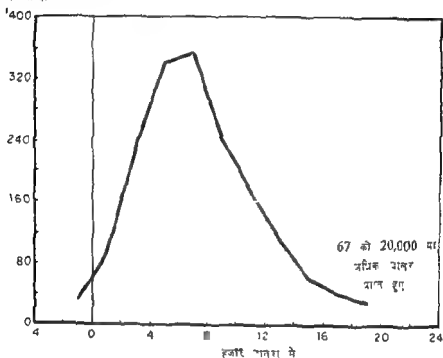
घाटें 4 2 1963—64 में संयुक्त राज्य के कारखानों द्वारा मोटर दूकों और बसों का फैक्टरी विक्रय। मोटर गाड़ी निर्माता एसोसिएशन के आटोमोबाइल फंड्स एंड फिगर, 1965 पृष्ठ 3 से लिए गए आंकड़े।

जानी है और ऊर्ध्वाधर रेखा “-X-घड़” कहलाती है। घनात्मक मूल्य X-घड़ पर शून्य के दाईं ओर और -X-घड़ पर शून्य के ऊपर की ओर रखे जाते हैं, ऋणात्मक मूल्य X-घड़ पर शून्य के बाईं ओर रखे जाते हैं तथा Y-घड़ पर शून्य के नीचे की ओर जिस बिन्दु पर दोनों घड़ एक दूसरे को काटते हैं वह Y तथा Y दोनों के लिए शून्य है और “शून्य बिन्दु,” “उद्गम बिन्दु” या केवल “मूल बिन्दु” कहलाता है। जैसे-जैसे हम इस मूल बिन्दु से परे हटते हैं, घड़ों पर घनात्मक या ऋणात्मक मूल्य बढ़ते हैं।

चार्ट 41 के दो अक्ष आनेसन क्षेत्रफल को चार भागों में बाँटते हैं जो "चतुर्थांश" कहलाते हैं। मकेत के लिए इन चतुर्थांशों को I, II, III तथा IV कहा गया है। चतुर्थांश I में वे मूल्य आते हैं जो X -अक्ष पर ऋणात्मक और Y -अक्ष दोनों पर घनात्मक हैं। चतुर्थांश II में वे मूल्य आते हैं जो Y -अक्ष पर ऋणात्मक और Y -अक्ष पर घनात्मक हैं। चतुर्थांश III में वे मूल्य आते हैं जो दोनों अक्षों पर ऋणात्मक हैं। चतुर्थांश IV उन मूल्यों के लिए है जो X -अक्ष पर घनात्मक और Y -अक्ष पर ऋणात्मक हैं।

ऑटोमीट्रिक।

के समग्र



चार्ट 43—1764 ऑटोमीट्रिक के नेट अक्ष अक्षों के ऑटोमीट्रिक एनोमिशन से लिए हुए आंकड़े। अक्षों के अक्षों के अक्षों के लिए बारबारता आंकड़ों हैं।

चतुर्थांशों में से किसी एक में आनेवाले किसी बिन्दु का स्थान इसके विषयक मूल्य के मकेत में, जो शून्य में इसकी अक्षों या X दूरी है, और इसके कोटि मूल्य के मकेत में, जो शून्य से इसकी ऊर्ध्वाधर या Y दूरी है, मालूम किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, चार्ट 41 में, प्रत्येक चतुर्थांश में एक के हिसाब में, चार बिन्दु आलेखित किए गए हैं: P_1 , $X=+4$, $Y=+2$ का प्रतिनिधि है; P_2 , $X=-3$, $Y=+3$ का संकेत करता है; P_3 , $X=-4$, $Y=-3$ है; P_4 , $X=+3$, $Y=-2$ दिखाता है।

जब समीकरणों के आलेखन के लिए संकेत के आधार के तौर पर अक्षों का प्रयोग किया जाता है तो कोई या सभी चतुर्थांश प्रयोग में लाए जा सकते हैं क्योंकि बहुत से समीकरणों के लिए X या Y , या दोनों के ऋणात्मक मूल्यों की आवश्यकता हो सकती है। परन्तु इस समय हमारी उच्च समीकरणों के अक्ष द्वारा प्रतिनिधित्व में नहीं है बल्कि प्रेरित

सांख्यिकीय आंकड़ों के आलेख द्वारा चित्रण में है। जब हमारा सबब सांख्यिकीय आंकड़ों से है तो यह स्पष्ट होना चाहिए कि दोनों X तथा Y चर प्रायः घनात्मक सध्याएँ हैं और इसलिए हम आम तौर पर केवल चतुर्थांश I का प्रयोग करेंगे। चार्ट 4.2 जिसमें कुछ वर्षों के समय में संयुक्त राज्य में मोटर ट्रकों और बसों का फैक्टरी विपणन दिखाया गया है, एक ऐसे वक्र का उदाहरण है जो पूर्णरूपेण चतुर्थांश I में आता है।

कभी-कभी चतुर्थांश I के साथ चतुर्थांश II तथा IV का प्रयोग किया जाता है। चार्ट 4.3 में एक ऐसा वक्र दिखाया गया है जो चतुर्थांश I तथा II का प्रयोग करता है। चार्ट 4.4 का वक्र कुछ चतुर्थांश I में और कुछ चतुर्थांश IV में आता है। क्योंकि चतुर्थांश III में दोनों X तथा Y मूल्य ऋणात्मक होते हैं, इसलिए उस चतुर्थांश का बहुत ही कम प्रयोग होता है।

वक्रों द्वारा प्रदर्शित आंकड़ों के प्रकार

पहले यह ध्यान में आ चुका है कि सांख्यिकीय आंकड़ों का वर्गीकरण कालानुक्रमी, भौगोलिक, सध्यात्मक, या गुणात्मक विशेषताओं के अनुसार किया जा सकता है। वक्रों का प्रायः काल श्रेणियों के चित्रण और बारबारता वटनों के प्रदर्शन के लिए प्रयोग किया जाता है (जो मध्यात्मक दृष्टि से वर्गीकृत आंकड़ों में सबसे कहीं अधिक महत्वपूर्ण हैं), हाँ यद्यपि, जैसा कि अगले अध्यायों में दिखाया गया है, अन्य प्रकार के आलेख भी लागू होते हैं। गुणात्मक दृष्टि से और विशेषकर भौगोलिक दृष्टि से वर्गीकृत आंकड़े वक्रों द्वारा बिल्कुल ही चित्रित किए जाते हैं, इनके स्थान पर, जैसा कि आगे संकेत किया जाएगा, दंड चार्टों और अन्य विधियों का प्रयोग किया जाता है।

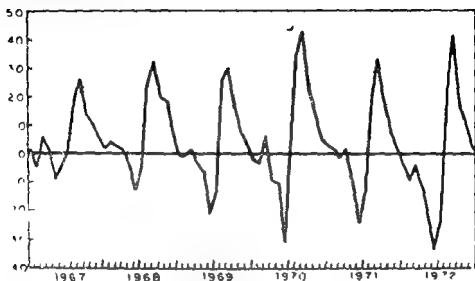
काल श्रेणी वक्र—काल श्रेणी के आन्वयन की विधि दिखाए जा चुके आंकड़ों के प्रकार पर निर्भर करती है। हम कालावधि आंकड़ों और कालविन्दु आंकड़ों में भेद कर सकते हैं। कालावधि आंकड़े, जैसा कि प्रति मास कुल बिक्री, प्रति वर्ष औसत मासिक बिक्री, तथा वर्ष भर में औसत मूल्य, समय की अवधि की ओर संकेत करते हैं। कालविन्दु आंकड़े, जैसे कि सूची मूल्य, मूल्य दरें, या तापमान अंक, वे होते हैं जो समय के निश्चित बिन्दु की ओर संकेत करते हैं। जब कभी कालानुक्रमी आंकड़े वक्र के द्वारा दिखाए जाते हैं तो वर्ष, मास, सप्ताह, दिन या अन्य कालानुक्रमी इकाइयाँ क्षैतिज अक्ष पर दिखाई जाती हैं, अन्य श्रेणी जो समय के साथ बदलती है, ऊर्ध्वाधर अक्ष पर रखी जाती है।

चार्ट 4.2 तथा 4.18 में कालावधि आंकड़े दिखाए गए हैं। जब इस प्रकार के वार्षिक आंकड़ों का आलेखन होता है तो क्षैतिज पैमानों पर तिथियाँ ऊर्ध्वाधर रेखाओं के नीचे खींची जा सकती हैं, जैसा कि चार्ट 4.2 में है, या स्थानों के नीचे, जैसा कि चार्ट 4.18 के बाएँ हाथ के भाग में है। दोनों में से कोई भी विधिप्रयोग में लाई जा सकती है। स्थानों पर लेबल लगाने के लिए एक तर्क यह है कि उसमें समय की अवधि की दृष्टि-धारणा मिलती है। जब कई एक वर्षों के लिए मासिक (और दैनिक, माप्ताहिक, या त्रैमासिक) आंकड़ों का आलेखन होता है तब प्रत्येक वर्ष का प्रतिनिधित्व करने वाले स्थानों पर लेबल लगाने के अतिरिक्त कोई चारा नहीं होता, क्योंकि यदि रेखाओं पर लेबल लगाए गए हों तो सब पाठकों का यह तुरन्त स्पष्ट नहीं होगा कि लेबल रेखा से पूर्व के स्थान की ओर संकेत करता है, या रेखा के बाद के स्थानों की ओर, या सम्भवतः दोनों ओर आधे-आधे स्थान पर। प्रत्येक क्षैतिज वर्ष-स्थान मासिक धका के आलेखन के लिए 12 भागों में बाँटा गया है और

इन श्रको का आलेखन 12 स्थानों में से प्रत्येक के बीच में हो सकता है। चार्ट 4.4 में मासिक आधार पर कालावधि श्रकडों के लिए इसका उदाहरण प्रस्तुत है।

निर्देशनों पर आगमनों का

मासिक स्तरों में



चार्ट 4.4 जनवरी 1967 और दिसम्बर 1972 के बीच समुक्त राज्य के मासिक के नेट आगमन और निर्गमन। मासिक श्रकडें।

जब कालबिन्दु श्रकडे वक्र द्वारा दिखाए जा रहे हैं तो सैतिज श्रक्ष पर स्थानों पर लेबल लगाने चाहिए, न कि रेखाओं पर, और प्रेक्षकों का आलेखन स्थानों के बीच में उन कालबिन्दु पर, जिसकी ओर श्रकडों का सकेत होता है, होना चाहिए। यह बात का विचार मासिक श्रकडों की अपेक्षा मासिक श्रकडों के लिए अधिक महत्व का है। तो भी मासिक श्रकडों के लिए आदर्श यह है कि हमें (1) मास के प्रारम्भ के श्रकडों का आलेखन (जैसे प्रत्येक मास की एक तारीख को शीतगार के मास के श्रक) मास के प्रतिनिधि प्रत्येक स्थान के प्रारम्भ में करना चाहिए, (2) मास के मध्य के श्रकडों का आलेखन (उदाहरणार्थ प्रत्येक मास की पन्द्रह तारीख के निकटतम वेनन चिह्न के लिए वेनन चिह्न के श्रकडे) प्रत्येक स्थान के मध्य में, और (3) मास के अन्त के श्रकडों का आलेखन (जैसे प्रत्येक मास के अन्त में सचलन में मुद्रा) प्रत्येक स्थान के अन्त में करना चाहिए। यदि इस विधि का अनुसरण नहीं किया जाता तो मासिक श्रकडों के वक्र का रूप नहीं बदलता, वक्र केवल बाईं ओर या दाईं ओर सरक जाता है।

वारवारता बटनों के वक्र—चार्ट 4.3 का वक्र वारवारता बटन का ग्राफ के द्वारा चित्रण है। वारवारता बटन प्रायः दूसरे चतुर्थांश में चालू नहीं रहे जैसा कि यह चालू रहता है। परन्तु इस उदाहरण में कुछ अण्णात्मक आय थी।

सारणी 4.1 रुबर्स राज्य विश्वविद्यालय की 1965 में स्नातक परीक्षा में बैठने वाली कक्षा के 409 शिष्ट कला विद्यार्थियों के ग्रेडों का वारवारता बटन² दिखाया गया है। वारवारता बटन वक्र को उत्पन्न दिखाने के लिए श्रकडों को पहले चार्ट ग्रेड 4.5 के

2 अध्याय 8 में वारवारता बटनों का विवरण दिया गया है।

सारणी 41

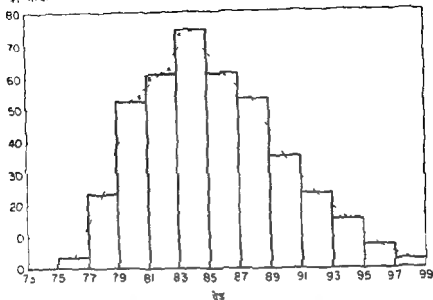
हजसं राज्य विश्वविद्यालय की 1965 में स्नातक परीक्षा में बैठने वाली कक्षा के 409 शिष्ट कला विद्यार्थियों द्वारा चार वर्षों की कक्षा के लिए प्राप्त प्रश्नों का बारवारता वृद्धि

प्रश्न	विद्यार्थियों की संख्या
75 0—76 9	3
77 0—78 9	23
79 0—80 9	52
81 0—82 9	61
83 0—84 9	74
85 0—86 9	61
87 0—88 9	53
89 0—90 9	35
91 0—92 9	23
93 0—94 9	15
95 0—96 9	7
97 0—98 9	2
योग	409

श्रीकृष्ण राज्य विश्वविद्यालय के मेवाक कला एवं विज्ञान कालेज से लिए गए।

“कॉलम आरेख” में आयतों या दण्डों की श्रेणी से दिखाया गया है। आप यह देखेंगे कि प्रश्न श्रेणी के साथ रखे गए हैं और बारवारताएँ (विद्यार्थियों की संख्या) ऊर्ध्वाधर अक्ष के साथ। चाट में उतने ही कालम हैं जितनी कि सारणी में श्रेणियाँ थी और प्रत्येक कॉलम की ऊँचाई तदनुसार श्रेणी के लिए बारवारता का प्रतिनिधित्व करती है। प्रत्येक आयत की चौड़ी के मध्य बिन्दु को प्रत्येक साथ वाली आयत की चौड़ी के मध्य बिन्दु से मिलाकर इस कालम आरेख को वक्र में बदला गया है, जैसा कि चाट 45 में दूटी रेखा द्वारा दिखाया गया है। यह इस कल्पना के आधार पर किया गया है कि एक श्रेणी मध्यान्तर में मूल्यों का श्रेणी भर में बराबर वितरण हुआ है। परिणामस्वरूप एक श्रेणी का मध्य-मूल्य उस श्रेणी का प्रतिनिधि माना गया है। आप देखेंगे कि बिन्दुरेखा ने प्रारम्भिक आयतों के कुछ छोटे त्रिकोण भाग छोड़ दिए हैं और इन्हें कुछ ऐसे छोटे त्रिकोण जोड़ भी लिए हैं जो पहले सम्मिलित नहीं थे। परन्तु यह स्पष्ट है कि त्रिकोण A = त्रिकोण A' , त्रिकोण B = त्रिकोण B' , इत्यादि। कभी कभी वक्र के प्रत्येक सिरे को अपनी सम्भावित श्रेणी के मध्य मूल्य पर X -अक्ष को मिलान के लिए (शून्य की बारवारता की ओर जिक्र सकेत है) बढ़ा दिया जाता है। इस विधि का परिणाम यह होता है कि वक्र के अन्दर उतना ही क्षेत्र आता है जितना कि आयतों में सम्मिलित है। परन्तु कभी-कभी ऐसा वक्र प्राप्त हो सकता

विद्यार्थियों
की संख्या

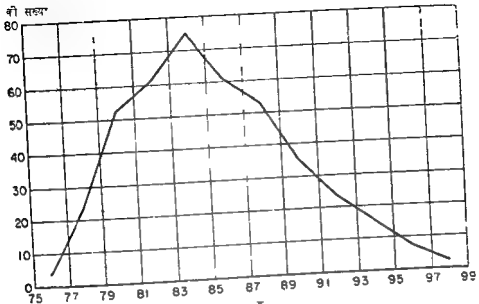


चार्ट 4.5 राजसं राज्य विश्वविद्यालय की 1965 में स्नातक परीक्षा में बैठने वाली कक्षा के 409 शिष्ट कला विद्यार्थियों द्वारा चार वर्षों कोम के लिए प्राप्त स्तर जो एक स्तम्भ आरेख और एक बारबारता वक्र द्वारा दिखाए गए हैं। सारणी 4.1 के आकड़ों।

है या X-मध्य पर घूमने में आग जाता है और यह अर्थहीन हो सकता है। किसी भी स्थिति में बढ़ने में पाठकों को यह मानना ​​होना है कि यदि प्रेक्षित आंकड़ों की सीमाओं से परे की। विशिष्ट प्रयाजना को छोड़कर (चार्ट 23.14 देखिए), वक्र को X-मध्य तक न बढ़ाना अधिक अच्छा है। बारबारता बटन को या तो जानम आरेख के तौर पर या बारबारता वक्र (बारबारता बहुभुज) के रूप में दिखाया जा सकता है। दूसरा उच्च अधिक सामान्य है और वक्र का आभवन, स्तम्भ बनाने के बीच के पग के बिना ही, सीधा होता है जैसा कि चार्ट 4.6 में है।

कभी-कभी उसे बारबारता बटन मिलते हैं जिनका संकेत इस प्रकार की जानकारी की ओर होता है जैसे कुटुम्ब में बच्चों की संख्या एक व्यक्ति में खड़ी की गई मोटर गाड़ियों की संख्या, या अन्य आंकड़ों जिनके मूल्य केवल पूर्ण संख्याएँ (0, 1, 2, 3, आदि) ही हो सकती हैं। इस प्रकार के चरों से सम्बन्ध रखते वाले बारबारता बटनों को, जिन्हें हम अध्याय 8 में विविध रूप में पहचानेंगे, प्रायः वक्र की बजाय कॉलम आरेख द्वारा दिखाया जाता है। चार्ट 23.12, जिसमें सारणी 23.7 के आंकड़ों द्वारा है, इस बात का उदाहरण है। दण्डों का प्रयोग होना सातत्य के अभाव पर, जो कि उपस्थित है, जोर देने का काम करता है।

विद्यार्थियों
की संख्या



चार्ट 4.6 राजस राज्य विद्वद्विद्यालय की 1965 में स्नातक परीक्षा में बैठने वाली कक्षा में 409 शिष्ट कला विद्यार्थियों द्वारा चार वर्षीय पाठ्यक्रम के लिए प्राप्त स्तर। नारणी 4.1 के आकृति।

वक्र आलेखन के नियम

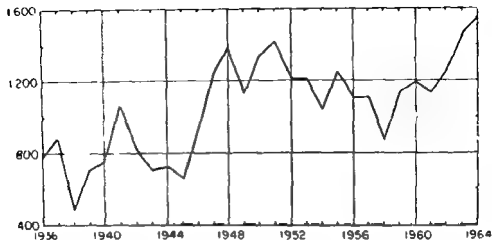
जबकि सार्विकीविद् विन्नी एक गम्भी मानक विधि पर एकमत नहीं हुए हैं जिमने विस्तार से ठीक ठीक यह बताया जाए कि रेखा आरम्भ कैसे बनाए जान चाहिए, ता भी कुछ स्पष्ट महत्व के विचार हैं। जो विद्यार्थी चार बनान का तकनीक के संबंध में अधिक विस्तार में पढ़ने की रुचि रखना है वह सबल उन विषय से संबंधित पुस्तक देख ले।⁴

ऊर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य — वक्र के ऊर्ध्वाधर पैमान पर शून्य को सम्मिलित करना संभवतः सबसे अधिक महत्वपूर्ण नियमों में से एक है। चार्ट बनाने वाले अधिकतर इस नियम के पालन की उपेक्षा कर देते हैं और परिणाम में पथभ्रष्ट करने वाला होता है क्योंकि दृष्टि धारणा भ्रष्ट होना है। चार्ट 4.2 में शून्य से प्रारम्भ होने वाले ऊर्ध्वाधर पैमाने के संकेत से 1936 से 1964 तक मोटर टैंक और बमों की फैक्टरी विन्नी का आलेखन किया गया। आंकड़ों की वही श्रृंखला चार्ट 4.7 में है परन्तु इस चार्ट में ऊर्ध्वाधर पैमाना 400,000 से प्रारम्भ होता है। चार्ट 4.7 में पाठकों को ऐसा दृष्टि धारणा मिलती है जो तथ्यों के विस्तृत विपरीत है। उदाहरणार्थ 1960 में विन्नी 1938 का लगभग 8 गुना हुआ प्रतीत होता है, जबकि चार्ट 4.2 में स्पष्ट रूप से दिखाया गया है कि 1960 में विन्नी 1938 के विन्नी का केवल लगभग आधा गुना था। बहुत कम पाठकों का ध्यान ऊर्ध्वाधर पैमान पर शून्य की लुप्त की आरंभ जाना है और वन की व्याख्या करते समय तो पाठकों की लुप्त

4 उदाहरणार्थ, एला फमिल, यूटिलिटी चार्ट में दुर्लभ प्रारम्भ, प्रथम हाथ एक्सवुड विन्नी, 1962।

एक एक बनें,

हजारों में

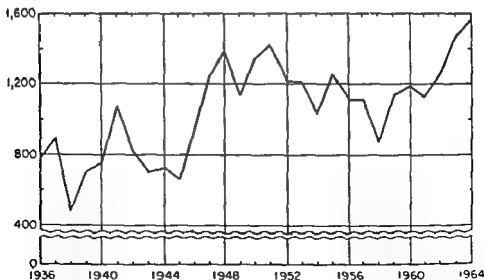


चार्ट 47 संयुक्त राज्य के कारखानों द्वारा 1936 से 1964 तक मोटर द्रुको और बसों का फेब्रुवारी बिक्रय । यह चार्ट अग्रज बनाया गया है क्योंकि ऊष्माघर पैमाना 400 से प्रारम्भ होता है और मूल की तुलना कोई स्पष्ट संकेत नहीं है । आंकड़ चार्ट 42 के नीचे दिए गए स्तर से लिए गए हैं ।

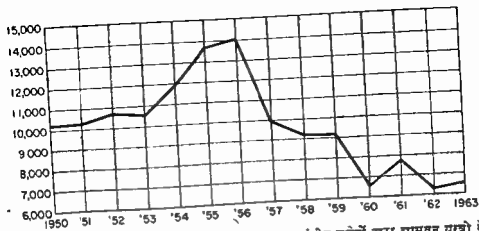
की ओर उचित ध्यान दिए जाने की ओर भी कम संभावना है । मोटी तुलनाएँ करने के लिए पैमाने के सदस्यों की पाठक को आवश्यकता नहीं होनी चाहिए । चार्ट इस प्रकार से बनाना चाहिए कि दृष्टि तुलनाएँ जितनी मीट्र संभव हो की जा सकें ।

एक एक बनें,

हजारों में



चार्ट 48 संयुक्त राज्य के कारखानों द्वारा 1936 से 1964 तक मोटर द्रुको एवं बसों का फेब्रुवारी बिक्रय । आंकड़ चार्ट 42 के नीचे दिए स्तर से लिए गए ।



चार्ट 4.9 1950 से 1963 तक संयुक्त राज्य संघीय एजेंटों द्वारा आसवन यन्त्रों के

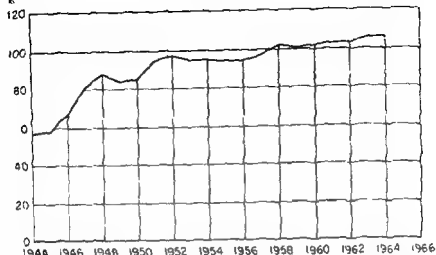
अभिग्रहणों की प्रवृत्ति। ताइनेस प्रायद्वीप उद्योगों की फॅक्ट्स बुक 1964, पृष्ठ 36 से। मूल चार्ट में दिखाई गई तीन सांख्यिकीय श्रेणियों में से यह एक है, स्पष्टता के लिए अन्य दो छोड़ दी गई हैं। ऊर्ध्वाधर वक्र पर इकाइयों के लिए लेबल की अनुपस्थिति की ओर ध्यान दीजिए। मूल स्तंभ के साथ दिए पाठ से यह स्पष्ट है कि इकाई "आसवन-यन्त्रों के अभिग्रहणों की संख्या" है।

चार्ट 4.2 के समान शून्य की अभिव्यक्ति का कभी-कभी परिणाम यह होगा कि वक्र ग्राह्य पर बहुत ऊँचा हो जाएगा और इसके वक्र की गतियों को जानना कठिन भी हो सकता है। अतः चार्ट के ऊर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य की लुप्ति प्रायः इसलिए होती है क्योंकि चार्ट बनाने वाला व्यक्ति वक्र की गतियों पर जोर देना चाहता है और अनुभव करता है कि वक्र और प्रक्ष के बीच का स्थान अनुपयोगी है। कई तरीके हैं जिनमें शून्य को दिखाना (या स्पष्टता इसकी लुप्ति की ओर संकेत करना) और चार्ट में वक्र को बहुत ऊँचे रखने का निवारण करना भी संभव है। चार्ट 4.8 में एक तरीका दिखाया गया है। जिसमें चार्ट में एक निश्चित विच्छेद किया गया है। कभी-कभी समानान्तर रेखाएँ बहरदार होने के स्थान पर दौड़दार होती हैं। वे खुले हाथ से या, जैसा कि चार्ट 4.8 में है, डबल रोटी काटने के चाकू के ब्लेड के रूप में प्रयोग करके खींची जा सकती हैं। चार्ट 4.15, 11.1 तथा 11.3 में अन्य विधियाँ दिखाई गई हैं जो प्रायः प्रयोग में आती हैं। ध्यान दीजिए कि चार्ट 4.8 तथा 4.15 में शून्य और पैमाने का विच्छेद दिखाया गया है जबकि चार्ट 11.1 तथा 11.3 में शून्य दिखाया नहीं गया, परन्तु केवल इस तथ्य की ओर ध्यान आकर्षित किया गया है कि ऊर्ध्वाधर पैमाना अपूर्ण है।

चार्ट 4.9 एक व्यापार एसोसिएशन की वार्षिक रिपोर्ट में छपा था। क्योंकि ऊर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य की लुप्ति की कोई चेतावनी नहीं दी गई इसलिए इस चार्ट से, वक्राकार सघीय एजेंटों द्वारा आसवन-यन्त्रों के अभिग्रहणों में कमी की आसन्न दृष्टि-धारणा बनती है। जब तक कि ऊर्ध्वाधर पैमाना न देखा जाए तब तक पाठक यह परिणाम निकाल सकता है कि सघीय एजेंटों द्वारा आसवन-यन्त्रों के अभिग्रहण लगभग समाप्त हो गए हैं।

कभी-कभी ऐसे वक्र दिखाई देते हैं जिनमें ऊर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य नहीं होता और जिनमें एक वस्तु के विक्रयों की वृद्धि, एक संगठन की सदस्यता, एक सामाजिक पत्र का परिचालन या अन्य आँकड़े दिखाए जाते हैं। शून्य की लुप्ति के कारण वृद्धि उमसे बहुत अधिक भीम हुई प्रतीत होती है जितनी कि वास्तव में हुई है।

सूचकांक



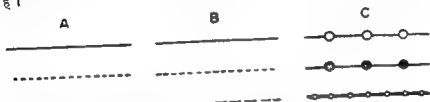
चार्ट 4 10 सयुक्त राज्य में 1944 से 1964 तक भोजन का उपभोगता मूल्य सूचकांक। 1957—1959 = 100 ओकडे स्टैटिस्टिकल एग्रेट्स आफ बि यूनाइटेड स्टेट्स, 1964 पृष्ठ 356 में दिए गए। 1964 का सूचकांक वर्ष 1964 का है।

चार्ट 4 0 म भोजन के लुद्धा मूल्यों के सूचकांक दिया है। यह चार्ट दो दृष्टियों से धमाधारण है। प्रथम तो इसके ऊर्ध्वधर पैमाने में शून्य आता है जो यद्यपि अशुद्ध नहीं, बल्कि आवश्यक नहीं है, जबकि मूल्य सूचकांक का आलेखन किया जा रहा हो, क्योंकि यह मुश्किल से ही माना जा सकता है कि मूल्य कभी भी शून्य के निकट पहुंचें और क्योंकि 100 सूचकांक का आधार है। 100 की रेखा पर भ्रमदा और अनन्त चाहिए, जबकि यह आधार है जैसा कि इस चार्ट में है। इसी प्रकार शून्य की रेखा पर जोर डालना चाहिए जबकि यह चार्ट का आधार है जैसा कि चार्ट 4 8 में है। सूचकांक को चार्टों द्वारा दिखाने समय कुछ व्यक्ति 100 के ऊपर और नीचे के उतार चढ़ावों को धनात्मक और ऋणात्मक मूल्यों के रूप में दिखाना पसन्द करते हैं। चार्ट 4 10 के सबसे म 100 शून्य बन जाएगा, 105 बन जाएगा +5 तथा 85 बन जाएगा -15। चार्ट 4 10 का ऊर्ध्वधर पैमाना इस प्रकार बदल जाएगा कि +20 0, -20 -40 -60, -80, तथा -100 पढ़ा जाए। वह स्वयं अपरिवर्तित रहेगा। चार्ट 4 10 का दूसरा अमान्य संक्षिप्त क्षैतिज और ऊर्ध्वधर निर्देशक रेखाओं का प्रतिपादन है जिसका परिणाम वह को एक अमान्य तौर पर स्पष्ट रूपरेखा देता है। यह भी ध्यान रखिए कि बाद के आंकड़े जोड़ने के लिए स्थान छोड़ दिया गया है। इस प्रणाली में उर्ती मौलिक चार्ट की, जैसे नये आंकड़े प्राप्त होते हैं, केवल मात्र वह को बढ़ाकर (बार-बार) प्रतिष्ठित प्रस्तुत करना स्वीकृत हो जाता है।

वक्रों का रेखांकन—आंकड़ों का प्रतिनिधित्व करने वाले वक्र चार्ट की पृष्ठभूमि से स्पष्टतः भलग दिमाई देने चाहिए। अतः वक्र का रेखांकन निर्देशकों की अपेक्षा अधिक गहरा होना चाहिए। (जब दो या अधिक ऐसे वक्र दिखाए जाते हैं जो निकट से एक दूसरे का अनुसरण करने हैं या जो एक दूसरे को काटते हैं तो कभी कभी कुछ वक्रों के लिए अधिक हल्की रेखाओं का प्रयोग आवश्यक होता है। उदाहरण के लिए चार्ट 17 3 देखिए।)

जैसा कि इस पाठ में विभिन्न वक्रों से दिखाई देगा, अलेखित बिन्दु प्रायः दिखाए नहीं जाते क्योंकि प्रयत्न यह है कि सामान्य स्थिति प्रस्तुत की जाए न कि अलग-अलग अध्ययन।

जब एक ही अक्ष पर कई एक वक्र खींचे जाते हैं तो प्रत्येक वक्र को पहचान सकना पाठक के लिए महत्वपूर्ण है। इस प्रकार हम ठोस, बिन्दुयुक्त और डैशयुक्त रेखाओं का प्रयोग कर सकते हैं और हम गहरी और हल्की रेखाओं का प्रयोग कर सकते हैं। यदि वक्र के लिए हल्की रेखा का प्रयोग किया जाता है तो यह साधारण तौर पर इतनी हल्की नहीं होनी चाहिए जितने निर्देशांक। मुझाए गए रेखांकन नीचे A और B के रूप में सूचीबद्ध हैं।



A यदि तीन से अधिक वक्र नहीं खींचने हैं तो इन रेखाओं की सिफारिश की जाती है।

B यदि तीन से अधिक वक्र खींचने हैं तो हल्की रेखाओं का प्रयोग किया जा सकता है।

C जब तक कि अलेखित बिन्दुओं को मझलो या बिन्दुओं से न दिखाना हो, इन रेखाओं की सिफारिश नहीं की जाती।

जब एक चार्ट में दो या अधिक वक्र दर्शाए जाते हैं तो प्रत्येक की स्पष्ट रूप से पहचान होनी चाहिए। यह कार्य वक्रों को लेबल लगाकर सम्पन्न हो सकता है, जैसा कि चार्ट 4 13, 4 17, तथा 17 3 में है।

सामान्यतया एक चार्ट में दो या तीन वक्रों से अधिक के प्रयोग से बचना अच्छा है। विशेष रूप से यदि वे एक दूसरे को काटते और पुनः काटते हैं तो भ्रांति उत्पन्न होने की संभावना है। जब एक बड़े दीवार चार्ट में जिसे किसी एक समूह को प्रस्तुत करना हो, कई वक्र दर्शाए जाते हैं तो कभी कभी विभिन्न रंग प्रयुक्त किए जा सकते हैं, यद्यपि प्रायः यह अधिक अच्छी प्रणाली है कि रंग का प्रयोग उन अवसरों के लिए सुरक्षित रखा जाए जब एक या दो वक्रों पर विशिष्ट बल दिया जाना हो। काले, लाल, हरे, हल्के या मध्यम नीले, तथा मध्यम या गहरे नारंगी रंग तुरन्त पहचाने जाते हैं। यदि ऐसी संभावना हो कि दीवार चार्ट को फोटोस्टैट करना है, उसका फोटो नेना है या छपाई के लिए प्रतिकृति करनी हो तो काले और लाल का घने और बिखरे हुए हल्के और गहरे तथा समिश्रणों में प्रयोग किया जा सकता है क्योंकि लाल रेखा की प्रतिकृति काली के समान होगी। नीले, पीले और कुछ प्रकार के हरे का या तो बिल्कुल कोई फोटो नहीं आता या मन्द फोटो आता है। प्रायः रंग इतना महंगा होता है कि उसका पुस्तक में प्रयोग नहीं किया जा सकता।

निर्देशांक—चार्ट बनाने वाले शून्य की रेखा को अन्य सीमान्त रेखाओं की अपेक्षा कुछ अधिक गहरा बना कर उस पर बल डालते हैं। इसी प्रकार 100 प्रतिशत की रेखा (या अन्य आधार जिससे तुलनाएँ की जाती हैं) पर जोर डाला जा सकता है। सीमान्त ऊर्ध्वा पर और क्षैतिज रेखाएँ अन्य निर्देशांक रेखाओं की अपेक्षा कुछ गहरी बनाई जा सकती हैं। निर्देशांक रेखाएँ बहुत हल्की खींचनी चाहिए। चार्ट पढ़ने में सहायता के लिए आवश्यकता से अधिक निर्देशांक रेखाएँ नहीं होनी चाहिए। कभी-कभी सब निर्देशांकों को

छोड़ दिया जाता है, जैसा चार्ट 4 4 में है जिसमें निर्देशांक रेखाओं के स्थान पर 'टिको' का प्रयोग है। यदि अलेखन सरल बनाने के लिए सन्निकट रेखाओं वाला 'ग्रिड' वांछित है तो चार्ट अनुरेखन वस्त्र या अनुरेखन कागज पर खींचा जा सकता है जो एक ऐसे ग्रिड पर रखा गया हो जिसकी निर्देशांक रेखाएँ वांछित अंतर पर पास-पास हैं। इसके विकल्प के रूप में जब एक चार्ट की प्रतिकृति करनी हो तो एक हल्के नीले रंग के सन्निकट रेखाओं वाले ग्रिड का प्रयोग किया जा सकता है। वे रेखाएँ जो प्रतिकृति में रहनी चाहिए काले रंग में खींची जाती हैं। सामान्य स्थितियों में पृष्ठभूमि की नीली रेखाएँ प्रतिकृति में स्पष्ट नहीं आती। इस पाठ में कुछ चार्ट ऐसी हल्की नीली पृष्ठभूमि पर खींचे गए हैं।

चार्ट की उचित समझ निश्चित करने के लिए दोनों पैमानों पर स्पष्ट रूप में लेबल लगाने चाहिए। न केवल आँकड़ों के स्वरूप का संकेत करना चाहिए वरन् प्रयुक्त इकाइयाँ भी बतानी चाहिए। उदाहरणार्थ, चार्ट 4 3 में क्षैतिज अक्ष पर घाय दिखाई गई हैं, इकाई हजार डालर है। कभी-कभी लम्बी समय श्रेणी के वक्र को क्षैतिज रूप में बढ़ाया जा सकता है। ऐसे उदाहरणों में कभी-कभी चार्ट के दाईं ओर भी ऊर्ध्वाधर पैमाना बनाना वांछित होता है।

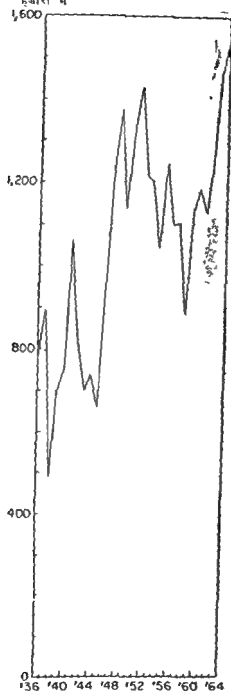
चार्ट अनुपात—एक वक्र चित्र के लिए उचित अनुपातों की दृष्टि से कोई वस्तु-निष्ठ नियम देना कठिनाई से ही संभव है। फिर भी यह ध्यान देना चाहिए कि वक्र के लिए प्रयुक्त अत्यधिक फैलने वाले या अत्यधिक सिकुड़ने वाले किमी भी पैमाने से बेतुके प्रभाव उत्पन्न होते हैं। चार्ट 4 11 में क्षैतिज पैमाने के सबध में ऊर्ध्वाधर पैमाना बढ़ा-चढ़ा दिया है, चार्ट 4 12 में क्षैतिज पैमाना बढ़ा-चढ़ा दिया है। पहले से अत्यधिक उतार-चढ़ावों का प्रभाव उत्पन्न होना है, बाद वाले से यह विचार मिलता है कि टूक और वस विक्रय में अपेक्षाकृत महत्वहीन उतार-चढ़ाव हुए हैं। इन दो चार्टों में चार्ट 4 2 में उचित प्रकार से दिखाए गए आँकड़ों के पुनरलेखन के विकृत परिणाम मिलते हैं। यह नियम प्रायः अत्यन्तोजनक होते हैं क्योंकि उन्हें असाधारण रूप से अपनाया जा सकता है। परन्तु यह सुझाव दिया गया है कि उचित अनुपात वे हैं जिनमें वक्र की उन गतियों के लिए जिन पर बल दिया जाता है, 45 दर्जे का कोण प्राप्त होता है।

जैसाकि पैमानों के निकट से चुनाव से उतार-चढ़ावों पर अत्यधिक जोर देना या उन्हें कम करना संभव है, वैसे ही वृद्धि के सम्बन्ध में अशुद्ध भाव उत्पन्न करना संभव है। चार्ट 5 3 का वक्र संयुक्त राज्य में 1928 से 1964 तक मोटर गाड़ियों का रजिस्ट्रेशन दिखाता है ऊर्ध्वाधर पैमाने को फैलाने और क्षैतिज पैमाने को सकुचित करने से संयुक्त राज्य में मोटर गाड़ियों के रजिस्ट्रेशन की बहुत तीव्र वृद्धि का प्रत्यक्ष भाव मिलेगा। ऊर्ध्वाधर पैमाने को सकुचित करने तथा क्षैतिज पैमाने को फैलाने से वृद्धि बहुत धीमी हुई प्रतीत होगी।

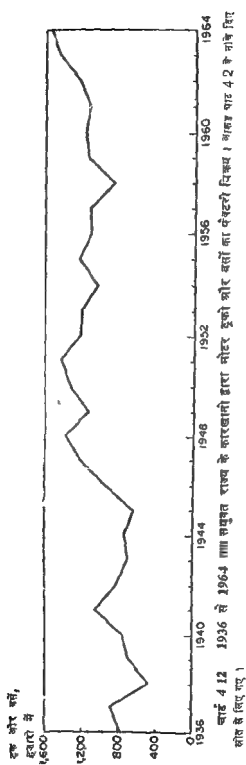
यद्यपि पूर्व के दो अनुच्छेदों में काल श्रेणी के वक्रों की ओर संकेत था तो भी यह समझना चाहिए कि यदि एक पैमाने को दूसरे पैमाने के सबध में अत्यधिक फैला दिया जाए या अनुचित ढंग से सकुचित कर दिया जाए तो बारंबारता बटनों के वक्रों से और कल्पित तौर पर किसी भी अन्य प्रकार के चार्ट से भ्रामक प्रत्यक्ष प्रभाव उत्पन्न हो सकते हैं।

अक्षर लेखन—यदि संभव हो तो चार्ट पर संपूर्ण अक्षर-लेखन, पैमाने के लेबलों, पैमाने के मूल्यों, मुद्रा-लेख, वक्र के लेबलों तथा किन्हीं अन्य शब्दों या अक्षरों सहित क्षैतिज रूप में रखने चाहिए। कभी-कभी स्थानाभाव से ऊर्ध्वाधर पैमाने के लेबल को ऊर्ध्वाधर स्थिति में रखना आवश्यक हो सकता है, परन्तु ऐसी सीमा प्रायः उपस्थित नहीं होती। यह कहने की

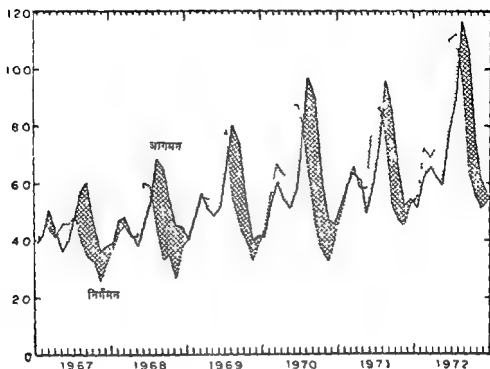
ट्रक और बसें,
हजारों में



चार्ट 4 II। 1936 से 1964 तक संयुक्त राज्य के कारखानों द्वारा मोटर ट्रकों और बसों का फंक्चरी विक्रय। चार्ट 4 2 के नीचे दिए स्रोत से लिए गये हैं।



व्यक्ति
हजारों में



घाट 4 13 सयुक्त राज्य के नागरिकों के जनवरी 1967 से दिसम्बर 1972 तक आगमन और निर्गमन । नोट: का-पत्रिक है क्या कि घाट 4 4 में है

आवश्यकता नहीं है कि संपूर्ण अक्षर लेखन स्पष्ट दिखाई देना चाहिए । जिन हाथ में लिख शब्द और एक बहुत आकर्षक बनाए जा सकते हैं यदि एक निपुण व्यक्ति द्वारा लिख जाएँ । परंतु कलाकारों या नवशानवीसों की प्रतीतिगुहों से प्राप्त स्टैसिल द्वारा अक्षर लेखन की विधियाँ के प्रयोग से थोड़ा से अभ्यास से अव्यवसायी व्यक्ति भी उत्तम औपचारिक अक्षर एवं अक्षर बना सकता है । इस घाट में लगभग सभी चारों का अक्षर प्रकाशनों से प्रतिवृत्ति को छोड़कर, ऐसी ही विधियाँ द्वारा अक्षर-लेखन किया गया है ।

शीपक—प्रत्येक मासिकी के समान प्रत्येक घाट का एक शीपक होना चाहिए जिसमें स्पष्ट रूप से और ठीक ठीक यह बनाना चाहिए कि घाट क्या दिखाना चाहता है । छप हुए घाट का शीपक घाट के ऊपर या नीचे हो सकता है परन्तु नीचे अधिक अच्छा है । बड़े दीवार चारों के शीपक प्रायः छिड़ से ऊपर या कभी-कभी उस पर रखा जाते हैं ।

स्रोत—पुनश्च जैसा कि मासिकी के संबंध में है प्रत्येक घाट में स्रोत की ओर संकेत होना चाहिए जिससे जहाँ से आकड़ों लिए गए उनके लक्ष्य शीपक ग्रंथ पृष्ठ प्रकाशक तथा प्रकाशन की तिथि का संकेत हो । स्वाभाविक तौर पर एक ही स्रोत या विभिन्न स्रोतों से लिए आकड़ों की तुलनात्मकता के संबंध में जो सावधानियाँ अध्याय 2 में बताई गई हैं वे चारों बनाने के लिए प्रयुक्त किए गए अक्षरों पर पूर्ण मान्यतापूर्वक लागू होती हैं ।

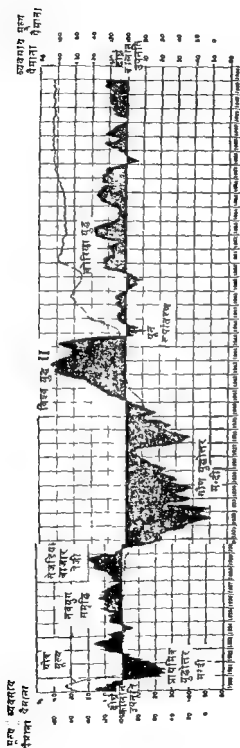
विशेष प्रयोजनों के लिए रेखा आरेख

गुह्य शेष चार्ट—चार्ट 4 4 में दो श्रेणियों के नेट जोड़ को बताने वाला एक तरीका दिखाया है। प्रत्येक मास के लिए निर्गमनों को आगमनों में से घटा लिया गया और परिणाम का आनेखन धनात्मक या ऋणात्मक अंक के रूप में किया गया। इसी ढंग से व्यापार सन्तुलन (निर्यातों के मूल्य में से आयातों का मूल्य घटाकर) दिखाया जा सकता है तथा लाभ और हानि भी दर्शाए जा सकते हैं। आगमन और निर्गमन आंकड़ों को दिखाने के एक वैकल्पिक तरीके का उदाहरण चार्ट 4 13 में है। यहाँ आगमनों और निर्गमनों के लिए वक्र दिए गए हैं, आगमनों की अधिकता, बाटन वाली तरिछी रेखाओं के क्षेत्रफल की ऊँचाई से दिखाई गई है, जब कि निर्गमनों की अधिकता बिन्दु-चित्रित भाग की ऊँचाई के द्वारा दिखाई है।

छाया-चित्र चार्ट—चार्ट 4 13 (जिसकी आर पूर्वगामी अनुच्छेद में संकेत किया गया है) न केवल कुल राशि के स्थान पर गुह्य राशि को दिखाने का, बल्कि समान रूप से वस्तु प्राप्त के लिए दो वक्रों के बीच के क्षेत्रफल को छायायुक्त करने के अभ्यास का उदाहरण प्रस्तुत करता है। चार्ट 4 14 इस दृष्टि में चार्ट 4 4 के समान है। इसमें आधार रेखा के ऊपर और नीचे उतार-चढ़ाव दिखाए गए हैं। परन्तु चार्ट 4 14 में वक्र के क्षेत्रफलों पर काले रंग भर कर जोर डाला गया है। परिणाम यह है कि वक्र के “धनात्मक” और “ऋणात्मक” भागों का अधिक प्रभावपूर्ण चित्रण है। इस प्रकार का चार्ट और भी अधिक प्रभावशाली होता है जब “धनात्मक” क्षेत्र काले में भरे जाते हैं और ऋणात्मक क्षेत्र लाल से भरे जाते हैं।

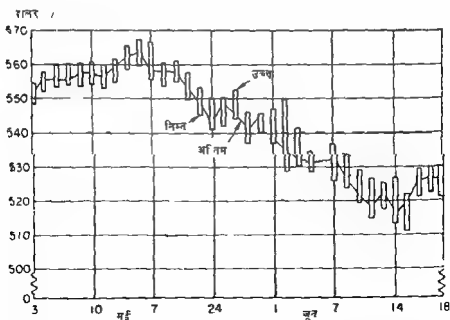
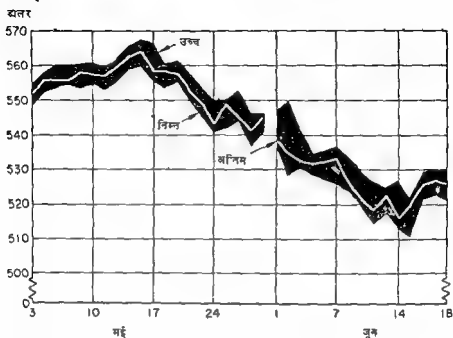
परिसर चार्ट—चार्ट 4 15 में एक विधि दिखाई गई है जिसके द्वारा स्टॉक मूल्यों का परिसर चित्रित किया जा सकता है। आप यह देखें कि जब परिसर बड़ा हो, तो काली पट्टी फैल जाती है और जब छोटा तो सिकुड़ जाती है। संकेत रेखा अन्तिम मूल्य बताती है। इसी आंकड़ों को दिखाने के एक वैकल्पिक तरीके का उदाहरण चार्ट 4 16 में है। यहाँ प्रत्येक दृढ़ की चोटी उस दिन के लिए उच्चतम का प्रतिनिधित्व करती है जब कि प्रत्येक दृढ़ का तल दिन के लिए निम्नतम का प्रतिनिधित्व करता है। दृढ़ों को मिलाने वाली रेखा अन्तिम मूल्य की प्रतिनिधि है। यदि एक कालावधि में परिवर्तन का परिसर दिखाना चाहनीय हो तो इस प्रकार के चार्टों का प्रयोग पदार्थ मूल्यों और अन्य प्रकार के आंकड़ों को दिखाने के लिए किया जा सकता है।

जैड-चार्ट—जैसा कि चार्ट 4 17 में दिखाया गया है जैड-चार्ट में एक ही अक्ष पर तीन वक्र हैं। प्रायः चार्ट मासानुसार एक वर्ष की अवधि के लिए है। एक वक्र मासिक अंकों को दिखाता है दूसरा वर्ष के प्रारम्भ में संचयी अंकों को दिखाता है, जब कि तीसरा प्रत्येक मास के साथ समाप्त होने वाले बारह मास के लिए जोड़ दिखाता है। यह अन्तिम वक्र प्रायः गतिमान वार्षिक जोड़ वक्र कहलाता है, अधिक विविष्ट तौर पर, यह प्रत्येक निर्दिष्ट मास के साथ समाप्त होने वाले बारह मास के लिए 12 मास का गतिमान जोड़ है। जैड चार्ट के साथ दो ऊर्ध्वाधर पैमानों का प्रयोग किया गया है क्योंकि यदि उनी पैमाने के साथ मासिक आंकड़ों का दूसरे आंकड़ों के रूप में आलेखन होता तो मासिक आंकड़ों के उतार-चढ़ाव स्पष्ट नहीं होते। जैड-चार्ट का प्रयोग प्रायः आन्तरिक व्यापार प्रयोजनों के लिए किया जाता है, उदाहरणतः उत्पादन और विक्रय के आंकड़े दिखाने के लिए। हाँ, यह उन स्थितियों तक सीमित है जिनमें चार्ट बनाने वाला (1) एक निर्दिष्ट मास के लिए अंक, (2) कैलेंडर (या वित्त) वर्ष के बीते हुए भाग के लिए प्रत्येक मास के अंक, और (3) प्रत्येक

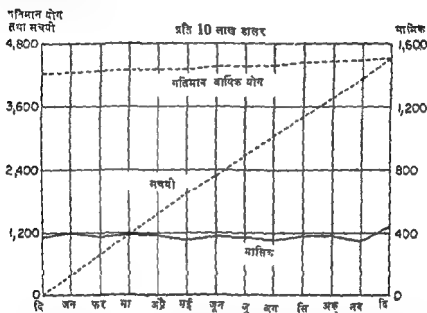


चाट 4.14. बलिवुड ट्रस्ट कम्पनी के 1790 से श्रमरीकी व्यवसाय क्रिया के चाट का एक भाग । बलीवुड ट्रस्ट कम्पनी द्वारा अप्रैल 1964 में निर्मित उस चाट के 35वें संस्करण से लिया गया ।

निर्दिष्ट मास के साथ समाप्त होने वाले बारह मास के लिए ग्रक के प्रत्यक्षीकरण में रुचि रखता है।



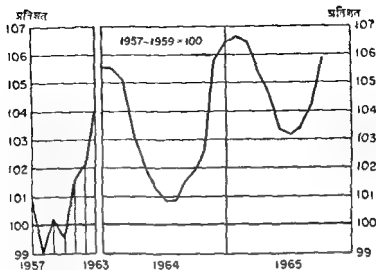
इस प्रकार के विशिष्ट प्रयोजनों को छोड़कर, इस अध्याय में वर्णित प्रकार के चार्ट पर दो या अधिक ऊर्ध्वाधर पैमानों का प्रयोग करना (जो कभी-कभी "बहु पैमाने" कहलाता है) प्रायः वांछित नहीं है। विभिन्न इकाइयों में वर्णित दो श्रेणियों में हुए उतार-चढ़ावों की (परन्तु उनके आकारों की नहीं) तुलना कभी-कभी दो भिन्न ऊर्ध्वाधर पैमानों वाले चार्ट पर की जा सकती है। परन्तु दो या अधिक भिन्न ऊर्ध्वाधर पैमानों के प्रयोग से विभिन्न श्रेणियों में होने वाले परिवर्तनों के तुलनात्मक आकारों के अशुद्ध प्रत्यक्ष प्रभाव प्राप्त होने की संभावना है।



चार्ट 4.17 संयुक्त राज्य में कुल मूल्य लाभ अभावगिर्या : मासिक, सचयी तथा गतिमान तथा वायिक योग, 1964 अंकड़े जीवन बीमा तथा, साक्षिकी एवं अनुसंधान विभाग से प्राप्त।

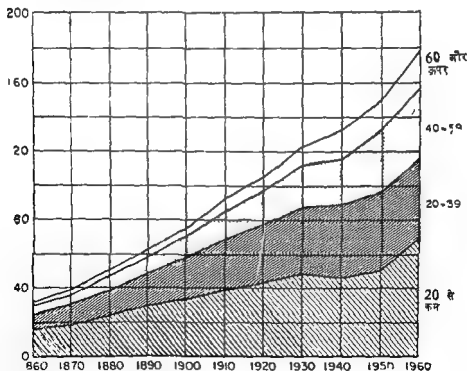
परिवर्तन क्षैतिज-पैमाना चार्ट—कभी-कभी कई वर्षों के लिए वायिक अंकड़े और अधिक हाल के वर्षों के लिए एक या दो मासिक अंकड़े दिखाना वांछित होता है। यह चार्ट 4.18 के समान किया जा सकता है, जिसमें मासिक अंकड़ों को अधिक विस्तार से दिखाने के लिए क्षैतिज पैमाना विस्तृत कर दिया गया है। ध्यान दीजिए कि चार्ट के दोनों भाग एक विच्छेद द्वारा अलग किए गए हैं। इसी प्रकार क्षैतिज पैमाने में परिवर्तन तब उचित हो सकता है यदि हम वायिक या मासिक अंकड़ों का साप्ताहिक अंकड़ों के साथ संयोग या वायिक, मासिक अथवा साप्ताहिक अंकड़ों का दैनिक अंकड़ों में संयोग दिखाना चाहते हैं।

बहु-अक्ष चार्ट—कभी-कभी यह वांछनीय होता है कि कई वक्रों के उतार-चढ़ावों की तुलना की जाए और फिर भी प्रत्येक वक्र स्पष्ट दिखाई पड़े। इस परिणाम को प्राप्त करने का एक सादा तरीका यह है कि विभिन्न क्षैतिज अक्षों के साथ भिन्न वक्रों का आवेदन किया जाए (और) इन विभिन्न अक्षों को सुविधाजनक ऊर्ध्वाधर दूरियों द्वारा इष्टिम रूप से अलग किया जाए। एक उदाहरण चार्ट 14.4 है, जो "वर्षानुवर्ष चार्ट" भी कहा जाता है। यहाँ विभिन्न वक्र तुलना की सरलता के लिए साथ-साथ समीप बनाए गए हैं, परन्तु रेखाओं की लीपा नहीं लगी। यद्यपि भिन्न क्षैतिज अक्षों का प्रयोग किया गया है तो भी

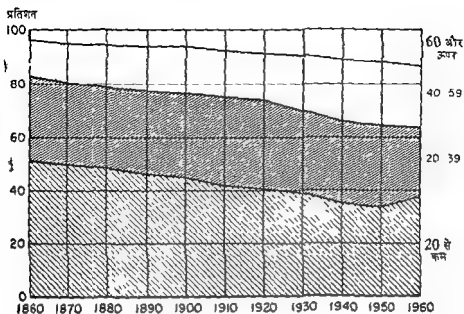


चार्ट 4 18 ई धन तेल और कोयले का उपभोगता मूल्य सूचकांक, वार्षिक 1957—1963 तथा मासिक 1964—1965। बावडे फेडरल रिजर्व बुलेटिन, सितम्बर 1965, पृष्ठ 1334. तथा नवम्बर 1965 पृष्ठ 1604 स, लिए गए।

प्रति 10 लाख व्यक्ति



चार्ट 4 19 1860 से 1960 तक प्रत्येक विशिष्ट वय श्रेणी में सयुक्त राज्य की जनसंख्या। बावडे सयुक्त राज्य जनगणना विभाग, फिफ्टीन्थ सेन्सस ग्राफ दि यूनाइटेड स्टेट्स, 1930, जनसंख्या खंड II, पृष्ठ 576; सेन्सस ग्राफ पापूलेशन, 1950, खंड II, कंरिक्टिस्टिक्स भाग I, यू० एम० सम पृष्ठ 1—93 तथा सेन्सस ग्राफ पापूलेशन, 1960, खंड II कंरिक्टिस्टिक्स ग्राफ दि पापूलेशन, भाग I यू० एम० समरी, पृष्ठ 1—199 II।



चार्ट 4.20 1860 से 1960 तक संयुक्त राज्य की जनसंख्या का प्रत्येक विशिष्ट वय श्रेणी में प्रनपात । आंकड़ चार्ट 4.19 के नीचे दिए जाते हैं लिए गए ।

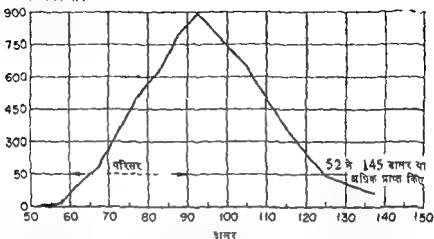
ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज पैमाने वही रहते हैं । अकनगिनत ग्राफ वागज पर इस प्रकार के चार्ट की व्याख्या करते समय (अगले अध्याय में वर्णित अर्थ सधुगणकीय ग्राफ वागज से भिन्न) यह स्मरण रखना चाहिए कि प्राप्त तुलना निरपेक्ष परिवर्तनों की है और सापेक्ष परिवर्तनों की नहीं । यह सभाव्य नहीं कि इस प्रकार के चार्ट का प्रयोग सामान्य पाठन के सामने प्रस्तुति के लिए वाछनीय माना जाएगा जब तक कि रेखाचित्र के साथ एक स्पष्ट व्याख्या न हो ।

सघटक भाग चार्ट—चार्ट 4.19 में 1860 से 1960 तक संयुक्त राज्य में प्रत्येक जनगणना के समय वार सामान्य वय श्रेणियाँ में से प्रत्येक में व्यक्तियों की संख्या दिखाई है । प्रत्येक पट्टी की ऊँचाई एक अनुक जनगणना के समय देश में प्रत्येक वय की संख्या बताती है । इस प्रकार के चार्ट से यह देखना संभव है कि एक अनुक श्रेणी बढ़ रही है या घट रही है अथवा नहीं, तथा सभी श्रेणियों का जोड़ बढ़ रहा है या घट रहा है अथवा नहीं । चार्ट 4.19 से किसी विशेष श्रेणी का सापेक्ष महत्त्व नहीं देखा जा सकता, परन्तु चार्ट 4.20 में वय श्रेणियाँ उन्ही अनुपातों के अनुसार दिखाई गई हैं जितना उनका और कुल जनसंख्या का है । यहाँ यह स्पष्ट देखा जा सकता है कि जनसंख्या में छोटी आयु के व्यक्तियों के अनुपात में कमी हुई है और बड़ी आयु के व्यक्तियों के अनुपात में वृद्धि । जब कुछ वर्षों के सघटक भाग आंकड़ों को ग्राफ द्वारा दिखाया जाना होता है तो चार्ट 6.17 या 6.18 के ऊपरी भाग के समान एक दृढ़ चार्ट का प्रयोग किया जा सकता है । जब कई वर्ष दिखाए जाते हैं तो माधारण प्रवृत्ति का वक्रों द्वारा अधिक आसानी से चित्रण किया जा सकता है ।

वारवारता बटन तथा परिसर चार्ट—कभी-कभी यह लाभदायक होता है कि आंकड़ों के एक समुच्चय के लिए वारवारता बटन वक्र दिखाया जाए और एक अन्य बटन के लिए मूल्यों के परिसर की उस वक्र से तुलना की जाए । चार्ट 4.21 में अक्टूबर 1964 में बोरटन

महिला सहाय

प्रति 5 बालर आय



चार्ट 4.21 कार्पनिक आंकड़ों के लिए अक्टूबर 1964 में बोस्टन, मैसाचुसेट्स, में 7,011 महिला सचिवों की साप्ताहिक आय तथा बालर परिसर। साप्ताहिक आय के आंकड़ों सारणी 8.5 में हैं और वे "बारबारता घनत्व" हैं जिनकी व्याख्या चार्ट 8.5 से सर्वाधिक बर्बा में की गई है।

मे 7,011 महिला सचिवों की औसत साप्ताहिक आय का एक बारबारता बटन दिखाया गया है। एक गैर व्यापारी संगठन के लिए सचिव आयों का एक कार्पनिक परिसर भी दिखाया गया है। विकल्प से दो बारबारता बटन दिखाए जा सकते थे, जैसा कि चार्ट 8.7 में है।⁵

5 अधिक उन्नत चार्टों के लिए देखिए डब्ल्यू. सी. मॅट्टर तथा पी. ओ. टॉमस, "लम ग्राम यूजुल फॉर स्टैटिस्टिकल इन्फरेंस", जर्नल ऑफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, खंड 360, नं. 309, मार्च 1965, पृष्ठ 334-343।

लेखाचित्री निरूपण II:

अर्ध-लघुगणकीय अथवा अनुपात चार्ट

परिवर्तन की मात्रा बनाम परिवर्तन का अनुपात

किसी कालावधि में आर्थिकीय आंकड़ों की श्रेणी के विकास का विचार करते समय कभी-कभी हमारी रुचि हा चुके परिवर्तन की मात्रा में होती है, परन्तु प्रायः अधिकतर हम उस परिवर्तन के अनुपात के सम्बन्ध में कुछ जानना चाहते हैं जो दो तिथियों के बीच में हुआ है। प्रमाण 4 के समान आरेख दस प्रकार के हैं जिनमें हम परिचित हैं तथा जिनमें प्रक्रमशुद्धी कहलाने वाले पैमाने हैं और जो प्राथमिक तौर पर Y अक्ष पर दिखाए जाने वाले कारक में निरपेक्ष परिवर्तनों को दिखाने के लिए उपयोगी हैं। इस विवेचन का प्रयोजन कुछ भिन्न प्रकार के ग्रिड की व्याख्या करना है जिनमें आरेखित श्रेणी में परिवर्तन के अनुपात पर दृष्टिपात किया जा सके।

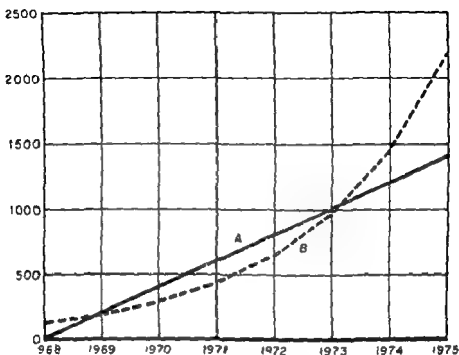
सारणी 5 1

एक समान्तर श्रेणी

वर्ष (X मूल्य)	Y मूल्य	वृद्धि की मात्रा
1968	0	
1969	200	200
1970	400	200
1971	600	200
1972	800	200
1973	1 000	200
1974	1 200	200
1975	1,400	200

चार्ट 5 1 में सामान्य प्रकार के चार्ट की प्रत्यक्ष प्रभाव को दिखाने की संतोषजनक समता का विदग्धन है, परन्तु परिवर्तन के अनुपात को दिखाने में नहीं। वक्र उन प्रतिवर्ष 200 इकाइयों की लगातार वृद्धि का प्रतिनिधित्व करता है (सारणी 5 1 देखिए), और यह या कोई अन्य, समान्तर श्रेणी (वृद्धि या कमी की समान रहने वाली मात्रा) जबकि वह रूढ़ या प्रक्रमशुद्धी ग्रिड पर आरेखित की जाए, एक सीधी रेखा द्वारा चित्रित की जाएगी। परन्तु, वक्र B प्रबो को उस श्रेणी को आरेखित करने का परिणाम है जो

Y मान



चार्ट 5.1 एक अकगणितीय ग्रिड पर प्रारणित एक समान्तर श्रेणी (A) तथा एक गुणोत्तर श्रेणी (B)। सारणी 5.1 तथा 5.2 के आंकड़े।

128 से प्रारम्भ होती है और प्रति वर्ष 50 प्रतिशत बढ़ती है (सारणी 5.2 देखिए)। आप यह देखेंगे कि यह वक्र भीषण रेखा नहीं है, जैसे-जैसे समय बीतता है वैसे-वैसे वक्र अधिकाधिक ऊपर की ओर झुकता जाता है।

सारणी 5.2

एक गुणोत्तर श्रृंखला

वर्ष (X मूल्य)	Y मूल्य	प्रतिशत वृद्धि
1968	128	-
1969	192	50
1970	288	50
1971	432	50
1972	648	50
1973	972	50
1974	1,458	50
1975	2,187	50

समान रूप से बढ़ने वाले या घटने वाले अनुपात को दिखाने वाली श्रेणी गुणोत्तर श्रेणी कहलाती है और किसीभी गुणोत्तर श्रेणी से जब उसे अकगणितीय ग्रिड पर प्रारणित

किया जाए, एक वक्र रेखा उत्पन्न होगी।¹ एक बढ़ती हुई गुणोत्तर श्रेणी एक वक्र द्वारा दिखाई गई है जिसकी ढलान ऊपर की ओर है और जो ऊपर की ओर अवतल है जैसा कि चार्ट 5.1 वक्र B में है। एक घटती हुई गुणोत्तर श्रेणी एक वक्र द्वारा दिखाई गई है जिसकी ढलान नीचे की ओर है और जो ऊपर की ओर अवतल है। परन्तु इस प्रकार के वक्रों की व्याख्या करने में एक गम्भीर कठिनाई इस बात की है कि आँख यह स्पष्ट जाँच नहीं कर सकती कि एक विशिष्ट वक्र रेखा समान अनुपात के परिवर्तन का प्रतिनिधित्व करती है अथवा नहीं। चार्ट 5.2 में एक श्रेणी का चित्रण है जो न समान्तर श्रेणी है न ही गुणोत्तर श्रेणी है। सारणी 5.3 के आँकड़ों से पता चलता है कि श्रेणी समान्तर

सारणी 5.3

बढ़ते हुए मूल्यों की श्रेणी

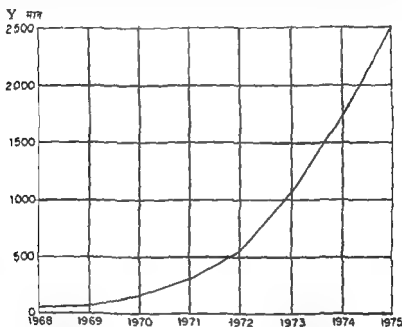
वर्ष (X मूल्य)	1 मूल्य	वृद्धि की मात्रा	प्रतिशत वृद्धि
1968	50		...
1969	80	30	60.0
1970	160	80	100.0
1971	300	140	87.5
1972	550	250	83.3
1973	1 080	530	96.4
1974	1,730	650	60.2
1975	2 500	770	44.5

श्रेणी से अधिक तीव्रता के साथ बढ़ती है और आँख इस तथ्य को समझ सकती है क्योंकि वक्र का झुकाव ऊपर की ओर है। सारणी इस ओर भी संकेत करती है कि श्रेणी की वृद्धि का अनुपात स्थिर नहीं है। परन्तु प्रत्यक्ष तौर पर यह तथ्य स्पष्ट नहीं है। एक अक-गणितीय चार्ट के पाठक के लिए यह निश्चित करना संभव नहीं है कि इस प्रकार की वक्र रेखा वृद्धि के स्थिर अनुपात का प्रतिनिधित्व करती है या वृद्धि के उस अनुपात का जो घट रहा है अथवा वृद्धि के उस अनुपात का जो आरोही है। अक्रों की कोई श्रेणी जो एक समान्तर श्रेणी की अपेक्षा अधिक तीव्र गति से बढ़ती है (उदाहरणार्थ, 10, 12, 15, 19, 24, 30), ऊपर की ओर झुकती है और जब उसे अकगणितीय बिंदु पर आरोहित किया जाता है तो वह ऊपर की ओर अवतल हो जाती है। अक्रों की किसी श्रेणी की ढलान, जो समान्तर श्रेणी की अपेक्षा कम तीव्रता में घटती है (उदाहरणार्थ, 100, 91, 83, 76, 70, 65) नीचे की ओर होती है और जब उसे अकगणितीय निर्देशांक पर दिखाया जाता है तो वह ऊपर की ओर अवतल हो जाती है।

अर्ध-लघुगुणकीय या अनुपात ग्राफ के लिए आधार का विकास प्रारम्भ करने से पूर्व, जिससे हम परिवर्तन के अनुपातों का प्रत्यक्षीकरण कर पाएँगे, आइए हम अकगणितीय

1. गुणोत्तर श्रेणी का प्रतिनिधित्व करने वाला वक्र 'घातीय वक्र' कहलाता है और समीकरण $Y = ab^x$ द्वारा दिखाया जाता है। पाठक इस समीकरण से $P_n = P_0 (1+r)^n$ के रूप में परिचित हो सकते हैं जो वक्रवृद्धि व्याज समीकरण है और जिसका अध्याय 9 में विवेचन है। समान्तर श्रेणी का प्रतिनिधित्व करने वाली सीधी रेखा $Y = a + bX$ द्वारा दिखाई जाती है।

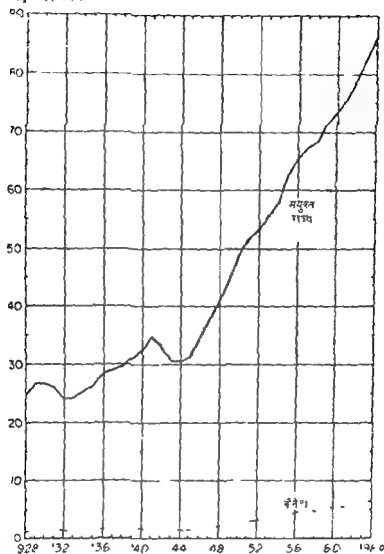
पिड की आगे परीक्षा करे। चार्ट 5 3 म 1928 से 1964 तक संयुक्त राज्य और कनेडा में मोटर गाडियों के पंजीकरण की वृद्धि दिखाई गई है। इस चार्ट से हम देख सकते हैं कि संयुक्त राज्य में पंजीकरण 1928 से 1935 तक स्थिर थे, 1937 और 1938 के बीच मामूली कमी को छोड़कर 1935 और 1941 के बीच बढ़, 1941—1945 में गिरे, तथा 1946 से 1964 तक गति तीव्रता से बढ़ी। कनेडा में पंजीकरण के परिवर्तनों को देखना कठिन है क्योंकि वह पमाना जिसका प्रयोग करना संयुक्त राज्य को सम्मिलित करने के लिए आवश्यक है कनेडा के लिए वक्र को आधार रेखा के कुछ समीप गिरा देता है। फिर भी प्रतीत होता है कि कनेडा में पंजीकरण 1928 से 1948 तक अपेक्षाकृत स्थिर थे और फिर उसके बाद धमधम बढ़ने लगे। यह बिल्कुल स्पष्ट है कि प्रति वष वृद्धि और कमी की मात्राएँ संयुक्त राज्य के लिए कनेडा की अपेक्षा बड़ी थी परन्तु वक्रों के स्वरूप से यह जानने का कोई दग नहीं है कि वर्षानुवर्ष किस देश में वृद्धि और कमी के अनुपात बृहत्तर थे।



चार्ट 5 2 बढ़ती हुई मात्राओं (द्वारा बढ़ते हुए Δ की एक श्रृंखला)। यह श्रृंखला गुणोत्तर नहीं है परन्तु देखने में ऐसा प्रभाव हो सकता है। सारणी 5 3 के अंकन।

कनेडा के लिए वक्र की गतियों का आवश्यक करने के लिए संयुक्त राज्य के लिए एक ऊर्ध्वाधर पमाने का और कनेडा के लिए दूसरे का प्रयोग करके चार्ट 5 3 के आंकड़ों को पुनः आरेखित करना पर्याप्त नहीं होगा। यह तथ्य कि एक अक्रमणिकीय मिड पर एक वक्र दूसरे के नीचे है एक ही दृष्टि में हम यह बताता है कि नीचे का वक्र ऊपर के वक्र की अपेक्षा छोटे आकार की श्रृंखला का प्रतिनिधित्व करता है। यदि दो ऊर्ध्वाधर पमानों का प्रयोग किया जाए तो हमारे पास वास्तव में दो भिन्न अनुलनीय चार्ट होते हैं और निम्न दृष्टि से सन्तोषजनक चाक्षुष तुलनाएँ न की जा सकेंगी (1) दो आरेखित श्रृंखलाओं का आकार, (2) दूसरी श्रृंखला में हुई परिवर्तन की मात्रा की तुलना में परिवर्तन की जो मात्रा एक श्रृंखला में हो चुकी है, अथवा (3) दोनों श्रृंखलाओं के परिवर्तन के अनुपात।

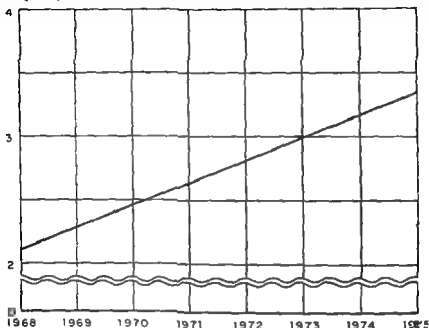
गाड़ियाँ दस लाखों में



चार्ट 53 1928 से 1964 तक संयुक्त राज्य और कॅनेडा में मोटर गाड़ियों के पंजीकरण । ओल्ड हिस्टोरिकल स्टैटिस्टिकस ऑफ दि यूनाइटेड स्टेट्स, पृष्ठ 564 स्टैटिस्टिकल एम्प्लूवमेंट ऑफ दि यूनाइटेड स्टेट्स, 1963, पृष्ठ 564, मोटरगाड़ी निर्माता एसोसिएशन, ऑटोमोबाइल फैक्ट्स एंड फिगर्स 1965, पृष्ठ 19-29 तथा कांफेडरेट रा ट्रेडिन्ग ब्यूरो, कॅनेडा ईयर बुक, 1937, पृष्ठ 668, 1946, पृष्ठ 663, 1950, पृष्ठ 755, 1954, पृष्ठ 252, तथा 1964, पृष्ठ 774 में प्राप्त ।

परिवर्तन के अनुपात दिखाने के लिए ग्राफ

जो पहले कहा जा चुका है उससे यह अवश्य स्पष्ट हो गया होगा कि यदि हम एक ऐसे ग्राफ का प्रयोग कर सकें जिससे वृद्धि (या कमी) का एक स्थिर अनुपात एक सीधी रेखा के तौर पर प्रतीत होगा तो परिवर्तन के अनुपातों में सम्बन्धित लेखाचित्री तुलनाएँ प्रामाण्य हो जाएँगी। सारणी 5.4 में सारणी 5.2 तथा चार्ट 5.1 की गुणोत्तर श्रेढी पुनः



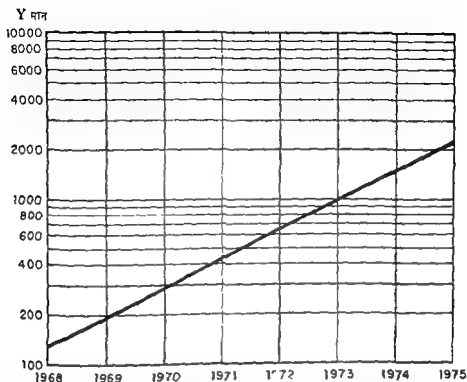
चार्ट 5.4. एक प्र काण्तीय ग्राफ पर आरेखित गुणोत्तर श्रेढी के लघुगणक।
सारणी 5.4 के कोड।

सारणी 5.4

एक गुणोत्तर श्रेढी तथा गुणोत्तर श्रेढी के लघुगणक

वर्ष (X मूल्य)	Y मूल्य	Y मूल्य का लघुगणक	लघुगणको की वृद्धि की मात्रा
1968	128	2.107210	..
1969	192	2.283301	.176091
1970	288	2.459392	.176091
1971	432	2.635484	.176092*
1972	648	2.811575	.176091
1973	972	2.987666	.176091
1974	1,458	3.193758	.176092*
1975	2,187	3.339849	.176091

* ये मूल्य थोड़े से भिन्न हैं क्योंकि लघुगणक निकटतम दस लाखवें भाग तक पूर्णांकित किए गए।



चार्ट 5.5 एक अर्ध लघुगणकीय अथवा अनुपात ग्रिड पर आरेखित गुणोत्तर श्रेढी।
 ताली 5.2 के भाँजड़े। छपे हुए अर्ध लघुगणकीय फार्मों में इस चार्ट में दिखाई गई वीच की रेखाओं से अधिक रेखाएँ होती हैं। ये पास पास खिंची रेखाएँ आरेखन में सहायक होती हैं परन्तु इस पुस्तक के अधिकतर चार्टों में छोड़ दी गई हैं, क्योंकि पृष्ठ के आकार के अनुसार छोटा करने से परिणाम यह होगा कि ये रेखाएँ एक दूसरी के बहुत निकट आ जाएँगी।

दिखाई गई है और इसके साथ विभिन्न यको के लघुगणक दिए गए हैं। इन लघुगणकों की जाँच से पता चलता है कि उनसे एक समान्तर श्रेढी बनती है। अतः यदि ये लघुगणक एक अकगणितीय ग्रिड पर आरेखित किए जाएँ तो एक सीधी रेखा प्राप्त होगी, जैसा कि चार्ट 5.4 में देखा जा सकता है। अपने उद्देश्य को पूर्ण करने का यह एक मार्ग है, परन्तु इसमें इससे पूर्व कि भाँजड़े आरेखित किए जा सक लघुगणक देखने का अतिरिक्त पग आता है। परन्तु एक श्रेणी के मूल्यों के लघुगणकों को आरेखित करने की अपेक्षा हम एक ऐसे ग्रिड का प्रयोग कर सकते हैं जो एक लघुगणकीय ऊर्ध्वाधर पैमाने के साथ बनाया गया है, जैसा कि चार्ट 5.5 में है। यहाँ पुनः हम देखते हैं कि गुणोत्तर श्रेढी एक सीधी रेखा के तौर पर दिखाई देती है। इस प्रकार का ग्रिड अर्ध लघुगणकीय कहलाता है क्योंकि एक पैमाना लघुगणकीय है और दूसरा अकगणितीय।

लघुगणकीय पैमाना—लघुगणकीय पैमाने के निर्माण में केवल मात्र इतनी बात है कि ऊर्ध्वाधर पैमाने के मूल्यों के बीच में उनके लघुगणकों के बीच के अन्तरों के अनुपात में स्थान छोड़ा जाता है। चार्ट 5.6 की ओर यकेत से यह पता चलेगा कि पैमाने पर 2 में 3 तक दूरी 0.352 इंच है और 3 से 4 तक 0.250 इंच है। तब हमारे पास निम्नलिखित आ जाता है

पारितिक	संख्या	लघुगणक
	10	0.000
	9	9.54
	8	9.03
	7	8.53
	6	7.78
	5	6.99
	4	6.02
	3	4.77
	2	3.0
	1	0

लघु 3 - लघु 2	= 0.35' इंच
लघु 4 - लघु 3	= 0.250 इंच
0.477 - 0.301	= 0.352 इंच
0.602 - 0.477	= 0.250 इंच

और अनुपात है

$$0.176 : 0.125 :: 0.352 \text{ इंच} : 0.250 \text{ इंच}।$$

लघुगणकीय पैमाने को समझने के एक दृकल्पिक तरीके में लघुगणक नहीं आते। चार्ट 5.1 के संकेत से स्मरण हो जाएगा कि एक भ्रमणशील प्रिज्ड ऊर्ध्वाधर पैमाने पर समान दूरियाँ समान मात्राओं का प्रतिनिधित्व करती हैं। परंतु एक लघुगणकीय पैमाने के साथ मापी गई समान दूरियाँ समान अनुपातों का प्रतिनिधित्व करती हैं। चार्ट 5.5 के ऊर्ध्वाधर पैमाने पर यह देखा जा

सकता है कि 100 से 200 तक दूरी 0.48 इंच है, इसी

ऊर्ध्वाधर दूरियाँ लघुगणक के बीच के पतलों के समानपातिक हैं। प्रत्येक ऊर्ध्वाधर दूरी इंचों में माप गए लघुगणकों के बीच के अंतर से दूनी है।

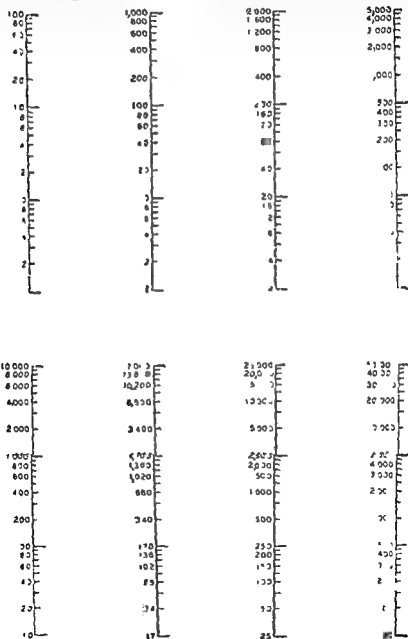
परिणाम निकलना है कि अनुपात 1.4 की किन्हीं दो सरप्रासों के बीच 0.96 इंच का अंतर होगा। इस प्रकार हम देखते हैं कि भ्रम-लघुगणकीय चार्ट प्रायः अनुपात चार्ट क्यों कहलाता है।

चार्ट 5.5 का ऊर्ध्वाधर पैमाना दो भागों में बाँटा गया है जो प्रायः चक्र कहलाते हैं। अतः हम उस कागज को जिस पर चार्ट 5.5 खींचा गया है "द्वि-चक्र भ्रम लघुगणकीय कागज" कहेंगे। एक भ्रम लघुगणकीय चार्ट के ऊर्ध्वाधर पैमाने पर नेबल लगाने में हम किनी भी घनात्मक मूल्य से प्रारम्भ कर सकते हैं। प्रथम चक्र के शीर्ष पर एक, चक्र के तल के एक से दस गुना होगा, द्वितीय चक्र के शीर्ष पर एक, द्वितीय चक्र (प्रथम चक्र का शीर्ष) के तल के एक से दस गुना होगा इत्यादि।² चार्ट 5.7 में क्रमशः 0.1, 1, 2, 5, 10, 17, 25 तथा 50 से प्रारम्भ होने वाले 8 भिन्न लघुगणकीय पैमानों के उदाहरण हैं। यद्यपि पण्डित की दृष्टि से किसी घनात्मक मूल्य से लघुगणकीय पैमाने को प्रारम्भ करने की अनुज्ञा है तो भी एक ऐसा पैमाना चुनना उचित है जिससे बीच के मूल्यों का तुरन्त अन्वेषण किया जा सके। 17 से प्रारम्भ होने वाले पैमाने का प्रयोग करना बहुत कठिन होगा। यदि 11.5 से प्रारम्भ होने वाला त्रि-चक्रीय पैमाना लेना वांछनीय हो तो प्रथम पैमाने के विभिन्न मूल्यों को 5 से गुना किया जा सकता है। अधिकतर लाइन लगे हुए भ्रम लघुगणकीय कागज में प्रिज्ड के दाएँ किनारे के साथ पैमाने के प्रदाना होते हैं। ये गुना करने वाले कारक हैं और ये संकेत करते हैं कि बाएँ पैमाने पर प्रत्येक क्षैतिज रेखा के सामने लिखा जाने वाला

² एक सामान्य लघुगणक यह शक्ति है जिससे दो हुई संख्या प्राप्त करने के लिए 10 को उठाना आवश्यक है। दस प्रकार, $100 = 10^2$ और 100 का लघुगणक 2.0 है, $10,000 = 10^4$, तथा 10,000 का लघुगणक 4.0 है।

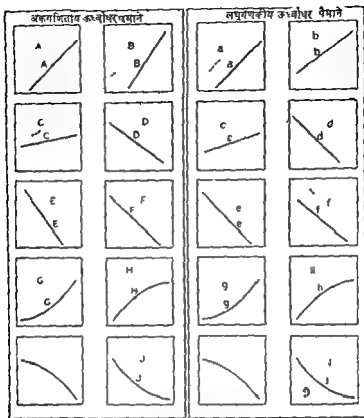
मूल्य वह मूल्य होना चाहिए जो उस चक्र के नीचे लिखे मूल्य को दाईं ओर के पैमाने पर उस क्षैतिज रेखा के सामने दिखाए अक्ष से गुना करके आएगा।

यदि लघुगुणकीय पैमाना शून्य में प्रारम्भ किया जाए तो प्रथम चक्र का शिखर $10 \times 0 = 0$ होगा और पैमाने पर सभी मूल्य भी शून्य होंगे। कल्पना कीजिए कि त्रि-चक्रीय लघुगुणकीय पैमाने का सर्वोपरि मूल्य 0.01 है। तब तीसरे चक्र का तल 0.01 का $\frac{1}{10}$ या 0.001 है, दूसरे चक्र का तल 0.0001 है, और पहले चक्र का तल 0.000001 है।



चार्ट 5.7. लघुगुणकीय ऊर्ध्वाधर पैमाने। 17 से प्रारम्भ होने वाले पैमाने का प्रयोग करना

कठिन होगा।



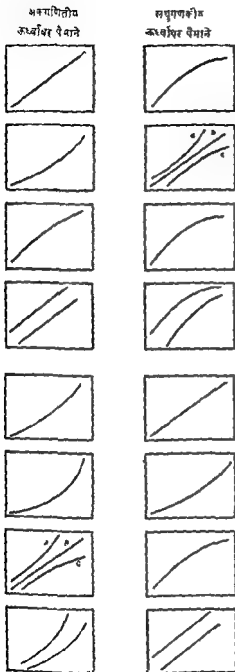
अकण्ठितोय ऊर्ध्वपर पमाने

- A A —वर्द्धि की स्थिर मात्राएँ दोनों वक्रों के लिए एकसमान
 B B —वर्द्धि की भिन्न स्थिर मात्राएँ B के लिए अधिक ।
 C C —वर्द्धि की भिन्न स्थिर मात्राएँ C के लिए अधिक ।
 D D —घटने की स्थिर मात्राएँ दोनों वक्रों के लिए एकसमान ।
 E E —घटने की भिन्न स्थिर मात्राएँ E के लिए अधिक ।
 F F —घटने की भिन्न स्थिर मात्राएँ F के लिए अधिक ।
 G G —वर्द्धि की मात्राएँ बढ़ती हुई दोनों वक्रों के लिए एकसमान ।
 H H —वर्द्धि की मात्राएँ घटती हुई दोनों वक्रों के लिए एकसमान ।
 I I —घटने की मात्राएँ बढ़ती हुई दोनों वक्रों के लिए एकसमान ।
 J J —घटने की मात्राएँ घटती हुई दोनों वक्रों के लिए एकसमान ।

लघुगणकीय ऊर्ध्वपर पमाने

- a a —वर्द्धि की स्थिर प्रतिफलताएँ दोनों वक्रों के लिए एकसमान ।
 b b —वर्द्धि की भिन्न स्थिर प्रतिफलताएँ b के लिए अधिक ।
 c c —वर्द्धि की भिन्न स्थिर प्रतिफलताएँ c के लिए अधिक ।
 d d —घटने की स्थिर प्रतिफलताएँ दोनों वक्रों के लिए एकसमान ।
 e e —घटने की भिन्न स्थिर प्रतिफलताएँ e के लिए अधिक ।
 f f —घटने की भिन्न स्थिर प्रतिफलताएँ f के लिए अधिक ।
 g g —वर्द्धि की प्रतिफलताएँ बढ़ती हुई दोनों वक्रों के लिए एकसमान ।
 h h —वर्द्धि की प्रतिफलताएँ घटती हुई दोनों वक्रों के लिए एकसमान ।
 i i —घटने की प्रतिफलताएँ बढ़ती हुई वक्रों के लिए एकसमान ।
 j j —घटने की प्रतिफलताएँ घटती हुई वक्रों के लिए एकसमान ।

सादर 58 क अकण्ठितोय तथा लघुगणकीय चित्र पर सक। नीचे के आठ वर्गों में से प्रत्येक में दो वक्र ऊर्ध्वपर रूप से एक दूसरे से समान अंतर पर हैं ।



एक समान्तर श्रेणी

एक श्रेणी जिसमें निरपेक्ष परिवर्तन बढ़ रहा है

a. यदि मापेस परिवर्तन बढ़ रहा है।

b. यदि सापेक्ष परिवर्तन स्थिर है।

c. यदि सापेक्ष परिवर्तन घट रहा है।

एक श्रेणी जिसमें निरपेक्ष परिवर्तन

घट रहा है।

दो समान्तर श्रेणियाँ, समान निरपेक्ष परिवर्तन

एक गुणोत्तर श्रेणी

एक श्रेणी जिसमें सापेक्ष परिवर्तन बढ़ रहा है।

एक श्रेणी जिसमें सापेक्ष परिवर्तन घट रहा है।

A यदि निरपेक्ष परिवर्तन बढ़ रहा है।

B यदि निरपेक्ष परिवर्तन स्थिर है।

C यदि निरपेक्ष परिवर्तन घट रहा है।

दो गुणोत्तर श्रेणियाँ, समान सापेक्ष परिवर्तन

58 ल—अर्धसघुगणकीय तथा सघुगणकीय ऊर्ध्वपर पैमानों के संबंध में आरेखित विभिन्न प्रकार की श्रेणियों की तुलनाएँ। एक पैमाने पर दिखाई गई आरेखित श्रेणियाँ दूसरे पर दिखाई गई के समान बन जाती हैं। ऊपर की तुलनाएँ केवल बढ़ती हुई श्रेणियों को जोड़ सकते करती हैं। सुझाव दिया जाता है कि पाठक बढ़ती हुई श्रेणियों वाली कुछ तुलनाओं का रेखाचित्र खींचें।

इस प्रकार कोई शून्य आधार रेखा नहीं हो सकती और अर्ध-लघुगुणकीय चार्ट आधार रेखा के ऊपर दूरियों के रूप में वक्रों की व्याख्या की अनुमति नहीं देता, जैसे कि प्रकगणितीय चार्ट देता है, यद्यपि आरेखित मूल्य ऊर्ध्वाधर लघुगुणकीय पैमाने के साथ पढ़ा जा सकता है, आरेखित निरपेक्ष परिमाणों का कोई प्रत्यक्ष मत नहीं बनाया जा सकता। अर्ध-लघुगुणकीय चार्ट में इस प्रकार दिखाया जाता है (1) एक समान अनुपात का परिवर्तन एक सीधी रेखा के तौर पर, (2) वृद्धि या कमी का अनुपात रेखा के झुकाव से, तथा (3) दो या अधिक रेखाओं में अनुपातों की तुलना इन रेखाओं के समान्तरण या इसके अभाव द्वारा।

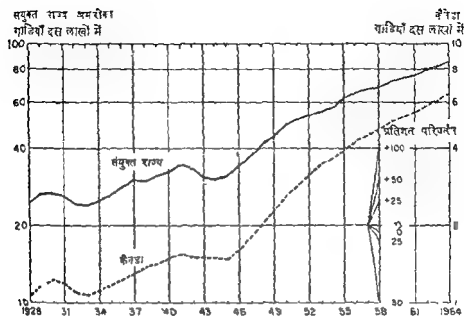
जब भी लघुगुणकीय पैमाने का प्रयोग किया जाता है तो पर्याप्त रेखाएँ या रेखाएँ और टिक दिखाएँ जाने चाहिए ताकि पाठक को यह जानकारी रहे कि वह प्रकगणितीय ग्रिड पर खींचे गए चार्ट को नहीं देख रहा है। क्योंकि लघुगुणकीय पैमाने के प्रतिरिक्त मध्य असमान अन्तर वाले पैमाने (उदाहरणार्थ, व्युत्क्रम पैमाना) हैं, अतः कभी-कभी यह कहना भी वाञ्छनीय है - "अनुपात चार्ट", "अर्ध-लघुगुणकीय चार्ट", या "लघुगुणकीय ऊर्ध्वाधर पैमाना"।

नोट कीजिए कि लघुगुणकीय पैमाने में एक समाकलन समस्या में चक्र घा सकते हैं, जैसा कि चार्ट 5.5 में है, जिसमें दो चक्र हैं और चार्ट 5.9 में, जिसमें एक चक्र है। दूसरी ओर हम एक चक्र के भाग का प्रयोग कर सकते हैं, जैसा कि चार्ट 13.1 में है, अथवा हम एक या अधिक चक्र तथा हमारे चक्र के भाग का प्रयोग कर सकते हैं, जैसा कि चार्ट 11.4B में है।

वक्रों की व्याख्या—अर्ध-लघुगुणकीय चार्ट के अनुप्रयोगों का विचार प्रारम्भ करने से पूर्व, चार्ट 5.8 क तथा 5.8 ख और उनके नीचे की टिप्पणियों की ओर ध्यान दिया जाना चाहिए। जब अर्ध-लघुगुणकीय कागज पर दो सीधी रेखाएँ समान्तर हैं (उदाहरणार्थ a, a' ; d, d'), तो हम जानते हैं कि उनके परिवर्तन के स्थिर अनुपात हैं और यह भी कि दोनों के बीच अनुपात स्थिर रहा है। वक्र रेखाओं के बीच समान्तरण को आँख से आँकना बड़ा कठिन है। चार्ट 5.8 क के नीचे के भागों की ओर सकेत से पता चलेगा कि वक्र रेखाओं में सदा एक समान ऊर्ध्वाधर अन्तर है और इस प्रकार प्रत्येक भाग में दोनों वक्र X -अक्ष के सबध में समान्तर हैं।

अनुप्रयोग

वृद्धि अथवा हास के अनुपातों की तुलना क्योंकि अर्ध-लघुगुणकीय चार्ट के ऊर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य नहीं है और इसीलिए कोई आधार रेखा नहीं है और क्योंकि समान ऊर्ध्वाधर दूरियाँ (उसी पैमाने पर) सदा एकसमान अनुपात का प्रतिनिधित्व करती हैं, (इसलिए) विभिन्न परिमाण के वक्रों की तुलना के लिए माथ-साथ लाने के लिए दो या अधिक भिन्न ऊर्ध्वाधर पैमानों के प्रयोग की अनुज्ञा है। ऐसा चार्ट 5.9 में दिया गया है जो पहले चार्ट 5.3 में प्रकगणितीय ग्रिड पर दिखाने गए मोटर यादियों के पञ्जीकरणों के आँकड़े प्रस्तुत करता है। अर्ध-लघुगुणकीय चार्ट के ऊर्ध्वाधर पैमाने के स्थानान्तरण से वक्र ऊपर या नीचे चना जाता है परन्तु झुकाव, जो कि अत्यन्त महत्वपूर्ण है इसमें नहीं बदलता। दो लघुगुणकीय पैमानों का प्रयोग करते समय, जैसा कि चार्ट 5.9 में है, छोटे परिमाण की श्रेणियों को बड़े परिमाण के नीचे रखना वाञ्छनीय है (यद्यपि पूर्णरूपेण आवश्यक नहीं)। इसी प्रकार यदि एक या अधिक भगों की कुल से तुलना की जा रही हो तो भागों के लिए वक्र कुल के लिये वक्र से नीचे होने चाहिए।



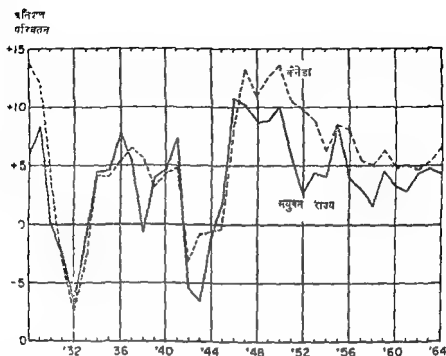
चार्ट 5.9 1928 से 1964 तक संयुक्त राज्य और कैनेडा में मोटर गाडियों की पंजीकरण। अर्ध-लघुगुणकीय चार्ट 5.3 के नीचे दिए लोको से।

चार्ट 5.3 से संयुक्त राज्य में या कैनेडा में मोटर गाडियों के पंजीकरणों की भारी वृद्धि का हमें कोई आभास नहीं हुआ। परन्तु चार्ट 5.9 में प्रत्येक श्रेणी के लिए सापेक्ष वृद्धि दिखाई गई है और इससे हम इन दो अनमान आकार की श्रेणियों की वृद्धि के अनुपातों की तुलना करने में सक्षम हो जाते हैं। सामान्य तौर पर, दोनों श्रेणियों में सारी अवधि में वृद्धि और कमी के लगभग समान अनुपात दिखाए गए हैं। तो भी 1947 से 1964 तक वृद्धि का अनुपात कैनेडा के लिए अधिक दिखाई पड़ता है। चार्ट 5.9 पर ध्यान से किसी एक वर्ष से अगले वर्ष तक दिखाए गए वक्रों के लिए वृद्धि या कमी के अनुपात का अनुमान करना संभव हो जाता है। परन्तु यह बात अन्य चार्टों पर लागू नहीं होती, जिनके पैमाने भिन्न हैं।

संयुक्त राज्य और कैनेडा में मोटर गाडियों के पंजीकरणों में सापेक्ष परिवर्तन को दिखाने का एक वैकल्पिक ढंग प्रति वर्ष प्रतिशत परिवर्तन का हिसाब लगाना और परिणामों को एक अकर्मण्य शिखर पर आरेखित करना है। ऐसा चार्ट 5.10 में किया गया है।

एक ही वार्षिक अवधि में दो भिन्न श्रेणियों के प्रतिशत परिवर्तन की तुलना करने की अपेक्षा विभिन्न समयों पर उन्हीं श्रेणियों की वृद्धि के अनुपातों की तुलना करने से हयारी बचि हो सकती है। इस प्रकार चार्ट 5.9 में हम देख सकते हैं कि संयुक्त राज्य मोटर गाडी पंजीकरणों की प्रतिशत वृद्धि 1954 से 1955 तक 1955 से 1956 तक की अपेक्षा अधिक थी और साथ ही सापेक्ष कमी 1942 से 1943 तक 1937 से 1938 तक की अपेक्षा अधिक थी। इसी प्रकार के निष्कर्ष चार्ट 5.10 से निकाले जा सकते हैं।

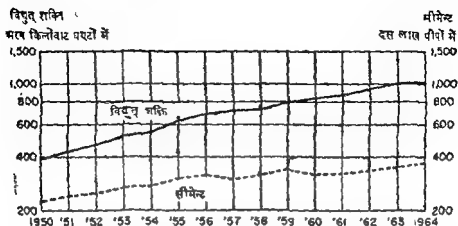
ऐसी श्रेणियों की तुलना करना बहुत आवश्यक है जो भिन्न इकाइयों में व्यक्त की गई हो। उदाहरणार्थ, हम निम्न में से किसी दो या अधिक की तुलना कर सकते हैं व्यापारिक निर्यात, दस लाख डॉलर में, स्टॉक बाजार में व्यापार की मात्रा, बेचे गए हिस्सों



चार्ट 5.10 1928 से 1964 तक संयुक्त राज्य और कनेडा में मोटर गाड़ियों के पंजीकरणों में वृद्धि या कमी का वार्षिक प्रतिशत। चार्ट 5.3 के नीचे दिए गए स्रोतों से लिए आंकड़े।

की संख्या में, कोयला उत्पादन, 2,000 पाउंड टनो में, पेट्रोल का उत्पादन, 42 गैलन के बैरलों में, इमारती लकड़ी का उत्पादन, बोर्ड फुटो में, सीमेंट उत्पादन, 376-पाउंड बैरलो में, उत्पादन विद्युत् शक्ति, किलोवाट घण्टों में, निर्मित गैस, घन फुटो में। 376-पाउंड बैरलो को टनो में परिवर्तित करना संभव है, परन्तु किलोवाट घंटो को बोर्ड फुटो में बदलना या इसके विपरीत संभव नहीं है।

विभिन्न इकाइयों में अभिव्यक्त दो श्रेणियों को जब अक्षरपणितय ग्रिड पर प्रारोक्षित किया जा सकता है, तब बहुधा ऐसा नहीं है कि इस प्रकार की तुलना उपयोगी हो। दो श्रेणियाँ साथ साथ घटती-बढ़ती हैं कि नहीं इतना निश्चित करने के अतिरिक्त हमारी रूचि किलोवाट घंटो में विद्युत् शक्ति उत्पादन के परिवर्तनों की बैरलो में सीमेंट उत्पादन के परिवर्तनों से तुलना की संभावना नहीं है। इसके स्थान पर हमारी इच्छा विद्युत् शक्ति उत्पादन के प्रतिशत परिवर्तन की सीमेंट उत्पादन के प्रतिशत परिवर्तन से तुलना करने की हो सकती है। अर्ध-लघुगुणकीय ग्रिड पर अन्य आधार रेखा नहीं है, केवल वक्र का झुकाव अर्थपूर्ण है, और हम इस प्रकार की अमान्य इकाइयों में व्यवस्था, जिनका अभी-अभी वर्णन हुआ है, दो श्रेणियों में सापेक्ष परिवर्तनों की उचित तुलना करने के योग्य हो गए हैं। चार्ट 5.11 में 1950 से 1964 तक विद्युत् शक्ति और पोर्टलैंट सीमेंट के उत्पादन की तुलना दिखाई है। अन्य रूचिकर तुलनाओं में 1950 से 1957 तक विद्युत् शक्ति के उत्पादन में वृद्धि के अधिक तीव्र अनुपात और 1956 और 1959 में सीमेंट के उत्पादन में दो शिखरों को नोट किया जा सकता है।

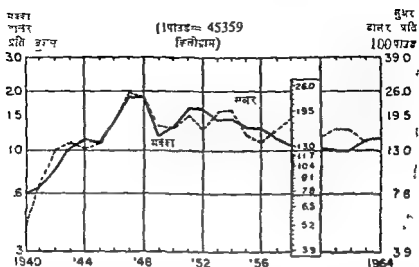


चार्ट 5.12 1950 से 1964 तक विद्युत् शक्ति तथा पोर्टलैंड सीमेन्ट का उत्पादन।
मॉन्टे स्टैटिस्टिकल ऐंसाइक्लॉपीडिया ऑफ़ रिपब्लिक ऑफ़ स्पेन की विभिन्न प्रतियों और सर्वे प्राप्त करन्ट विज़नेस, मई 1965, पृष्ठ एन 26 तथा एम 38 में। 1951 के लिए सीमेन्ट का उत्पादन अनुमानित है।

उत्तार-चढ़ावों की तुलना—दो भिन्न आकार की तैयिक श्रेणियों में हो रहे उत्तार-चढ़ावों की तुलना का उदाहरण चार्ट 5.3 तथा 5.9 में दिया जा सकता है, जिनमें 1928 से 1964 तक के लिए संयुक्त राज्य और कॅनेडा में मांटर गाडी पंजीकरणों की संख्या दिखाई गई है। दोनों श्रेणियाँ दस लाख में व्यक्त की गई हैं, परन्तु संयुक्त राज्य के पंजीकरण कॅनेडा से बहुत अधिक हैं। परिणाम यह है कि जब दोनों श्रेणियाँ प्रकल्पितीय चित्र पर दिखाई गई हैं, जैसा कि चार्ट 5.3 में है, तो बड़ी श्रेणी के उत्तार-चढ़ाव स्पष्ट रूप में देखे जा सकते हैं परन्तु छोटी श्रेणी के उत्तार-चढ़ाव दिखाई नहीं देते। जब दोनों समुच्चयों के आँकड़ों अर्धगणकीय चित्र (चार्ट 5.9) पर चित्रित किए गए हैं तो न केवल दोनों श्रेणियों के उत्तार-चढ़ाव देखे जा सकते हैं, बल्कि उनकी सापेक्ष तीव्रता की तुलना की जा सकती है। उदाहरण के लिए, चार्ट 5.9 से यह स्पष्ट है कि 1949 से 1952 तक कॅनेडा के पंजीकरणों की वृद्धि का अनुपात इन्हीं वर्षों के लिए संयुक्त राज्य के पंजीकरणों में वृद्धि के अनुपात में अधिक था, और यह भी कि 1941 से 1943 में कॅनेडा की प्रपेक्षा संयुक्त राज्य में सापेक्ष रूप से अधिक थी। ये आँकड़े उत्तार-चढ़ावों की तुलना में मन्निहित सिद्धांतों के उदाहरण हैं। अधिक सामान्य तौर पर विश्लेषणों का मन्वय पंजीकरणों के आँकड़ों की अपेक्षा उत्पादन और उपभोग में उत्तार-चढ़ावों के साथ अधिक होगा।

दो श्रेणियों में रुचि लेने की बजाय हमारी इच्छा एक ऐसी श्रेणी की तरफों की तुलना करने की हो सकती है जो एक कालावधि में अपेक्षाकृत छोटे मूल्यों के इर्द-गिर्द और अन्य समय में निश्चित तौर पर बड़े मूल्यों के इर्द-गिर्द घटो-बढ़ी। उदाहरणार्थ, 1921 से 1935 तक व्यापारिक दिफन्तताएँ लगभग 22 हजार वार्षिक थीं। 1941 से 1950 तक वे लगभग 5,500 वार्षिक थीं। 1960 में उनकी औसत सराया लगभग 16,000 वार्षिक रही। अर्ध-लघुगणकीय चार्ट की सहायता से इस प्रकार के विभिन्न समयों में उत्तार-चढ़ावों की सापेक्ष तीव्रता का हम अध्ययन करने के योग्य हो जाते हैं।

अनुपातों का निर्धारण—चार्ट 5.12 में दिखाया है कि अर्ध-लघुगणकीय चार्ट पर अनुपात कैसे प्रस्तुत किए जा सकते हैं। दो घातित श्रेणियाँ किमानों द्वारा मक्का के लिए

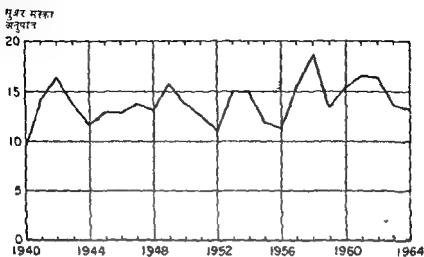


चार्ट 5 12 1940 से 1964 तक मक्का की प्रति बुगल और सुन्तरों की प्रति सौ पाउंड औसत फार्म कीमतें। पूरक पैमाने की यह ग्राफ से हम किसी वर्ष के लिए मक्का के मूल्य के सम्बन्ध में सुन्तर की कीमतों का अनुपात पढ़ने के योग्य हो जाते हैं। मूल्य 13 मक्का की रेटा के सामने रखा गया है और सुन्तर की रेटा के सामने के मूल्य से प्रति बुगल मक्का की कीमत के सम्बन्ध में प्रति सौ पाउंड सुन्तर की कीमत का अनुपात प्राप्त होता है। 1958 के लिए अनुपात 19 से बोझा न कम दिखाया गया है जिसका चार्ट 5 13 से सत्यापन किया जा सकता है। पूरक पैमाना उनी प्रकार अक्षांशित किया गया है जैसे चावल के दाल और का पैमाना। जब 13 मक्का की रेटा के सामने रखा गया है तब सुन्तर की कीमतों के लिए पैमाने पर ऐसे मूल्य हैं जो मक्का की कीमतों के लिए पैमाने पर तदनुसार मूल्य में 13 गुना है। डॉकट्टे इधि विभाग, एग्रीकल्चरल स्टैटिस्टिक्स, 1964, पृष्ठ 330 तथा स्टैटिस्टिकल ऐम्ब्लेंस आफ दि यूनाइटेड स्टेट्स, 1965, पृष्ठ 651 स।

प्राप्त प्रति बुगल मूल्य और किमानों द्वारा सुन्तरों के लिए प्राप्त प्रति 100 पाउंड मूल्य हैं। जब मक्का के लिए सुन्तरों की कीमत से कम कीमत प्राप्त होती है तो किमानों को प्रायः नकदी के बदले मक्का बचने की अपेक्षा मक्का सुन्तरों को खिलाना लाभदायक प्रतीत होगा। दूसरी ओर, जब मक्का के लिए सुन्तरों के लिए प्राप्त कीमत में अधिक कीमत प्राप्त हो रही हो तब किमानों की प्रवृत्ति नकदी के बदले मक्का बचने की होगी। यदि किसान को 100 पाउंड सुन्तरों स, मक्का का एक बुगल से लगभग 13 गुना प्राप्ति होती है तो किसान का लिए यह बात प्रायः गण्य होगी कि वह अपना मक्का नकदी के बदले में बेचना है या मक्का अपने सुन्तरों को खिलाना है।³ इस कारण चार्ट 5 12 के दो पैमाने 13 : 1 के अनुपात में रखे गए हैं।⁴ चार्ट में न केवल सुन्तरों की कीमत और मक्का की कीमत में उतार-चढ़ाव दिखाया गया है परन्तु इससे यह देखना भी सरल हो जाता है कि कब 100 पाउंड सुन्तरों की कीमत मक्का के 1 बुगल की कीमत से ठीक 13 गुना है, इससे अधिक

3 पृष्ठ 131 देखिये जहाँ सुन्तर-मक्का के अनुपात का विवरण दिया गया है।

4. सुन्तर की कीमतों का पैमाना अनुपयुक्त है परन्तु इस उदाहरण में आवश्यक है।

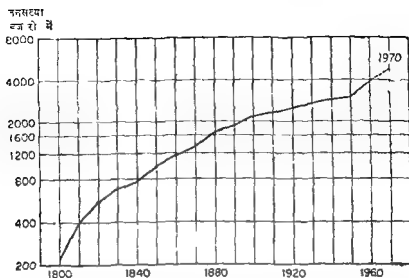


चार्ट 5.13 1940 से 1964 तक सुअर मक्का अनुपात । सुअर की प्रति सौ पाउंड बीसत फार्म कीमत को मक्का की प्रति बुश बीसत कीमत से भाग करके अनुपात प्राप्त किया गया है । यह अनुपात बताए मूल्यों पर सौ पाउंड जीवित सुअर खरीदने के लिए आवश्यक मक्का के बुशलों की संख्या है । अधिक चार्ट 5.12 के नीचे दिए गए लोतों से ।

है या कम है । जब 100 पाउंड सुअर मक्का के एक बुश के 13 गुना से अधिक ■ लिए बिक रहा है तो सुअरों का बक मक्का के बक से ऊपर है, सुअर अपेक्षाकृत मूल्यवान् हैं और किसानों की प्रवृत्ति अपने सुअरों को मक्का खिलाने की है । जब 100 पाउंड सुअर मक्का के एक बुश के 13 गुना से कम के लिए बिक रहा है तो सुअरों का बक मक्का के बक से नीचे है, मक्का अपेक्षाकृत मूल्यवान् है और किसानों को नकदी के बदले मक्का बेचने की प्रवृत्ति है । जब दोनों बक समानान्तर है, तो अनुपात स्थिर रहता है । जब मक्का की कीमत का बक सुअर की कीमत के बक की अपेक्षा अधिक तीव्रता से ऊपर की ओर (अथवा कम तीव्रता से नीचे की ओर) झुका हुआ है तो मक्का सुअरों की अपेक्षा अधिक मूल्यवान् हो रहा है, जब मक्का के मूल्य का बक सुअर की कीमत के बक की अपेक्षा कम तीव्रता से ऊपर की ओर (या अधिक तीव्रता से नीचे की ओर) झुका हुआ है तो मक्का सुअरों की अपेक्षा कम मूल्यवान् हो रहा है । पूरक पैमाने से, जो कागज का अलग टुकड़ा है और जो चार्ट पर दिखाया गया है, पाठक किसी भी समय दोनों कीमत बकों के बीच अनुपात मापने के योग्य हो जाता है ।

चार्ट 5 13 में सुअर और मक्का की कीमतों के बीच सम्बन्ध दिखाने के एक अन्य ढंग का उदाहरण है । यहाँ मक्का की कीमतों के सम्बन्ध में सुअर की कीमतों के अनुपात का प्रत्येक मान के लिए परिवर्तन किया गया है और एक अर्ध-लघुगुणीय ग्रिड पर (उसे) आरोपित किया गया है । अनुपात का पूरक पैमाने के प्रयोग के बिना अध्ययन किया जा सकता है, परन्तु मक्का कीमतों और सुअर कीमतों में परिवर्तन नहीं दिखाए गए हैं ।

अन्तर्वेशन तथा बाह्यवेशन—जबकि एक अर्ध-लघुगुणीय चार्ट पर अन्तर्वेशन एक अर्ध-लघुगुणीय अन्तर्वेशन है, अर्ध-लघुगुणीय चार्ट पर अन्तर्वेशन एक लघुगुणीय अन्तर्वेशन है । इस प्रकार यदि हम चार्ट 5 5 की ओर निवेश करें और ग्रॉफ के द्वारा 1972 और 1973 के बीच में X मूल्य के लिए अन्तर्वेशन करें तो हमें लगभग 790 प्राप्त होता है,



चार्ट 5 14 संयुक्त राज्य के पूर्व दक्षिण केन्द्रीय मंडल में 1800 से 1960 तक पुरुष जनसंख्या तथा 1970 के लिए स्तुल अनुमान । अर्ध लघुगुणकीय चार्ट का एक सदिग्ध प्रयोग । पूर्व दक्षिण केन्द्रीय विभाग में अन्तर्भूत राज्य हैं अलाबामा, कैलीफोर्निया, मिसिसिपी और टेनेसी । आंकड़े, संयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो, यू० एस० सेंसस ग्राफ पापुलेशन, 1950, चार्ट I, निवासियों की संख्या, पृष्ठ 1—8 और 1—9 तथा 1960, चार्ट I, कैरेक्टिस्टिक्स ऑफ दि पापुलेशन, भाग I, यू० एस० समरी, पृष्ठ 1—264 से ।

जो लगभग वही अंक है जो हमें तब प्राप्त होता है जब हम (लघु 648 + लघु 972) — 2 का प्रयोग करें और निष्कर्ष का प्रति-लघुगुणक लें ।

आलुवेशन में वक्र के एक सिरे को या दूसरे सिरे को बढ़ाना होता है । यदि हम जिन वर्षों के लिए हमारे पास आंकड़े हैं उनसे बाद के वर्षों के लिए अनुमान करने के लिए वक्र को बढ़ावें तो हम पूर्वानुमान कर रहे हैं । अर्ध-लघुगुणकीय चार्ट के इस प्रयोग का निश्चित तौर पर सदिग्ध मूल्य है यदि इसका तात्पर्य केवल एक ऐसे वक्र को बढ़ाना है जो भूतकाल में यह संकेत कर चुका हो कि आंकड़े काफी स्थिर वृद्धि की दर का प्रदर्शन करते हैं । किसी भी पूर्वानुमान के ढंग पर, जिसमें केवल मात्र एक वक्र का सातत्य या एक भ्रम का स्वयं प्रयोग आता है (और) साथ-साथ अथवा स्थान एवं सञ्चालक कारकों का ध्यानपूर्वक विचार आवश्यक नहीं है, कठिनाई में ही निर्भर कर सकते हैं, विशेष तौर पर यदि आर्थिक स्थितियाँ परिवर्तन की स्थिति में हैं । चार्ट 5 14 का वक्र 1800 से 1960 तक संयुक्त राज्य के पूर्व दक्षिण केन्द्रीय विभाग की चौदह वर्ष और अधिक आयु की पुरुष जनसंख्या दिखाता है । यद्यपि वक्र का विस्तार 1970 के लिए संभावित अनुमान की ओर संकेत करना है तथापि यह अनुभव करना चाहिए कि केवल पहले की जनगणनाओं के ज्ञान पर आधारित 1970 की जनसंख्या के किसी अनुमान की कोई मान्यता नहीं हो सकती । निम्न प्रकार के विचारों की उपेक्षा कर दी गई है भ्रम की ओर (या से) उद्योग की गतियाँ, अन्य कहीं स्थित नगरों के विकेन्द्रीकरण के कारण विभाग में जनसंख्या में संभावित

वृद्धि, विभाग से नीचे लोगो की सतत गति या उस गति का वैपरीत्य, तथा अन्य कारक।⁵

अब जबकि पाठक को अर्ध-लघुगणकीय चार्ट के स्वरूप और प्रयोगों में परिचय है वह पुस्तकों, लेखों या प्रतिवेदनो में अकगणितीय चार्टों की कभी-कभी प्रस्तुति नोट कर सकता है जबकि अर्ध-लघुगणकीय चार्ट अधिक उपयुक्त होने हैं, इसके विपरीत गलती मुश्किल से ही की जाती है। प्रत्येक प्रकार के चार्ट से एक उपयोगी किन्तु बिल्कुल भिन्न प्रयोजन सिद्ध होता है। अकगणितीय चार्ट उम समय प्रयोग में लाना चाहिए जब निरपेक्ष तुलनाएँ वांछनीय हों (चार्ट 5 10 तथा 5 13 अनुपातों की निरपेक्ष तुलनाएँ हैं), अर्ध-लघुगणकीय चार्ट उस समय प्रयोग में लाना चाहिए जब अपेक्ष तुलनाएँ करनी हों।

लघुगणकीय पैमानों का निर्माण

एक लघुगणकीय चक्र दस गुना वृद्धि को स्थान दे देगा, दो चक्र सौ गुना वृद्धि का प्रबन्ध कर देते हैं। हम अध्याय में समाविष्ट विभिन्न चार्टों की ओर निर्देश से पता चलेगा कि किसी ऊर्ध्वाधर लघुगणकीय पैमाने का विस्तार (चार्ट 5 7 में दिखाएँ पैमानों को छोड़कर) दो चक्रों से अधिक नहीं होता। द्वि-चक्र अर्ध-लघुगणकीय कागज उन अधिकतर श्रेणियों के लिए पर्याप्त होगा जिनका चार्ट निर्माता से वास्ता पड़ने की संभावना है, उसे तीन चक्रों से अधिक वाले कागज की विरले ही आवश्यकता होगी क्योंकि इसमें हजार गुना वृद्धि आ जाती है। उन स्थितियों में भी जहाँ बहुत छोटे परिमाण की श्रेणी की बहुत बड़े परिमाण की श्रेणी से तुलना करना आवश्यक है, कई एक चक्रों की आवश्यकता नहीं होती, क्योंकि तुलना के लिए दस चक्रों को माय माने के लिए दो ऊर्ध्वाधर पैमानों का प्रयोग वांछनीय है, जैसा कि चार्ट 5 9 में है। अनेक प्रकार के लाइन गेज अर्ध-लघुगणकीय कागज विभिन्न स्त्रोतों से प्राप्त हैं। तो भी यदि केवल द्विचक्र कागज ही प्राप्त हो और अधिक चक्रों वाले कागज की आवश्यकता हो तो केवल मात्र द्वि-चक्र कागज के तख्ते से नीचे का किनारा काटना और इसे शून्य तख्ते के ऊपर चिपकाना आवश्यक है।

कभी-कभी एक या द्वि-चक्र कागज का प्रयोग वांछनीय हो सकता है, परन्तु जो तुरन्त प्राप्त है उससे बड़े या छोटे आकार के चक्र के साथ। अर्ध-लघुगणकीय कागज को एक साधारण तख्ते का प्रयोग करके और इसकी चोटी पर मादे कागज का एक तख्ता निरुद्ध रख कर लघुगणकीय पैमाने का प्रसार किया जा सकता है। लघुगणकीय पैमाने को एक सादे कागज के टुकड़े पर अर्ध-लघुगणकीय कागज के एक तख्ते का निरुद्ध रखकर और क्षैतिज रेखाएँ लगाकर मिकाड़ा जा सकता है। हाँ, इस प्रकार से किसी भी सख्या में चक्र निकाले जा सकते हैं। पैमाने के प्रसार, पैमाने के संकोच और पैमाने के परिवर्तन की विधियों के उदाहरणों के लिए मून प्रेजी पुस्तक के द्वितीय सम्पकरण में पृष्ठ 114 — 115 देखिए।

ऐसी अवस्था में जब कोई उपयोगी लघुगणकीय कागज और किसी प्रकार के लघुगणकीय पैमाने प्राप्त न हों, किसी भी वांछित आकार का लघुगणकीय पैमाना

5 अनुमत्या का पुनानुमान करने में आने वाली समस्याओं का विवरण संयुक्त राज्य ध्यापार विभाग द्वारा परिचालित कान थ्योरेन स्टैनबरी द्वारा लिखित 'वेंटर पापुलेशन फोरकास्टिंग फार एरियाज एण्ड कम्युनिटीज' में दिया गया है।

लघुगणको की सारणी के निर्देश से बनाना संभव है। पैमाने के मूल्यों के बीच उनके लघुगणको के बीच के अन्तरों के अनुपात में अन्तर छोड़कर किसी भी सुविधाजनक इकाई के रूप में पैमाने का निर्माण किया जा सकता है। नीचे दिखाए गए अंकों से यह दिखाई पड़ता है कि 1 से 2 तक दूरी 0 301030 इकाइयाँ होगी, 2 से 3 तक दूरी 0 176091 इकाइयाँ होगी, इत्यादि। बीच के मूल्यों का इसी प्रकार स्थानांकन किया है।

पैमाने का मूल्य	लघुगणक	अन्तर
1	0	
2	0 301030	0 301030
3	0 477121	0 176091
4	0 602060	0 124939
5	0 698970	0 096910
6	0 778151	0 079181
7	0 845098	0 066947
8	0 903090	0 057992
9	0 954243	0 051153
10	1 000000	0 045757
20	1 301030	0 301030
30	1 477121	0 176091
40	1 602060	0 124939
50	1 698970	0 096910
60	1 778151	0 079181
70	1 845098	0 066947
80	1 903090	0 057992
90	1 954243	0 051153
100	2 000000	0 045757

लघुगणकीय पैमानों की उपयोगिता इस अध्याय में दिखाए गए प्रयोगों तक सीमित नहीं है। अध्याय 23 में हम एक क्षैतिज लघुगणकीय पैमाने और एक अकगणितीय ऊर्ध्वधर पैमाने का प्रयोग करेंगे। अध्याय 20 में हम दोनों क्षैतिज और ऊर्ध्वधर अक्षों पर लघुगणकीय पैमानों का प्रयोग करेंगे।

लेखाचित्री निरूपण III :

चाटों के अन्य प्रकार

सांख्यिकीय सूचना प्रस्तुत करने के लिए चित्रों के अतिरिक्त कई अन्य लेखाचित्रीय विधियाँ उपलब्ध हैं। इस अध्याय में हम दंड चाटों, वृत्तारेखों, चित्रलेखों तथा सांख्यिकीय नक्शों की ओर संक्षिप्त ध्यान देंगे।

तुलना के आधार

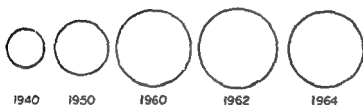
चाटें 6.1 में दिखाया गया है कि इन तीन प्रकार के चित्रों के द्वारा खेतों पर ट्रैक्टरों की संख्या की किस प्रकार तुलना की जा सकती है (A), दंड चाटें, जिनमें एक-विम तुलनाएँ आती हैं, (B) तथा (C), वृत्त तथा वर्ग, जिनमें द्वि-विम तुलनाएँ आती हैं, तथा (D) त्रि-विम तुलना, जिसका विभिन्न आकारों के ट्रैक्टरों से प्रतिनिधित्व होता है। चाटों के पाठकों पर दिखाए गए परिमाणों का सबसे अधिक ठीक प्रभाव उन समय पड़ता है जब आंकड़ों का दंड चाटों के द्वारा प्रतिनिधित्व होता है और सबसे कम ठीक प्रभाव उन समय जब आंकड़ों का प्रतिनिधित्व आयतन आरेखों द्वारा होता है। क्षेत्र आरेखों का निर्णय आयतन आरेखों की अपेक्षा अधिक सही होता है, परन्तु दंड चाटों की अपेक्षा कम सही।¹ यह भी स्मरण रखना चाहिए कि छपे हुए पृष्ठ पर दिखाए आयतन आरेखों से पाठकों के लिए यह आवश्यक हो जाता है कि अपनी तुलना करने से पूर्व वह तृतीय विमीय प्रत्यक्षीकरण करें। वर्गों, वृत्तों, या विभिन्न आकार के चित्रों का प्रयोग करने वाले चाटों की एक अन्य हानि यह है कि पाठक इस बारे में अनिश्चित हो सकता है कि ऊँचाइयों, क्षेत्रों, आयतन आयतनों की तुलना की जाए। किसी भी स्थिति में जिस आधार पर चित्र खींचा गया था उसका संकेत देना चाहिए। यदि यह तर्क प्रस्तुत किया जाए कि ट्रैक्टर जैसे पदार्थों के आकार की तुलना का ठीक आधार विभिन्न ट्रैक्टरों का आभासी भार है, और यदि चाटें निर्माता ने ट्रैक्टरों को इस प्रकार बनाया है ताकि विभिन्न वर्गों में ट्रैक्टरों की संख्या ट्रैक्टरों की ऊँचाई या लम्बाई से दिखाई गई है, जैसा कि कभी-कभी किया जाता है, तब वह पाठक जो आभासी भार (आवश्यक तौर पर आयतन) के आधार पर आकारों का निर्णय करता है, विभिन्न वर्गों में ट्रैक्टरों की संख्या में परिवर्तन का बढ़ा-चढ़ा प्रभाव ग्रहण करेगा।

समाचार-पत्रों और पत्रिकाओं में प्रायः आयतन तुलनाओं वाले चाटें आते हैं। इस अध्याय में आगे हम यह देखेंगे कि चित्रलेखों की सहायता से चित्रों का ध्यानाकर्षक मूल्य

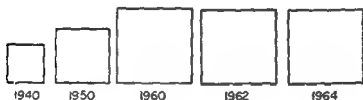
1. देखिए, "ग्राफिक कम्पेरिसेन्स बाई वॉर्म्स, स्क्वेयर्स, सर्कल्स, एंड क्यूब्स", द्वारा फ्रेडरिक ई० क्रॉसटन तथा हेरोल्ड स्टीन, जर्नल ऑफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, मार्च 1932, पृष्ठ 54—60।



A



B



C



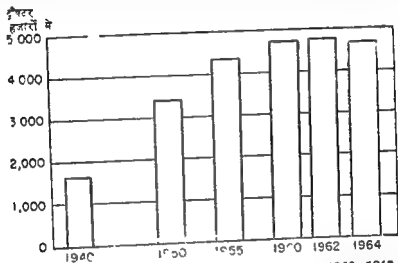
D

चार्ट 6 1 संयुक्त राज्य में 1940, 1950, 1960, 1962, तथा 1964 में खेतों पर ट्रैक्टरों की संख्या। बाँकड़ों का प्रतिनिधित्व (A) दशों, (B) वृत्तों, (C) वर्गों, तथा (D) ट्रैक्टरों के चित्रों द्वारा किया गया है। भाग A में रेखीय तुलनाएँ जाती हैं, भाग B और C में क्षेत्र की तुलनाओं की आवश्यकता है। भाग D में आयमनों की तुलनाएँ आवश्यक हैं। बीबीसी एग्रीकल्चरल स्टैटिस्टिक्स, 1962, पृष्ठ 520, 1963, पृष्ठ 442, 1964 पृष्ठ 440 से लिए गए। 1964 के बाँकड़े प्रारम्भिक हैं।

प्राप्त करना तथा साथ ही, जितने दंड चाटों से प्राप्त किए जा सकते हैं, जतने सही प्रत्यक्ष प्रभाव प्राप्त करना कैसे संभव है।

दंड चाट

चाटें 6.1 के भाग A में दिखाया गया दंड चाट किसी पैमाने का प्रयोग न करने वाला एक सरल प्रकार है। चाटें 6.2 में वही आंकड़े एक ऐसे दंड चाट की सहायता से दिखाए गए हैं जिसका एक पैमाना है और जो इस तथ्य की ओर ध्यान आकर्षित करने के लिए कि कालावधियाँ बदलती हैं, दंडों के बीच के स्थान में भी परिवर्तन लाता है। जब



चाटें 6.2 संयुक्त राज्य में 1940, 1950, 1955, 1960, 1962, तथा 1964 में खेतों पर दंडों की संख्या। चाटें 6.1 के नीचे दिए स्रोतों से लिए आंकड़े।

चाट से केवल बहुत सामान्य प्रभाव डालने की अपेक्षा होती है तो पैमाने के प्रयोग के बिना ही साधारण दंड चाट बनाए जा सकते हैं, जैसा कि चाटें 6.1 के भाग A में है। परन्तु जब विभिन्न पैमाने प्रयोग करने वाले दो (या अधिक) दंड चाटें सन्निधि में हैं और उनकी एक दूसरे से तुलना की जा सकती है तब पैमाने दिखाने चाहिए। एक अन्य सावधानी पैमाने पर शून्य की उपस्थिति से संबंधित है, चाटें 6.3 में जिसमें शून्य नहीं है यह दिखाया गया है कि इस प्रकार के चाटों में शून्य का सौंप ठीक उतना ही भ्रामक है जितना कि अकर्मणीय वक्रों के मामले में। परन्तु चाटें 6.4, भ्रामक छाप छोड़े बिना, स्थान की बचत का एक अच्छा उदाहरण है। यह पैमाने के विच्छेद द्वारा सम्पन्न किया जाता है।

पहले के सभी दंड चाटों में तैथिक आंकड़े दिया गए थे और प्रयाप्त विधि का अनुकरण करके दंडों की ऊर्ध्वाधर रूप से व्यवस्था की गई थी। सरयात्मक दृष्टि से वर्गीकृत आंकड़ों के लिए ऊर्ध्वाधर दंडों का भी प्रयोग करना चाहिए, उदाहरणार्थ, संयुक्त राज्य में वय दलों की दृष्टि से या पढाई के वर्षों के अनुसार वर्गीकृत व्यक्तियों की संख्या के आंकड़े। दूसरी ओर, गुणात्मक या भौगोलिक दृष्टि से वर्गीकृत आंकड़ों की तुलनाएँ करते समय, प्रायः क्षैतिज दंडों का प्रयोग किया जाता है। चाटें 6.5 में 1964 में संयुक्त राज्य में चुने हुए नए निर्माण कार्य के मूल्यों की ऐसी तुलना दिखाई गई है।

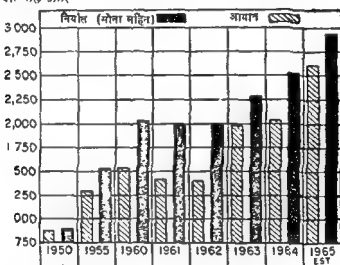
दड़ चाटों के निर्माण में किसी निश्चित नियम का पालन नहीं करना होता। फिर भी कुछ विचार सहायक हैं।

(1) अलग-अलग दड़ न तो बहुत अधिक छोटे और चौड़े और न बहुत लम्बे और तग होने चाहिए।

(2) दड़ों को ऐसे स्थानों से अलग करना चाहिए जो एक दड़ की चौड़ाई के लगभग $\frac{1}{2}$ से कम अथवा एक दड़ की लगभग चौड़ाई से अधिक न हो।

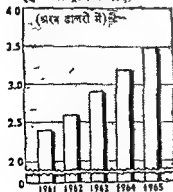
(3) पैमाना प्रायः उपयोगी होता है। यह चाटों के दड़ से (या बाईं ओर के दड़ से, यदि दड़ ऊर्ध्वाधर हैं) एक दड़ की चौड़ाई का लगभग $\frac{1}{4}$ होना चाहिए।

दस लाख डालर

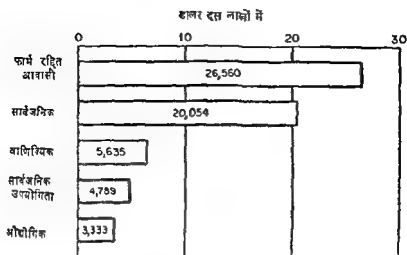


चार्ट 63 ऊर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य के बिना एक दड़ चाट।
 बाईं ओर से 1950 से 1965 तक एक बाईं ओर राष्ट्र के निर्यात (सोना मिला कर)
 तथा आयात दिखाए गए हैं। 1966 में उस राष्ट्र के बाणिज्य दूतावास द्वारा दिए
 गए विवरण से लिया गया चाट।

(कुल राष्ट्रीय उत्पाद)

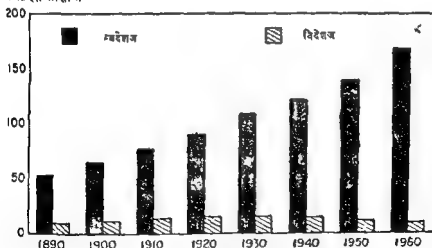


चार्ट 64 1951 से 1965 तक केन्द्रीय समीक्षक
 सामान्य मन्दी में कुल राष्ट्रीय उत्पाद। चाट अन्तर्राष्ट्रीय
 मुद्रा कीष तथा प्रथम राष्ट्रीय विदेशी बैंक से लिया गया। पैमाने
 के विच्छेद से आसक्त प्रभाव नहीं पड़ते।



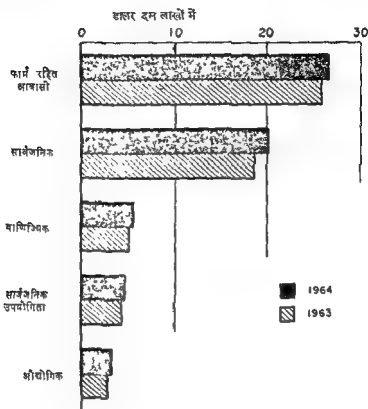
घाटें 6 5 1964 में संयुक्त राज्य में चुने हुए नए निर्माण कार्य का मूल्य । डॉक्यूमेंट फेडरल रिजर्व बुलेटिन, अप्रैल 1965, पृष्ठ 597 में ।

संयुक्त दस लाखों में



घाटें 6 6 1890 से 1960 तक संयुक्त राज्य की स्वदेशी तथा विदेशी जनसंख्या । इस प्रकार के घाटें में दोनों श्रेणियों की मापें बढ़ स्पष्ट नहीं हैं । परन्तु अंश तथ्यांक की घाटों के द्वारा दिखाई जा सकती है जैसा कि पूर्ववर्ती अध्याय में वर्णित है । तथ्यांक की सीमा पर शून्य के अभाव के कारण, दशों व स्थान पर त्रुटि का प्रयोग किया जाएगा । डॉक्यूमेंट फेडरल रिजर्व बुलेटिन, अप्रैल 1965, पृष्ठ 597 में ।

(4) चार्ट पढ़ने में निर्देशक रेखाएँ सहायक होती हैं। कभी-कभी चार्ट घिरा रहता है और निर्देशक रेखाओं का समस्त चार्ट में में विस्तार होता है, जैसा कि चार्ट 6.5 में है, कभी-कभी चार्ट घिरा नहीं रहता और निर्देशक रेखाएँ कटी होती हैं, जैसा कि चार्ट 6.7 में है।

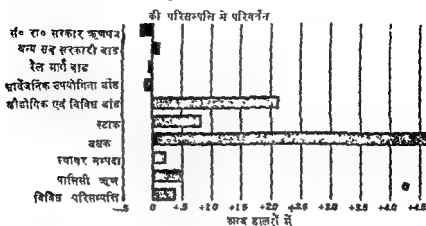


चार्ट 6.7 1963 और 1964 में समुक्त राज्य में चुने हुए नए निर्माण कामों का मूल्य। आकरें चार्ट 6.5 के नीचे दिए गए स्रोत से।

एक काल-श्रेणी को ग्राफ के द्वारा दिखाने समय हम या तो दंड चार्ट या बक्र का प्रयोग कर सकते हैं। वन से उस सामान्य परिवर्तन का अध्ययन सरल हो जाता है जो कि एक श्रेणी में आया है, जब कि दंड चार्ट से विशिष्ट वर्षों की तुलनाएँ अधिक शोध करने के योग्य हो जाते हैं। यदि श्रेणी में बहुत से वर्षों का समावेश है तो दंड चार्ट का प्रयोग करना, जिसका निर्माण परिश्रम मांगता है, प्रायः वांछनीय नहीं है। यदि केवल कुछ वर्ष दिखाए जाने हों, जैसा कि चार्ट 6.2 में है, तो इसके लिए दंड चार्ट अधिक अच्छा है।

कभी-कभी हम आँकड़ों के दो समुच्चयों की कई वर्षों की अवधि के दौरान तुलना करना चाहते हैं। यह दो इकाई दंड चार्ट के द्वारा किया जा सकता है, जैसा कि चार्ट 6.6 में दिखाया गया है। इसी प्रकार हम दो वर्षों के लिए कई श्रेणियों की तुलना करने की इच्छा कर सकते हैं, इस प्रकार की तुलना चार्ट 6.7 में दिखाई गई है।

1963-64 में मध्य प्रदेश राज्य की जीवन बीमा कम्पनियों



चार्ट 6.8 द्वि दिशा दंड चाटों का एक उदाहरण। लाइफ इन्शोरेन्स फंड बुक, 1965, पृष्ठ 69 त।

एक द्वि-दिशा दंड चाटों का प्रयोग, जैसा कि चार्ट 6.8 में है, वृद्धि और कमियों को दिखाने के लिए किया जा सकता है। इस प्रकार का चाटों और भी अधिक प्रभावपूर्ण होता है यदि वृद्धि वाले रंग में और कमियाँ लाल रंग में दिखाई जा सकें। कई वर्षों के लिए मॉडलों की श्रेणी में वृद्धि और कमियों को क्षैतिज शून्य रेखा के ऊपर और नीचे ऊर्ध्वाधर दंडों के द्वारा दिखाया जा सकता है।

चित्रलेख

चार्ट 6.1 के भाग D में कुछ वर्षों के लिए खेतों पर ट्रेंडरों की सरया का प्रतिनिधित्व विभिन्न आकार के ट्रेंडरों के चित्रों के द्वारा किया गया था। यद्यपि इस प्रकार का चाटों पाठक के सामने सतोषजनक तुलना प्रस्तुत नहीं करता किन्तु उसका ध्यान अवश्य आकर्षित करता है। सब एक ही आकार के कई छोटे चित्रों का प्रयोग करके और उनकी इस प्रकार व्यवस्था करके कि एक दंड चाट बन जाए, चित्रीय प्रभाव बनाए रखा जा सकता है और एक सतोषजनक तुलना प्राप्त हो सकती है। इस प्रकार का ग्राफ चित्रलेख कहलाता है। चार्ट 6.9 में इस विधि के द्वारा खेतों पर ट्रेंडरों की तुलना दिखाई गई है। जब कि चित्र आवश्यक तौर पर एक दंड चाटों है, यह अधिक आकर्षक है और इसलिए पाठक द्वारा इसके परीक्षण की अधिक संभावना है। किसी पैमाने का प्रयोग नहीं किया गया परन्तु क्योंकि चित्र सभी एक आकार के हैं और क्योंकि प्रत्येक दस लाख ट्रेंडरों का प्रतिनिधित्व करता है, इसलिए यदि वास्तवीय हो तो चार्ट से सन्निकट सत्यात्मक मूल्य प्राप्त किए जा सकते हैं। यद्यपि काल-श्रेणी का दंड चाटों प्रायः ऊर्ध्वाधर दंडों का प्रयोग करता है (तो भी) आप यह देखेंगे कि चार्ट 6.9 के रूप में प्रदर्शित चित्रलेख में क्षैतिज दंड हैं। चित्रलेख की प्रायः इस प्रकार से व्यवस्था की जाती है क्योंकि यह अधिक उचित लगता है कि ट्रेंडरों को, लोगों को, घरों को (या जो कुछ भी चित्रित किया जा रहा है) एक दूसरे के ऊपर रखने की अपेक्षा साथ-साथ सजा दिया जाए।

112

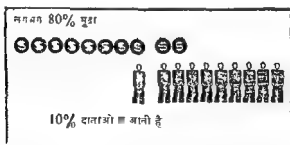
1940 1950  1960   1962   1964   प्रत्येक प्रतीक 10,00,000 टून्टर
प्रदर्शित करता है

चार्ट 6.9 संयुक्त राज्य में 1940, 1950, 1960, 1962 तथा 1964 में खेतों पर ड्रॉइंटों की सहाय।
आंकड़े चार्ट 6.1 के नीचे दिए जाते हैं।

चित्रलेख का एक अन्य उदाहरण, चार्ट 6.10, यह दिखाने का एक सज्जित तरीका है कि निधि के लिए अभिमान अपेक्षाकृत कुछ उपहारों पर निर्भर करते हैं। चार्ट 6.11 चित्रलेखीय विचार के कुछ छोटे से भिन्न प्रयोग का प्रतिनिधित्व करता है। यहाँ चित्र तथा दृढ़ मात्रात्मक आंकड़ों को दिखाने वाले दृष्टों के साथ साथ दिखाए गए हैं। यह स्पष्ट होना चाहिए कि चित्रलेख बनाते समय चित्र इस प्रकार चुना जाता है कि वह दिखाए जाने वाले आंकड़ों के स्वरूप का सुभाव दे। चित्रीय विधियों के प्रयोग के लिए कुछ आधारभूत नियम चार्ट 6.12 में दिखाए गए हैं।

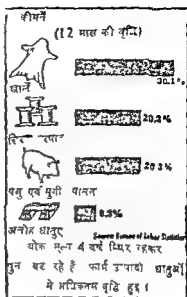
घटक-भाग चार्ट

योग के भाग, चार्ट 6.13 के समान दृढ़ के द्वारा या चार्ट 6.14 की तरह वृत्तरेख से दिखाए जा सकते हैं। दृढ़ चार्ट में दृढ़ के भागों की लम्बाइयों की एक-विम तुलना आती है, जहाँ कि वृत्तरेख में वृत्ताकार खंडों की द्वि-विम तुलना अथवा वृत्ताकार भागों की चापों की एक विम-तुलना, अथवा केन्द्रीय कोणों की तुलना आती है। चाहे दृढ़ चार्ट पर आधारित



चार्ट 6.10 होवार्ट तथा विलियम स्मिथ कालेज द्वारा प्रयुक्त एक चित्र-लेख। लैट अस लुक ऐट होवार्ट एन्ड विलियम स्मिथ, पृष्ठ 14 से। मूल दो रंगों में था।

घाटे 6 11 बिजुल तथा डड । सयुक्क राज्य ब्यूरो आफ लेबर स्टैटिस्टिक्स से । ध्यान दीजिए कि कौछिल पैमाना छोड दिया गया है ।



प्रतीक स्वयं स्पष्ट होने चाहिए



सदया मे परिवर्तन अधिक या कम
प्रतीको द्वारा दिखाए जाते हैं

1947

1948 1949 1950 1951

प्रत्येक जनमान 50 लाख टन का

घाटे समय बिजुल दिखाते हैं

1947

1948 1949

1950 1951 1952 1953

विश्वेजों से गुननाए होती हैं

1947 1948 1949

1950 1951 1952

1953 1954 1955 1956



बड या छोटे प्रतीको
द्वारा नहीं



सूक्ष्म व्योरा नहीं

4 074 300

11 075 300

20 000 300

समान विवरण नहीं

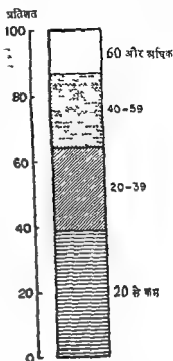
1970 1971 1972 1973

घाटे 6 12 मांडले तथा मोचनस्टीन द्वारा सुझाए गए चित्रलेखों को
खींचने के लिए आधारभूत नियम । हड़ोत्क मांडले तथा दायनो मोचनस्टीन
के पिक्टोग्राफस एन्ड ग्राफस, हार एंड रो ब्यूरो, 1952 पृष्ठ 25 तथा 26 से ।

हो या वृत्तरेख" पर, निएय की शुद्धता लगभग एकसमान होती है, अपवाद यह है कि वृत्तरेख द्वारा चित्रित किए जाने पर तो 25 प्रतिशत (90 दर्जों के कोण से प्रदर्शित) तथा 50 प्रतिशत (व्यास द्वारा प्रदर्शित) बड़ अधिक ठीक ठीक मापे जाते हैं। वृत्तरेख का चित्रीय मूल्य संभवतः दड़ चाट के चित्रीय मूल्य से अधिक होता है और जब वृत्तरेख रजत डालर सुभाने के लिए निर्मित किया जाता है तब यह बड़ जाता है। चाट 6 15 में इस प्रकार का एक प्रयोग दिखाया गया है। अकेला घटक भाग दड़ कभी-कभी पैमाने के बिना खींचा जाता है और कभी-कभी क्षैतिज होता है। क्षैतिज दड़ पर या वृत्तरेख पर ऊर्ध्वाधर दड़ का एक लाभ यह है कि ऊर्ध्वाधर दड़ के खंडों पर लेबल लगाना अधिक सरल है।

ग्राफ कामज के कई विन्यता ऐसे कामज के ऐसे ताव देने हैं जिन पर 0 से 100 तक अंशोंकित परिधि वाले वृत्त दिखाए जाते हैं। इस प्रकार व्यक्ति वृत्तरेख तुरन्त खींचने के योग्य हो जाता है। यदि ऐसे ताव प्राप्य नहीं हैं या यदि विभिन्न आकारों के वृत्त वांछित हैं तो वृत्तरेख परकार तथा प्रोटैक्टर के प्रयोग से बनाए जा सकते हैं। क्योंकि रूढ़ प्रोटैक्टर वृत्त को 360 भागों या अंशों में विभक्त करता है, अतः दिखाई जाने वाली प्रतिशतताओं को 3.6 से गुणा करना चाहिए। वृत्त को 100 भागों में बाँटने के लिए अंशोंकित प्रोटैक्टर³ के प्रयोग से वृत्त का प्रतिशतताओं में बाँटना सरल हो जाता है, जैसा कि चार्ट 6 16 में दिखाया गया है। इस प्रकार का पैमाना चटकील किया जा सकता है, अथवा सामान्य प्रोटैक्टर के दूसरी ओर अंकित किया जा सकता है।

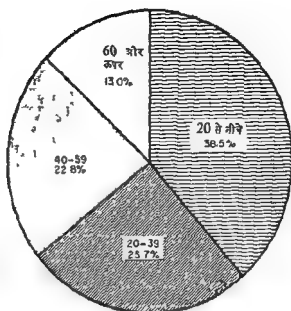
चार्ट 6 17 में यह दिखाया गया है कि घटक भागों के कई समुच्चयों की तुलना करने के लिए दड़ चाट कैसे प्रयुक्त किए जा सकते हैं। यह स्पष्ट प्रतीत होता है कि तर्कों के बीच में तुलनाएँ दड़ों से वृत्तों की अपेक्षा अधिक सरलता से की जाती हैं। एक भाग से दूसरे भाग में पहुँचने वाली निर्देशक रेखाएँ दड़ चाट से तुलनाएँ करने में सहायता करती हैं जब रेखाएँ समांतर हैं तो कोई परिवर्तन नहीं हुआ है, जब वे अभिसरित होती हैं, तो वृद्धि हुई है, जब वे अभिसरित होती हैं तो कमी हुई है।



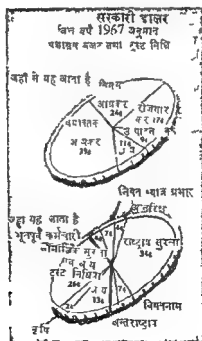
चार्ट 6 13 1960 में प्रत्येक विशिष्ट वय समूह में सयुक्त राज्य की जनसंख्या का अनुपात। आकड़ सयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो यू०एस० सेन्सस आफ पापुलेशन, 1960, खंड I, कंस्ट्रिक्टिव्स आफ दि पापुलेशन, भाग I, युनाइटेड स्टेट्स समरी, पृष्ठ 1-199 से।

३ प्रैक्टिकल इन्फ्रामेन्ट तथा राय ह० स्ट्राइकर के लेख "बार चार्ट्स परिस सकल दायजर्नल," जनरल आफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, दिसम्बर 1927 पृष्ठ 473-482 में देखिए।

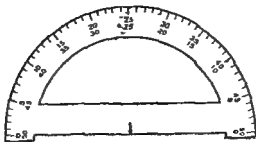
3 जनरल आफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, मार्च 1922, पृष्ठ 108-109 में फ्रैक्टिकल इन्फ्रामेन्ट द्वारा लिखित "एक्सप्लेन प्रोटैक्टर" लेख देखिए।



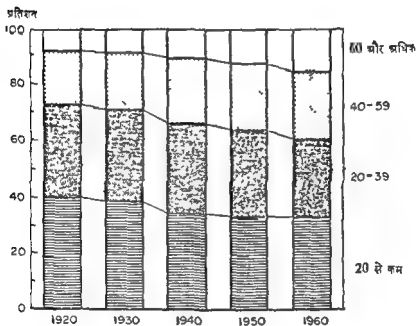
घाट 6 14 1960 मे प्रत्येक विशिष्ट वय समूह मे सयुक्त राज्य की जनसंख्या का अनुपात । आकृति घाट 6 13 के नीचे दिए सीलों से ।



घाट 6 15 वित्त वर्ष 1967 के लिए राष्ट्रपति के बजट संदेश के अध्याय में प्रस्तुत वृत्तरेख ।



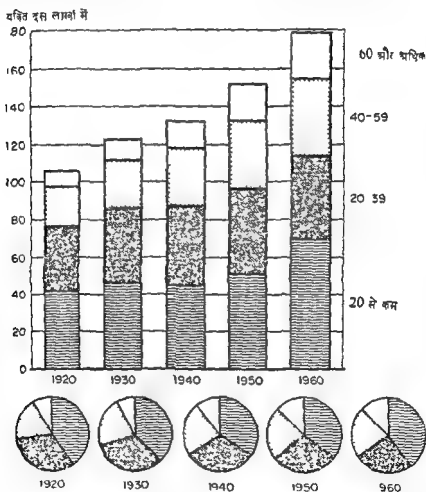
चार्ट 6 16 प्रतिशतता प्रोट्ट कटर



चार्ट 6 17. 1920 से 1960 तक प्रत्येक निर्दिष्ट वय समूह में संयुक्त राज्य की जनसंख्या का अनुपात। आंकड़े चार्ट 4 19 के नीचे दिए गए सोना से।

चार्ट 6 17 में घटक भागों की तुलना साफ़ आधार पर है, जनसंख्या में प्रत्येक वय समूह का अनुपात दिखाया गया है। जब हम यह सकेन करते हैं कि प्रत्येक वय समूह में से कितनों की गणना की गई थी तो हमारे पास ऐसे आरेख आते हैं जैसे कि चार्ट 6 18 में दिखाए गए हैं। दंड और वृत्त आकार में भिन्न हैं क्योंकि कुल जनसंख्या बढ़ चुकी है। इस उदाहरण में दंड चार्ट स्पष्ट ही वृत्तरेख से बढिया है। जब चार्ट 6 17 तथा 6 18 में दिखाए गए के समान आंकड़े कई वर्षों में आते हैं तो प्रायः वक्रों का प्रयोग करना

अधिक अच्छा है, जैसाकि चार्ट 4 19 तथा 4 20 में किया गया था। जब चार्ट 6 17 तथा 6 18 के दृढ़ चार्ट कालानुक्रमी आंकड़े प्रस्तुत करते हैं, तो हम विभिन्न स्थानों या श्रेणियों के लिए घटक-भागों की तुलना भी कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, हम शहरी जनसंख्या में पुरुषों और स्त्रियों के अनुपातों की ग्रामीण जनसंख्या में पुरुषों और स्त्रियों के अनुपातों से तुलना कर सकते हैं। एक दृढ़, पुरुषों और स्त्रियों के लिए उपविभाजित, शहरी जनसंख्या का प्रतिनिधित्व करेगा, दूसरा दृढ़, स्त्रियों के लिए उसी प्रकार विभाजित, ग्रामीण जनसंख्या का प्रतिनिधित्व होगा।



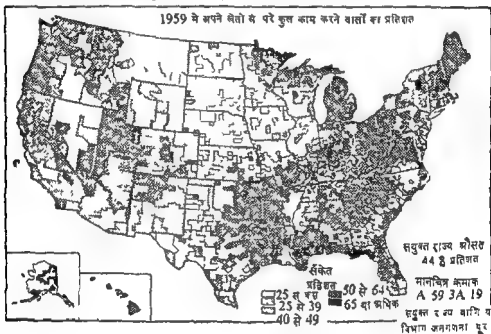
चार्ट 6 18 1920 से 1960 तक प्रत्येक निर्दिष्ट वय समूह में संप्रवृत्त राज्य की जनसंख्या। आंकड़ चार्ट 4 19 के नीचे दिए गए स्तंभों से लिए गए।

सांख्यिकीय मानचित्र

सांख्यिकीय मानचित्र लेखाचित्रीय विधियाँ हैं जो संख्यात्मक सूचना भौगोलिक आधार पर दिखाती हैं। हम तिरछी रेखाओं वाले या छायायुक्त मानचित्रों, बिन्दु मानचित्रों, तथा पिन मानचित्रों पर विचार करेंगे।

तिरछी रेखाओं वाले मानचित्र—तिरछी रेखाओं वाले या छायायुक्त मानचित्रों में विचाराधीन प्रत्येक भौगोलिक क्षेत्र के लिए अध्ययन की जा रही घटना के परिमाण को दिखाया जाता है। परिमाण में परिवर्तनों का लेखाचित्रों द्वारा तिरछी रेखाओं या छाया में उत्तरोत्तर अतरी से प्रतिनिधित्व किया जाता है। चार्ट 6 19 में विभिन्न तिरछी रेखाएँ, 1959 में संयुक्त राज्य में अपने खेतों से परे काम करने वालों का अनुपात निर्देशन करती हैं। अपने खेतों से परे कुल काम करने वालों के अधिकतम अनुपातों वाले क्षेत्र गहरे काले रंग में दिखाए गए हैं। रंग उत्तरोत्तर अधिक हल्का होता जाता है ताकि सबसे हल्के अर्थात् बिना छाया के क्षेत्र में निम्नतम प्रतिशतना दिखाई गई है। इस प्रकार के मानचित्रों की प्रकृष्ट विशेषता यह है कि तिरछी रेखाओं या छाया में उत्तरोत्तर परिवर्तन माप जा रहें तब में वृद्धि (या कमी) का निर्देश करता है।

1959 में अपने खेतों से परे कुल काम करने वालों का प्रतिशत



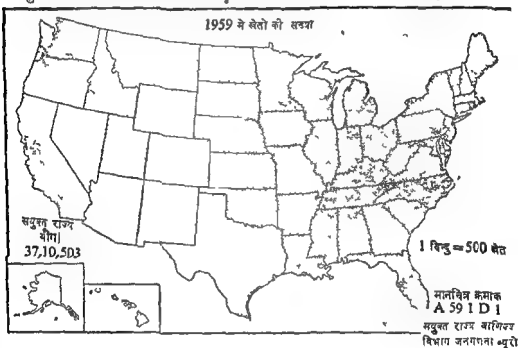
चार्ट 6 19 तिरछी रेखाओं वाला मानचित्र।

कभी कभी सार्वजनिक मानचित्र रंगों में बनाए जाते हैं। परन्तु विभिन्न रंगों का प्रयोग करके उत्तरोत्तर यूनाधिक छाया के बिना उ को स उत्पन्नक ढग से विकसित नहीं किया जा सकता। हा, एक ही रंग की उत्तरोत्तर छायाएँ प्रयोग करना और इस प्रकार काला और सफ़ेद प्रयोग करके किए जा सकने वाले में कभी कभी अधिक आकर्षक मानचित्र उत्पन्न करना संभव है।

बिन्दु मानचित्र—पुनः के सार्वजनिक मानचित्र में वे आँकड़े दिखाए गए हैं जो समस्त क्षेत्रों पर लागू होने वाले—विशेषतया अपने खेतों से परे कुल काम करने वालों का प्रतिशत—और इसका निर्देशी रेखाओं वाला या छायायुक्त मानचित्र समुचित था। जब घटनाओं का भौगोलिक वृत्त दिखाया जाता हो तो बिन्दु मानचित्र का प्रयोग करना चाहिए। चार्ट 6 20 में सर्वोत्तम बिन्दु मानचित्रों में से एक दिखाया गया है। प्रत्येक बिन्दु 500 खेतों का प्रतिनिधित्व करता है और क्राउटी के विभिन्न भागों में के प्रकरण

स्पष्ट तौर पर दिखाया गया है। बिन्दु मानचित्र में एक बिन्दु द्वारा दिखाई गई इकाइयों की संख्या बड़ी हो सकती है, जैसा कि चार्ट 6 20 में है, ताकि एक क्षेत्र में बिन्दुओं की संख्या गिनने के लिए पर्याप्त कम हो, या एक बिन्दु द्वारा दिखाई गई इकाइयों की संख्या छोटी हो सकती है ताकि अनेक बिन्दुओं से हल्की से काली छाया की प्रगाढ़ता में उत्तरोत्तर परिवर्तन का प्रभाव पड़ता हो। कौनसी प्रविधि का प्रयोग करना उचित है यह चार्ट के प्रयोजन पर निर्भर करता है।

चार्ट 6 21 में एक अलग प्रकार का बिन्दु मानचित्र दिखाया गया है जिसमें अलग-अलग आकार के बिन्दुओं का प्रयोग है। यहाँ 1950 से 1960 के बीच राज्यों के अनुसार कुल जनसंख्या में परिवर्तन की मात्रा वृत्तों के क्षेत्रफल द्वारा इंगित की गई है। जबकि

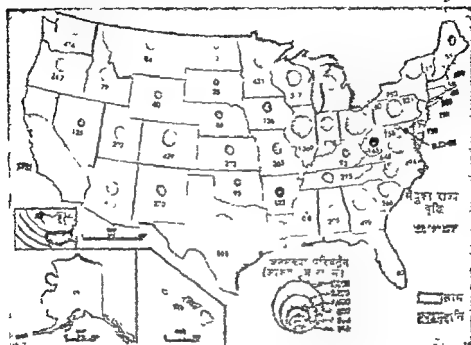


चार्ट 6 20 एक बिन्दु मानचित्र।

विभिन्न वृत्त राज्यों के भीतर विभिन्न परिवर्तनों की ओर संकेत करते हैं, वृत्तों से ठीक-ठीक तुलनाएँ करना आसान नहीं है। हम सीधे व्यासों की तुलना नहीं कर सकते। हमें स्मरण रखना आवश्यक है कि यदि एक वृत्त का व्यास दूसरे से दुगुना है तो पहले वृत्त का क्षेत्रफल दूसरे से चार गुना है।

पिन मानचित्र—पिन मानचित्र विशेष तौर पर लचीले प्रकार के बिन्दु मानचित्र समझे जा सकते हैं। वे कार्ड, गत्ता, भित्ति बोर्ड, नालीदार गत्ता, इत्यादि पीछे लगाकर जड़े गए मानचित्र हैं जिन पर विभिन्न आकार, रंग और स्वरूप के (प्रायः) कार्ड के मिरो वाले पिनों के द्वारा सूचना लिखी जाती है। प्राप्य पिनो के चार ऐसे होते हैं जो आकार में लगभग $\frac{1}{8}$ इंच व्यास से लगभग $\frac{3}{4}$ इंच तक होते हैं। एक बड़ी संख्या में रंग तथा विभिन्न प्रकार के स्वरूप, जैसे गोले, वर्ग तथा त्रिकोण, शीर्षपिन प्राप्य हैं। जैसे तथ्य बदलते हैं वैसे ही पिन मानचित्रों को तुरन्त ही बदला जा सकता है। इस लचीलेपन और

बड़े प्रकार के विनों की प्राप्ति के कारण भौगोलिक आँकड़े प्रस्तुत करने की विधि के तौर पर पिन मानचित्र का बढ़ता प्रयोग किया जाता है। कार्क तथा सैकड़ों या हज़ारों विनों पर माप्ट एक या अधिक मानचित्रों वाली विस्तृत पिन मानचित्र योजना सचीवी है परन्तु प्रायः बहुत उपयोगी निम्न हो सकती है।



चार्ट 6.21 एक अन्य प्रकार का विन्दु मानचित्र। कोण की विधि कि सॉल्वेंट की सहायता से विन्दु का मापन देखा जाता है। छायांकित विन्दु वृद्धि का संकेत करत है काप विन्दु की संख्या है।

पिन मानचित्रों का प्रायः मोटारगाड़ी दुर्घटनाओं के स्थान और परिणाम दर्ज करने में प्रयोग किया जाता है। इन प्रकार के एक या अधिक मानचित्रों का प्रयोग करते न केवल जिन आदमियों में विभिन्न स्थानों पर दुर्घटनाएँ होती हैं उनके जाँचना, बल्कि प्रत्येक दुर्घटना के स्वरूप को भी जाँचना (मोटारगाड़ी की पैदल व्यक्ति में टक्कर, मोटर गाड़ी की मोटरगाड़ी में टक्कर, मोटरगाड़ी की किसी स्थिर पदार्थ में टक्कर आदि) तथा दुर्घटना का परिणाम (सम्पत्ति-हानि, मरणा का घायल होना, मरणा की मृत्यु, पैदल व्यक्ति का घायल होना, पैदल व्यक्ति की मृत्यु आदि) जाँचना संभव है।

सांख्यिकीय मानचित्र की एक बड़ौदा यह है कि विभिन्न क्षेत्रों का महत्त्व उनके क्षेत्रफल में नहीं आँका जाता है। उदाहरणार्थ, विभिन्न राज्यों में प्रति कुटुम्ब आय दिखाने वाला निम्नलिखित चित्रों वाला मानचित्र कुछ आसानी से स्पष्ट होना संभव है। कुछ राज्यों में बहुत बड़े क्षेत्रफल वाले अन्य राज्यों की अपेक्षा कम अधिक कुटुम्ब हैं। इन बड़ौदा पर काय्र पाने के लिए कभी-कभी प्रयुक्त एक चित्रक विधि इस दृष्टि से मानचित्र खींचने की है कि प्रत्येक राज्य का क्षेत्रफल उस राज्य में कुटुम्बों की संख्या के अनुपात में हो।

दरें, अनुपात, तथा प्रतिशतताएँ

सांख्यिकीय सांख्यिकियों से सबंध रखने वाले अध्याप में यह सकल किया गया था कि व्युत्पन्न एक आँकड़ों के मक्षण और तुलना में सहायता करने के लिए उपयोगी हैं। उम अध्याप में दरो, अनुपातों, प्रतिशतताओं, और औसतों का विशेष उल्लेख किया गया था। इस अध्याप में दरो, अनुपातों, और प्रतिशतताओं का विवेचन किया जाएगा। औसतों और सबंधित मापों का आगे के अध्यापों में परीक्षण किया जाएगा।

753 का 251 से अनुपात बताने के लिए हम 753 को 251 से भाग करते हैं, जिससे 3 आता है और हम कहते हैं कि 753 का 251 से वही सबंध है जो 3 का 1 से है, या अधिक संक्षेप में, 753 : 251 = 3 : 1। हम प्रकार हमने वह सबंध बनाया है जो एक के अनुपात में उन दो संख्याओं में से पहली का दूसरी के साथ है। यदि हमसे हमारा प्रयोजन अधिक अच्छा मित्र होता तो हम यह सबंध किसी अन्य संख्या के अनुपात में बता सकते थे। उदाहरण के लिए हम दस का अनुपात प्रयोग कर सकते थे और कह सकते थे 753 : 251 = 30 : 0, हम भी से अनुपात का प्रयोग कर सकते थे और लिख सकते थे 753 : 251 = 300 : 100। यह अन्तिम अनुपात, प्रति सौ, प्रायः प्रतिशतता कहलाता है और हम देखते हैं कि 753 (प्रतिशत से) 251 का 300 प्रतिशत है। भूत आप यह देखेंगे कि प्रतिशत का, जो इतनी बहुलता में प्रयोग किया जाता है, अधिक सामान्य प्रत्यय अनुपातों के विशिष्ट मामले मान है। यदि प्रति सौ अनुपात के प्रयोग की बजाय हम प्रति हजार अनुपात के लिए अक्सर आता है तो हम अपने अंकों की ओर "प्रति सहस्र" कह कर सकत कर सकते हैं।

तुलनाओं की गति बढ़ाने के लिए अनुपातों का परिकलन किया जाता है। न केवल बड़ी संख्याएँ कम हो जाती हैं, जैसा कि सारणी २२ में है, बल्कि मोटे आकार में 100 के (जो व्यक्ति के मन में गह मकना है) अंकों की श्रेणी की तुलना से बहुत लाभ होता है, बजाय इसके कि प्रत्येक अंकेकी समष्टि के अंक की समस्त संयुक्त राज्य के योग से तुलना करने की चेष्टा की जाए। मापक परिवर्तन का उम समय अधिक ठीक-ठीक प्रत्यक्षीकरण किया जा सकता है जब उसे प्रतिशतताओं में दिखाया जाए, जैसा कि सारणी 7१ में है, या जब सारणी 7२ में प्रयुक्त विधियों में से किसी एक से दिखाया जाए।

1] "दर" शब्द का कभी-कभी एक भिन्न चर की एक इकाई के सबंध में विचार किए गए एक चर के परिमाण या मात्रा के अर्थ में प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार 20 मील प्रति घंटा एक रफ्तार की दर है। दो एक समान चरों में जो एक दूसरे के साथ संबंध होता है वह प्रायः अनुपात कहलाता है। उदाहरणार्थ, फरट अनुपात या वर्तमान परिमराल का वर्तमान देखा से अनुपात है, या बड़ों की तुलना करता है जो दोनों जानरा हैं। सामान्य प्रयोग में दर और अनुपात का यह भेद सदा ध्यान में नहीं रखा जाता।

सारणी 71

1963 और 1964 में सयुक्त राज्य में चुने हुए नए निर्माण कार्य का मूल्य
(दस लाख डॉलरों में)

निर्माण का प्रकार	1963	1964	प्रतिशत वृद्धि
काम से भिन्न आवासीय	25 843	26 560	2 8
सांख्यिक	18 679	20 054	7 4
वाणिज्यिक	5 200	5 635	8 4
सांख्यिक उपयोगिता	4 494	4 789	6 6
औद्योगिक	2 962	3 333	12 5

यू.एस. फेडरल रिजर्व बुलेटिन अगस्त 1965 पृष्ठ 597 से।

सारणी 72

सयुक्त राज्य में 1955 से 1964 तक इन्वीं वस्तुओं के लिए इस्पात की
सिलिलियों और इस्पात का उत्पादन

वर्ष	उत्पादन (दस लाख छोटे टन)	1955 का प्रतिशत	1955 पर प्रतिशत कमी*	पूर्व वर्ष का प्रतिशत	पूर्व वर्ष पर प्रतिशत वृद्धि*
1955	117 0	100 0			
1956	115 2	98 5	- 1 5	98 5	- 1 5
1957	112 7	96 3	- 3 7	97 8	- 2 2
1958	85 3	72 9	- 27 1	75 7	- 24 3
1959	93 4	79 8	- 20 2	109 5	9 5
1960	99 3	84 9	- 15 1	106 3	6 3
1962	98 0	83 8	- 16 2	98 7	1 3
1961	98 3	84 0	- 16 0	100 3	0 3
1963	109 3	93 4	- 6 6	111 2	11 2
1964	126 9	108 5	+ 8 5	116 1	16 1

* घन का विलोम वृद्धि का छोटा है।

आइ.एस.एस.टी.एस. एम्प्ट कट ऑफ दि यूनाइटेड स्टेट्स के विभिन्न अर्थों तथा सर्व
ऑफ करंट विजुअल फॉर्म 1965 पृष्ठ S 32 से।

परिचय

जब एक या अनेक सरफासों की एक अर्थ सख्या से तुलना की जा रही हो तो वह
अर्थ जिससे तुलना की जा रही हो आधार कहलाता है। जिस अर्थ की आधार से तुलना
की जा रही हो उसे आधार से भाग करके अनुपात मान्य किया जाता है। तब वह अर्थ

2 गणना मशीनों की बचतों के अनुदेश गणना मशीन कंपनियों के विषय कार्यालयों से प्राप्त किए
जा सकते हैं।

प्राधार के सबध में या उसकी शब्दावली में व्यक्त किया जाता है और इसलिए सब प्रकार के अनुपात कभी-कभी सापेक्ष सख्याओं या सापेक्षों के तौर पर निर्देश किए जाते हैं।

जुलाई 1965 के अन्त में न चुकाया गया कुल उपभोक्ता उधार 8,06,86,000 डालर था। जुलाई 1964 के अन्त में यह 7,24,56,000 डालर था। न चुकाई गई जुलाई 1965 की रकम को जुलाई 1964 के रूप में व्यक्त करने के लिए हम 8,06,86,000 डालर को 7,24,56,000 डालर से भाग करते हैं और 1.1135 प्राप्त करते हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि न चुकाया गया कुल उपभोक्ता उधार जुलाई 1965 में जुलाई 1964 के मुकाबले 1.1135 गुना था। बहुत से उदाहरणों में अनुपात अत्यन्त उपयोगी होते हैं जब उन्हें प्रतिशतताओं के तौर पर व्यक्त किया जाता है। जो 1.1135 को, जो 1 का अनुपात है, प्रति सौ के अनुपात में बदलने के लिए दशमलव व बिन्दु को दो स्थान दाईं ओर खिसकाया जाता है। परिणाम-स्वरूप प्राप्त होने वाला अंक 111.35 यह बताता है कि जुलाई 1965 में न चुकाया गया कुल उपभोक्ता उधार जुलाई 1964 में न चुकाई गई रकम का 111.35 प्रतिशत था।

यह ध्यान देना चाहिए कि हम अभी-अभी दिए प्रतिशत अंक को दो तरीकों से व्यक्त कर सकते हैं। यह कहने की बजाय कि जुलाई 1965 में न चुकाया गया उपभोक्ता उधार जुलाई 1964 के न चुकाए उपभोक्ता उधार का 111.35 प्रतिशत था, हम कह सकते हैं कि जुलाई 1964 से यह 11.35 प्रतिशत अधिक था। प्रथम उदाहरण में हमने दो वर्षों के अंकों की तुलना की, द्वितीय में, हमने जो परिवर्तन आया उसकी जुलाई 1964 के अंक से तुलना की।

परिवर्तनशील आधार का प्रभाव

स्वाभाविक रूप से यदि हम जुलाई 1964 के कुल उपभोक्ता उधार अंक की जुलाई 1965 के अंक से तुलना करें तो एक भिन्न अंक समुच्चय प्राप्त होगा। अब हम जुलाई 1965 को प्राधार के रूप में प्रयोग कर रहे हैं और जुलाई 1964 के अंक को जुलाई 1965 के अंक से भाग किया गया है। इस क्रिया को सपन्न करने से पता लगता है कि जुलाई 1964 में न चुकाया गया कुल उपभोक्ता उधार जुलाई 1965 के उधार का 89.79 प्रतिशत था, अथवा तब न चुकाया गया कुल उपभोक्ता उधार जुलाई 1965 से 10.21 प्रतिशत कम था। देखिए जब कि जुलाई 1964 के आधार पर जुलाई 1965 का अंक जुलाई 1964 के अंक से 11.35 प्रतिशत अधिक था, जुलाई 1965 को आधार मानकर जुलाई 1964 का अंक जुलाई 1965 के अंक से केवल 10.21 प्रतिशत कम था। हाँ, यह अन्तर इस तथ्य के कारण है कि पहली तुलना का आधार जुलाई 1964 के सबध में था और बाद में जुलाई 1965 के सबध में। आधार को बदलने के कारण परिणामों में इस अन्तर का एक अन्य प्रकार से उदाहरण दिया जा सकता है। यदि एक सख्या 100 प्रतिशत बढ़ाई जाए तो मौलिक अंक प्राप्त करने के लिए दूसरी सख्या को केवल 50 प्रतिशत घटाना आवश्यक है। इसके विपरीत, यदि कोई प्रदत्त सख्या 50 प्रतिशत घटाई जाए तो दो हई सख्या के पुनरुत्पादन के लिए दूसरी सख्या को 100 प्रतिशत बढ़ाया जाना चाहिए।

3 नकला बीजिए कि हम दो प्रतिशतताओं की तुलना कर रहे हैं जैसे 40 प्रतिशत तथा 90 प्रतिशत। हम निरपेक्ष शब्दों में बोल सकते हैं और कह सकते हैं कि 90 प्रतिशत 40 प्रतिशत से 50 प्रतिशत अधिक है। हम सापेक्ष शब्दों में बोल सकते हैं और कह सकते हैं कि 90 प्रतिशत 40 प्रतिशत से 125 प्रतिशत अधिक है अथवा 90 प्रतिशत 40 प्रतिशत का 225 प्रतिशत है। प्रतिशतताओं की तुलना करते समय यह बिन्दु स्पष्ट कर देना उचित है कि हम निरपेक्ष शब्दों में बोल रहे हैं या सापेक्ष में।

आधार के इस परिवर्तन के प्रभाव को अनुभव न करने से अशुद्ध निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। एक फर्म ने अपने कर्मचारियों की मजदूरी 15 प्रतिशत घटा दी, बाद में इसने घटी हुई मजदूरी 5 प्रतिशत बढ़ा दी, तब हमने इन बंद दूएँ अको को 5 प्रतिशत बढ़ा दिया, और अन्त में हमने इन दूसरे अको का और 5 प्रतिशत बढ़ा दिया। बाद में इसने घोषित किया कि तीन 5 प्रतिशत वृद्धियों से मजदूरी वही पहुँच गई जहाँ वह 15 प्रतिशत कमी करने में पूव थी। गणना से पता चलेगा कि नई मजदूरी, घटाने से पूव की मौलिक मजदूरी की वास्तव में 98.4 प्रतिशत थी। यदि कम्पनी ने घटी हुई मजदूरी की एक बार ही 15 प्रतिशत वृद्धि की होती तो नई मजदूरी मौलिक मजदूरी की केवल 97.75 प्रतिशत हुई होती।

सारणी 7.3 में वृद्धि की चुनी हुई प्रतिशतताओं के लिए वह प्रतिशत दिखाया गया है जिससे नई सख्या को मौलिक सख्या के पुनर्स्थापन के निम्न अवश्य घटाना चाहिए। यह ध्यान में रखना चाहिए कि प्रतिशत वृद्धि का अक अनिश्चित तौर पर बढ़ा हो सकता है, तो भी 100 की प्रतिशत कमी के अक में शून्य तक गिरावट पता चलती है जबकि 100 से अधिक की प्रतिशत कमी में एक ऋणात्मक मात्रा तक कमी सूचित होती है।

सारणी 7.3

प्रतिशतताओं की गणना में सरलते आधार के प्रभाव के उदाहरण

दी हुई सख्या	प्रतिशत वृद्धि	नई सख्या	प्रतिशत जिससे दी गई सख्या प्राप्त के लिए नई सख्या घटानी आवश्यक है
10	500.00	60.00	83.33
10	200.00	30.00	66.67
10	100.00	20.00	50.00
10	50.00	15.00	33.33
10	33.33	13.33	25.00
10	25.00	12.50	20.00
10	10.00	11.00	9.00
10	5.00	11.50	4.76
10	1.00	10.11	0.99

प्रतिशतताएँ अंकित करना

प्रायः प्रतिशतताएँ एक दशमलव स्थान तक अंकित की जाती हैं। यदि प्रतिशतताएँ बड़े अको पर आधारित हों और विशेषकर यदि योग का एक या एक से अधिक भाग बिल्कुल छोटा हो (सारणी 3.2 देखिए) तो एक से अधिक दशमलव प्रयोग करना उचित हो सकता है। कभी-कभी केवल पूर्ण प्रतिशतताएँ ही दिखाई जाती हैं ताकि (परस्पर) सबंध तुरन्त समझे जा सकें। परंतु जब सापेक्ष परिवर्तन बहुत ही छोटे हों तो पूर्ण प्रतिशतताएँ पर्याप्त नहीं होती।

यदि निरपेक्ष सख्याएँ छोटी हैं, विशेषकर यदि आधार 100 में काफी कम है तो प्रतिशतताओं की गणना नहीं करनी चाहिए। छोटी निरपेक्ष सख्याओं पर आधारित

प्रतिशतताओं के प्रयोग से उत्पन्न होने वाली एक गंभीर कठिनाई का पृष्ठ 136 पर विवरण दिया गया है।

जब प्रतिशतताओं को एक दशमलव के भाग अंकित किया जाता है तो उनका एक प्रतिशत के समीपतम दशम तक पूर्णांकन किया जाता है। निम्न उदाहरणों से प्रतिशतताओं का पूर्णांकन करने की विधि पता चलेगी (तथा अवशेष वाली अन्य गणनाओं का पूर्णांकन करने की भी)।

(1) 371 16 डालर — 679 28 = 0 5464, अथवा 54 64 प्रतिशत। दूसरा दशमलव 5 से कम है और इसलिए एक प्रतिशत के निकटतम दशम तक यह प्रतिशतता 54 6 है।

(2) 2,319 पाउंड — 7,532 पाउंड = 0 3079, अथवा 30 79 प्रतिशत। इस उदाहरण में दूसरा दशमलव 5 से अधिक है, इसलिए प्रतिशतता 30 8 अंकित की जानी चाहिए।

(3) 2,80, 511 फुट — 1,1000,000 फुट = 0 025501 अथवा 2 5501 प्रतिशत। यहाँ द्वितीय दशमलव 5 है परन्तु चतुर्थ दशमलव स्थान पर अवशेष 1 आता है। एक प्रतिशत के निकटतम दशम तक अंकित करने से यह अंक 2 6 है।

(4) 1,341 वैनल — 6,000 वैनल = 0 2235 अथवा 22.35 प्रतिशत। यहाँ निकटतम दशम या तो 22 3 या 22 4 है। यह अधिक महत्व की बात नहीं है यदि कभी-कभी इस प्रकार के निष्कर्ष में प्रथम दशमलव स्थान पर अंक में वृद्धि कर दी जाए या द्वितीय दशमलव को छोड़ दिया जाए। तो भी, किसी सख्त योजना का अनुसरण करना अधिक अच्छा है। विशेष तौर पर जब बहुत से परिकलन किए जा रहे हों। जो अन्त में जोड़े जाते हों तो एक ऐसा दशमलव अच्छा है जिससे ठीक 5 के द्वितीय दशमलव वाले भागों मूल्यों को बढ़ाया जाए और आगे मूल्यों को कम किया जाए। इस प्रथा से अशुद्धियों के सचय का परिहार होगा। सभवतः अधिकतम सतोपजनक योजना यह है कि जब प्रथम दशमलव एक विषम संख्या हो तो प्रथम दशमलव को बढ़ा दिया जाए (67.35, 67.4 बन जाता है) और जब प्रथम दशमलव एक सम संख्या हो तो द्वितीय दशमलव को छोड़ दिया जाए (67.65, 67.6 बन जाता है)।

कभी-कभी सब प्रतिशतताओं का एक दशमलव स्थान तक पूर्णांकन करने का परिणाम 99 9 या 100 1 के जोड़ में होता है और कभी-कभी 99 8 या 100 2 दिखाई देता है। कुछ सांख्यिकीविद् प्रतिशतताओं में से एक को इस प्रकार समायोजित करते हैं ताकि ठीक-ठीक जोड़ प्राप्त हो जाए, परन्तु यह अधिक अच्छा प्रतीत होता है कि प्रत्येक प्रतिशतता ठीक-ठीक पूर्णांकित रहे।

तुलनाओं के प्रकार

हम पहले ही एक उदाहरण देख चुके हैं जिसमें सारणी 3 2 में, कुल के भागों की योग से तुलना की गई थी। यहाँ प्रत्येक मद को क्रमशः कुल द्वारा भाग करके प्रतिशतताएँ प्राप्त की गई थी। अधिक शीघ्रता से, हम योग का व्युत्क्रम ले सकते हैं और व्युत्क्रम को प्रत्येक सघटक अंक से गुणा कर सकते हैं। यह समय बचाने वाली विधि है जो विशेषतया परिवर्तन यन्त्रों अनुकूल बनाई गई है और जब कभी हम समस्याओं की श्रेणी को एक स्थिर संख्या से भाग कर रहे हों तब यह लागू होती है।

इस अध्याय में आगे के पृष्ठों पर एक अंक की दूसरे अंक से तुलनाओं के विभिन्न उदाहरण दिए गए हैं। उदाहरणार्थ, लिंग अनुपातों के अनुच्छेद में यह टिप्पणी दी गई है कि पुराने के लिए प्रत्येक अंक को स्त्रियों के लिए उचित अंक से भाग किया गया है क्योंकि लिंग अनुपात प्रति सौ स्त्रियों के पीछे पुरुषों की संख्या बताना है।

सारणी 7.2 में कई विभिन्न तुलनाओं का संकेत है जो कालानुक्रमी दृष्टि से व्यवस्थित किए गए आंकड़ों के सम्बन्ध में की जा सकती हैं। स्तम्भ 3 में, प्रत्येक वर्ष के लिए इस्पात मिलितियों और डलाई के लिए इस्पात के उत्पादन की 1955 के उत्पादन से तुलना की गई है, प्रत्येक अंक को 1955 के अंक से भाग दिया गया है। स्तम्भ 4 में वह प्रतिशतता दिखाई गई है जिसमें प्रत्येक वर्ष का उत्पादन 1955 के उत्पादन से अधिक या कम था। स्तम्भ 5 में प्रत्येक वर्ष के उत्पादन का पूर्व वर्ष के उत्पादन से सम्बन्ध है, प्रत्येक वर्ष के अंक को पूर्व वर्ष के अंक से भाग दिया गया है। स्तम्भ 6 में पूर्व वर्ष पर प्रत्येक वर्ष में प्रतिशत वृद्धि या कमी का संकेत है, पूर्व वर्ष की तुलना में प्रत्येक वर्ष की महत्वपूर्ण वृद्धि (या कमी) को पूर्व वर्ष के उत्पादन से भाग दिया गया है। स्तम्भ 3 और 4 में 1955 का निश्चिन् आधा लेकर तुलनाएँ की गई हैं। स्तम्भ 5 और 6 में आधार लगातार मरकता रहा है और सदा पूर्व वर्ष रहा है।

प्रतिशतताओं का एक अन्य अनुप्रयोग सारणी 7.1 में दिखाया गया है। यहाँ प्रत्येक वस्तु के लिए 1963 का अंक आधार है। "प्रतिशत वृद्धि" शीर्षक वाले प्रतिशतता के स्तम्भ में 1963 से 1964 तक प्रत्येक प्रकार के नए निर्माण के मूल्य में मापे गए वृद्धि या कमी का संकेत है।

कुछ बहुधा प्रयुक्त अनुपात

निम्न अनुच्छेदों में अनुपातों और प्रतिशतताओं के कुछ उचित अनुप्रयोगों का संकेत है।¹ पाठकों को निस्संदेह अनेक अन्य अनुप्रयोगों की जानकारी हो जाएगी जब वह पत्रिकाओं, समाचार-पत्रों, पुस्तकों तथा विज्ञापनों में न्यूनाधिक तकनीकी सामग्री पढ़ेंगे।

सूचकांक—अधिकतर सूचकांकों को प्रतिशतताओं के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। उदाहरणार्थ, थोक मूल्य के सूचकांक के निर्माण में प्रथम सम्मिलित की जाने वाली वस्तुएँ चुनी जाती हैं और तब विभिन्न वस्तुओं के अलग-अलग महत्त्व को ठीक-ठीक ध्यान में रखते हुए उनके मूल्य मिलाए जाते हैं। यदि सूचकांक कालक्रमानुसार है, जैसा कि प्रायः होता है तो कोई वर्ष आधार के रूप में माना जा सकता है। उस वर्ष में मूल्य 100 के बराबर किए जाते हैं। तब अन्य वर्षों के लिए मूल्य उस आधार वर्ष के सम्बन्ध में व्यक्त किए जाते हैं। संयुक्त राज्य श्रम सांख्यिकी ब्यूरो लगभग 2,200 थोक मूल्यों के अपने सूचकांकों के लिए आधार वर्ष के तौर पर 1957 से 1959 तक के वर्षों की औसत का प्रयोग करता है। अतः इन तीन वर्षों में थोक मूल्यों का 100 के द्वारा प्रतिनिधित्व होता है। दिसम्बर 1963 के लिए थोक मूल्य सूचकांक 100.3 था, जनवरी 1964 के लिए यह 101.0 था, फरवरी 1964 के लिए यह 100.5 था, मार्च 1964 के लिए यह 100.4 पर गिर गया। इस प्रकार इन मासों के लिए मूल्य 1957 से 1959 के 36 महीनों के लिए औसत के रूप में व्यक्त किए गए हैं।

लिंग अनुपात—जनसंख्या में पुरुषों की संख्या का स्त्रियों की संख्या के साथ संबंध लिंग अनुपात द्वारा प्रस्तुत किया जाता है, जो प्रति 100 स्त्रियों के पीछे पुरुषों की संख्या बताता है। 1960 में संयुक्त राज्य में 8,83,03,113 पुरुष और 9,10,22,558 स्त्रियाँ थी। इस प्रकार इस देश में प्रति 100 स्त्रियों के पीछे 97.1 पुरुष थे। अनुपात विभिन्न वय समूहों में भिन्न था। यह वय समूह "65 और अधिक" के लिए न्यूनतम, 82.8, था और वय समूह "15 वर्ष से कम" के लिए अधिकतम, 103.4, था। यह विभिन्न राज्यों के लिए भी भिन्न-भिन्न था। यह मैसाचुसेट्स में न्यूनतम था जहाँ प्रति 100 स्त्रियों के पीछे 93.4 पुरुष थे, और अलाबामा में अधिकतम था जहाँ प्रति 100 स्त्रियों के पीछे 132.3 पुरुष थे।

जनसंख्या घनत्व—दो समुदायों की कुल जनसंख्या की केवल मात्र तुलना करने की बजाय, जनसंख्या के घनत्व पर विचार करना प्रायः अधिक अर्थपूर्ण हो सकता है। हम कुल जनसंख्या को वर्गमीलों में क्षेत्रफल द्वारा भाग करके यह सम्पन्न करते हैं और इस प्रकार प्रति वर्ग मील व्यक्तियों की संख्या निर्धारित करते हैं। उदाहरणार्थ, 1960 में मोन्टाना की जनसंख्या 6,74,767 थी और न्यू हैम्पशायर की जनसंख्या 6,06,921 थी। यदि हम इन अंकों का प्रत्येक राज्य के भूमिक्षेत्र से संबंध जोड़ें तो हमें पता चलता है कि न्यू हैम्पशायर में प्रति वर्ग मील 67.3 व्यक्ति थे जब कि मोन्टाना में केवल 4.6 व्यक्ति प्रति वर्ग मील थे। हाँ, इन अंकों का यह अर्थ नहीं कि न्यू हैम्पशायर में प्रत्येक वर्ग मील पर 67 या 68 व्यक्ति और मोन्टाना में प्रत्येक वर्ग मील पर 4 या 5 व्यक्ति थे। वे केवल सारांश अंक हैं, जिनका संकेत है कि प्रत्येक राज्य में, प्रति वर्ग मील व्यक्तियों की औसत संकेतित संख्या थी।

जनसंख्या के घनत्व का कालक्रमानुसार तुलनाएँ करने में भी प्रयोग किया जा सकता है। हमारे देश की प्राचीनता के साथ-साथ जनसंख्या का घनत्व बढ़ा है। 1800 में संयुक्त राज्य में प्रति वर्ग मील 6.1 व्यक्ति थे, 1960 में प्रति वर्ग मील 50.5 व्यक्ति थे।

प्रति व्यक्ति अनुपात—बहुत से अंक, जब उन्हें प्रति व्यक्ति आधार पर व्यक्त किया जाता है, अधिक अर्थपूर्ण या अधिक उपयोगी होते हैं। संयुक्त राज्य के सघीय ऋण से न केवल गत वर्षों में व्ययों के स्तर और सरकारी सेवाओं में वृद्धियों का बल्कि जनसंख्या की वृद्धि का भी आभास होता है। उदाहरणार्थ, 30 जून, 1941 को सघीय ऋण 48,96,10,00,000 डॉलर था, 30 जून, 1963 तक यह अंक 3,05,86,00,00,000 डॉलर तक बढ़ चुका था। यदि इन अंकों की दोनों अवधियों को जनसंख्या से भाग दिया जाए तो प्रतीत होता है कि प्रति व्यक्ति सघीय ऋण 30 जून, 1941 को 367 डॉलर था और 30 जून, 1963 को 1,616 डॉलर था।

विभिन्न वस्तुओं का उपभोग प्रति व्यक्ति आधार पर बहुलता से बताया जाता है। इस प्रकार 1963 में गोमांस का अनुमानित उपभोग प्रति व्यक्ति 94.8 पाउंड था, अण्डों का अनुमानित उपभोग प्रति व्यक्ति 31.5 था, उपभोग की गई माफ़ चीनी की मात्रा लगभग 97.2 पाउंड प्रति व्यक्ति थी।

मृत्यु दरें—प्रदत्त वर्ष के लिए अशोचित, कुल, या सामान्य मृत्युदर उस वर्ष में समुदाय में होने वाली मृत्यु की संख्या को, उस समुदाय की मध्य वार्षिक जनसंख्या द्वारा भाग करके और परिणाम को प्रति हजार व्यक्ति करके प्राप्त की जाती है। 1963 में संयुक्त राज्य में सब कारणों से अनुमानित 18,13,000 मृत्युएँ हुईं। संयुक्त राज्य में निवास करने वाली 1 जुलाई, 1963 की जनसंख्या का अनुमान 18,85,31,000 था। अतः 1963

के लिए मृत्यु दर

$$18,13,000 - 18,85,31,000 = 0.0096, \text{ अथवा } 9.6 \text{ प्रति सहस्र}$$

थी। आप यह देखेंगे कि मरण दर की यथार्थता प्रथम तो मृत्यु के पंजीकरण की पूर्णता की भावा पर निर्भर करती है, और दूसरे आधार के तौर पर प्रयुक्त मध्य-वार्षिक जनसंख्या अनुमान की यथार्थता पर। क्योंकि जनसंख्या की गणनाएँ 10 वर्ष में केवल एक बार की जाती हैं अतः प्रयुक्त किये जाने वाले अधिकतर जनसंख्या अंक अनुमान ही होते हैं। जब दो जनगणनाओं के बीच के किसी वर्ष के लिए जनसंख्या का अनुमान किया जाता है तो वह अनुमान अन्तःजनगणना अनुमान कहलाता है, जब अनुमान जनगणना के बाद के वर्ष के लिए होता है तो यह पश्च-जनगणना अनुमान कहलाता है। अन्तःजनगणना अनुमान स्वाभाविक ही पश्च-जनगणना अनुमानों की अपेक्षा कुछ अधिक यथार्थ होते हैं। 1961 से 1969 (समाविष्ट) तक के वर्षों के लिए मरण दरें इस समय पश्च-जनगणना अनुमानों पर आधारित होनी आवश्यक है और प्रारम्भिक दरें कहलाती हैं। 1970 की जनगणना के निष्कर्ष प्राप्त होने के बाद 1961—1969 तक के वर्षों के लिए अन्तःजनगणना अनुमान लगाए जा सकते हैं और मृत्यु दरों का इन नए जनसंख्या अनुमानों के आधार पर पुनः सकलन हो सकता है। ऐसी दरें परिशोधित दरें कहलाती हैं।

जब एक राज्य या नगर में होने वाली मृत्युओं को उस समुदाय की जनसंख्या से भाग दिया जाता है तो परिणामस्वरूप प्राप्त होने वाली अशोधित मरण दर में कुछ संशोधन होने की आवश्यकता रहती है। उदाहरणार्थ किसी प्रदत्त वर्ष में एक समुदाय में वे लोग मर सकते हैं जो किसी अन्य स्थान के निवासी हैं और किसी बड़े समुदाय के कुछ निवासी उस समुदाय के बाहर मर सकते हैं। यदि अनिवासी मरणों को समुदाय में हुए मरणों में से घटाया जाए तो परिणामस्वरूप प्राप्त होने वाली दर को स्थानीय दर कहा जाता है। यदि इसके अनिर्विकल उस समुदाय के बाहर होने वाले निवासियों के मरणों को जोड़ा जाए तो परिणाम प्राप्त होने वाली दर को निवासी दर कहा जाता है। इन महत्वपूर्ण अन्तरों को पहचानने में भूल होने पर अशुद्ध निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। एक वर्ष यह घोषणा की गई थी कि न्यूयॉर्क नगर के क्वीन्स बोरो के लिए मृत्यु दर 6.5 प्रति सहस्र थी, ब्राक्स के लिए 7.8, ब्रुकलिन के लिए 9.3, रिचमंड के लिए 13.5 तथा मनहट्टन के लिए 16.3 थी। क्वीन्स के लिए मृत्यु दर समूह राज्य में किसी भी अन्य ऐसे समुदाय में कम थी और कम से कम एक समाचार-पत्र ने तुरन्त घोषणा की थी कि क्वीन्स "देश में स्वस्थतम स्थान था"। परन्तु बहुत शीघ्र ही यह संकेत किया गया था कि क्वीन्स में अस्पतालों का बहुत कम कोटा था और इसीलिए अस्पताल की परिचर्या चाहने वाले क्वीन्स के कुछ निवासी मनहट्टन में या कहीं और इसकी व्यवस्था करते थे। अस्पताल के कमरे में स्वाभाविक रूप से एक बहुत ऊँची मृत्यु दर दिखाई देती है और अशोधित मरण दर में इस तथ्य का आभास नहीं होगा कि मनहट्टन में तथा कहीं और मरने वाले कुछ व्यक्ति वास्तव में क्वीन्स के निवासी थे।

जनसंख्या के विशिष्ट वर्गों (पुरुषों और स्त्रियों, विभिन्न वय समूहों तथा अन्य श्रेणियों) के लिए तथा विशिष्ट रोगों या कारणों के लिए मृत्यु दरें विशिष्ट मृत्यु दरें कहलाती हैं। क्योंकि किसी एक कारण से मरण अपेक्षाकृत कम होते हैं, कारण-विशिष्ट दरें प्रायः जनसंख्या की प्रति लाख बताई जाती हैं। इस प्रकार 1962 में मोटर गाड़ी दुर्घटनाओं से मृत्यु दर 22.0 प्रति लाख थी।

विभिन्न समुदायों की मृत्यु दरों की योग्य तुलना में इस तथ्य का विचार करना होता है कि लोगों के अनुपात भिन्न हो सकते हैं और वय वटनों में, नागरिकों को जातीय और देशीय रचना में, घन्धों में, तथा अन्य कारकों में भी अन्तर हो सकते हैं। इन अन्तरो तथा समजित एवं मानकित मृत्यु दरों के परिकलन की विधियों का विवरण इतना अधिक विशिष्ट विषय है कि इस पाठ में उसका वर्णन नहीं किया जा सकता।⁶

जन्म दरें—जन्म दरों की गणना प्रायः एक वर्ष में जन्मों को उस वर्ष की मध्य-वर्षीय जनसंख्या द्वारा भाग करके ली जाती है। ठीक मृत्यु दरों की स्थिति के समान हमें प्रारम्भिक दरें और परिशोधित दरें प्राप्त हो सकती हैं। हमें कुल, स्थानीय, और निवासी दरें भी प्राप्त हो सकती हैं। मृत-प्रसव, जन्म के तौर पर नहीं गिने जाते, यद्यपि भूतकाल में उन्हें इस प्रकार गिना जाता रहा है, इस तथ्य को तैयिक तुलनाएँ करते समय स्मरण रखना चाहिए। सम्भवतः इस तथ्य की ओर भी ध्यान दिलाना उचित होता है कि जन्मों का पजीकरण उतना पूर्ण नहीं होता जितना कि मृत्यु का पजीकरण होता है। शवाधान अनुज्ञा-पत्र देने तथा (शव को) दफनाने से पूर्व मृत्यु का पजीकरण आवश्यक है। परन्तु एक नवजात शिशु, परिवार और समुदाय में समा सकता है चाहे उसके जन्म का पजीकरण हुआ हो अथवा नहीं।

कुल जनसंख्या के सम्बन्ध में जन्म दरों का परिकलन पूर्णतया सन्तोषजनक नहीं है क्योंकि जनसंख्या में “बाल उत्पादकों” का अनुपात समय-समय पर या स्थान-स्थान पर स्थिर नहीं होता। जन्म दरों के परिकलन में परिष्कार इस ग्रन्थ के क्षेत्र से परे है।

प्रति एकड़ फसल उपज—उत्पादित फसल की कुल मात्रा के आँकड़े हमें बता सकते हैं कि एक वर्ष में हमारे की अपेक्षा उस वस्तु की अधिक मात्रा प्राप्त हुई अथवा नहीं। परन्तु ऐसे आँकड़ों से हम यह नहीं जान सकते कि वृद्धि अधिक प्रचुर उपज के कारण हुई है, क्षेत्र में वृद्धि के कारण हुई है, या दोनों कारणों से हुई है। 1962 में संयुक्त राज्य में 2,76,04,000 एकड़ भूमि से 66,92,11,000 बुशल सोयाबीन काटी गई, अगले वर्ष 2,86,28,000 एकड़ में 70,14,65,000 बुशल सोयाबीन हुई। क्षेत्र का क्षेत्रफल और कुल उपज दोनों बढ़ गए थे, परिणामस्वरूप प्रति एकड़ उपज में वृद्धि हो गयी थी, जो 1962 में 24.2 बुशल और 1963 में 24.5 बुशल थी। भौगोलिक आधार पर, संयुक्त राज्य, जो सभी अन्य देशों, जिनके आँकड़े प्राप्त हैं, की अपेक्षा अधिक सोयाबीन उगाता है, प्रति एकड़ उपज में प्रथम नहीं है। इटली, जिसमें 1963 में संयुक्त राज्य की अपेक्षा काफी कम पैदावार होती थी, में 26.5 बुशल प्रति एकड़ की उपज थी।

सुअर-मक्का अनुपात—औसत मूल्य प्रति 100 पाउंड को, जो कि किसानों को सुअरों के लिए प्राप्त होता है, औसत मूल्य प्रति बुशल द्वारा, जो किसानों की मक्का के लिए प्राप्त होता है, भाग करने का परिणाम सुअर-मक्का अनुपात है। उदाहरणतः यदि एक दिन किसान सुअरों के लिए प्रति 100 पाउंड 17.80 डॉलर और मक्का के लिए प्रति बुशल 1.48 डॉलर प्राप्त कर रहे हैं तो अनुपात 17.80 डॉलर—1.48 डॉलर=12.0 है।

6 राष्ट्रीय जीवन भरण आँकड़ा प्रणाली से लिए आँकड़ों के साथ नेशनल सेंटर फॉर हेल्थ स्टैटिस्टिक्स द्वारा निर्गमित अनेक अध्ययन देखिए। साथ ही वाइटल स्टैटिस्टिक्स ब्राफ़ दि यूनाइटेड स्टेट्स जो संयुक्त राज्य स्वास्थ्य, शिक्षा एवं कल्याण विभाग की सार्वजनिक स्वास्थ्य सेवा द्वारा प्रतिवर्ष निर्गमित हुई हैं। हमें विस्तार से जन्म दरों, अल्पस्थिता दरों, कुल मृत्यु अनुपातों, विवाह दरों, तलाक़ दरों, प्रसवन दरों, मृत जन्म अनुपातों, तथा अन्य वर्णन होता है। मासिक वाइटल स्टैटिस्टिक्स रिपोर्टें भी प्राप्य हैं।

इस अनुपात का यह अर्थ लगाया जा सकता है कि 100 पाउंड सुझर एक बुशल भक्का से 120 गुना मूल्यवान हैं अथवा अधिक सरल शब्दों में 120 बुशल भक्का का मूल्य 100 पाउंड सुझरो के बराबर है। यदि एक अर्थ दिन सुझरो से किसान को प्रति ती पाउंड 16 40 डालर प्राप्त होने हैं और भक्का से प्रति बुशल 1 68 डालर मिलते हैं तो उस समय अनुपात 9 8 होना है। एक 6 वष की अवधि में सुझर भक्का अनुपात औसत लगभग 13 2 थी जो कम से कम 9 2 तक गिरी और अधिक से अधिक 19 ॥ तक पहुँची। यदि अनुपात कम है तो मरणी के लिए मोटे किए जा रहे सुझरो को भक्का खिलाने की अपेक्षा किसानों के लिए अपनी भक्का सीधी बेचना अधिक लाभदायक है। यदि अनुपात ऊँचा है तो किसानों के लिए भक्का सीधी बेचन की अपेक्षा अपने सुझरा को भक्का खिलाना अधिक लाभदायक हो जाता है। क्योंकि मण्डी के लिए सुझर पदा करने में भक्का लागत का प्रमुख भाग है इसलिए अनुपात का प्रयोग सुझर उत्पादन के भावी विस्तार या संकुचन की वांछनीयता के संकेतक के तौर पर किया जाता है। इस प्रकार सुझर भक्का अनुपात और सुझर उत्पादन चक्र के बीच एक सम्बन्ध है। जब अनुपात ऊँचा होता है तो सुझर उत्पादन में बढ़ि होने की प्रवृत्ति रहती है। इस प्रकार की बढ़ि का परिणाम प्रायः भक्का मूल्यों के सम्बन्ध में सुझर मूल्यों में कमी होता है और तब सुझर उत्पादन को नियंत्रित करने की प्रवृत्ति होती है। 1940 में 1964 तक के लिए सुझर भक्का अनुपातों को दिखाने वाले चार्ट 5 12 तथा 5 13 में दिखाए गए हैं।

बल्लबाजी की औसत—दैनिक पत्रों के खेल के पृष्ठों की बल्लबाजी की परिचित औसत एक बल्लबाज द्वारा कुल जितनी बार उसे बल्लबाजी करनी थी उसके सम्बन्ध में किए गए प्रहारों का अनुपात है। सारणी 7 4 में चुनी हुई बल्लबाजी में औसतों की एक श्रणी दिखाई गई है। सारणी 7 4 के अंतिम स्तम्भ में प्रको पर एक के अनुपात

सारणी 7 4

1965 में अमरीकन लीग के 10 प्रतिष्ठ खिलाड़ियों की बल्लबाजी की व्यक्तिगत औसतें

खिलाडी तथा क्लब	खेल	बल्लबाजी की संख्या	प्रहार	बल्लबाजी की औसत*
गोलिबा मिनसोटा	149	576	185	321
यूनाइटेड स्टेट्स की बोस्टन	133	494	154	312
डेविलो क्लीवलैंड	142	505	152	301
राबिंसन बाल्टीमोर	144	559	166	297
वेगनर क्लीवलैंड	144	517	152	294
हावड वाशिंगटन	149	516	149	289
कोलविटो क्लीवलैंड	162	592	170	287
हाल मिनसोटा	148	522	149	285
बफड शिकागो	155	586	166	283
ट्रेश यूटाक	156	602	168	279

*मूल सारणी में इन स्तम्भ का बीचक भी सीटी है।

अंकिते आवासाधिक बल्लबाज क्लबों की अमरीकन लीग से।

मे या प्रेक्षित अंको की श्रेणियों की औसतों के रूप में ठीक प्रकार से विचार करना आवश्यक है, जिनमें से प्रत्येक का मूल्य 1 या 0 है (अर्थात् बल्लेबाज ने प्रहार किया अथवा नहीं)। यदि एक व्यक्ति ने 75 बार बल्लेबाजी की और 25 प्रहार किए तो उसकी बल्लेबाजी की औसत 333 दिखाई जायेगी और यह 'तीन सौ तेसीस' कहलाती है। यदि उसने बल्लेबाजी करत समय हर बार एक प्रहार किया हो तो उसका अंक 1 000 हो जाएगा जो "एक हजार" कहलाता है। ध्यान दीजिये कि इन आंकड़ों के संकेत के लिए प्रयुक्त कुछ पदों में कुछ अन्तर्विरोध आते हैं। अंको के स्तम्भ का शीर्षक प्रायः "प्रतिशतता" होता है, अंक एक के अनुपात के तौर पर मुद्रित किए जाते हैं, अंक प्रति सहस्र कहे जाते हैं।

हवाई मार्ग दुर्घटना अनुपात—हवाई यात्रा की सुरक्षा का अनुपातों के द्वारा संकेत किया जा सकता है। 1963 में अनुसूचित स्वदेशीय वायुयान 40 26,30 00,000 यात्री मील उड़े और कुल 42 दुर्घटनाएँ हुईं जिनमें कुल 48 यात्री मरे। अतः वायुयान प्रति यात्री मूल्य औसत 83,88,12 500 यात्री मील उड़े। 1946 में यह अंक 8 09 10 867 था और 1952 में यह प्रति यात्री मूल्य 28,25 36 326 यात्री मील था। जैसा कि इन कुछ आंकड़ों से सुभाव मिल सकता है, यद्यपि अपेक्षाकृत कम मरणा म दुर्घटनाओं और मृत्यु के कारण अनुपातों में वर्षानुवर्ष काफ़ी उतार-चढ़ाव आ सकता है और आता है जैसे जैसे हवाई यात्रा अधिक सुरक्षित बनी है प्रवृत्ति प्रायः अधिक ऊँचे अनुपातों की ओर रही है। प्रति दस लाख वायुयान मील घातक दुर्घटनाओं की संख्या के और प्रति 1 000 लाख यात्री मील यात्री-मृत्यु की संख्या के अनुपातों का भी परिकलन किया जा सकता है।

100 प्रतिशत विवरण—जब बैंक बीमा कम्पनियाँ और अन्य निगम जनता को वित्तीय सूचना प्रस्तुत करते हैं तो उन्हें आमतौर पर अंको की प्रतिशतताओं में संपूर्ण करना

सारणी 75

1963 और 1964 में बेथलहम इस्पात निगम और अधीन कम्पनियों की पेन्शन न्यास निधि की परिसम्पत्तियाँ

परिसम्पत्ति	राशि		कुल का प्रतिशत	
	1963	1964	1963	1964
नकद और प्राप्त उपचित न्याय लागत पर निवेश	\$ 24 19 000	\$ 30 04,000	7	8
अल्पकालीन दायित्व	183,52,000	4 76 77,000	50	12 2
संयुक्त राज्य सरकार बांड	149,16 000	1 4,916 000	41	3 8
अन्य बांड, नोट तथा दायित्व				
स्वदेशी निगम	899,72,000	9 16 36 000	24 5	23 4
स्थावर सम्पदा बन्धक	187,96,000	1 81 44,000	51	4 6
विदेशी	234,34,000	2 09,85 000	6 4	5 4
अधिमान्य स्टाक	78,56 000	3 4 02,000	2 1	9
सामान्य स्टाक				
औद्योगिक	128,129,000	13,05,54,000	34 9	33 4
सावजनिक उपयोगिता	36 717,000	3 22,,70 000	10 0	8 3
बैंक वित्त, तथा बीमा	26 541 000	2,8297 000	7 2	7 2
कुल	\$36,7,105 1 00	\$ 3908 85 000	100 0	100 0

अन्य बेथलहम इस्पात निगम एन्गुअल रिपोर्ट 1964, पृष्ठ 20 से।

प्रभावपूर्ण लगता है। इस प्रकार एक वित्तीय विवरण में प्रत्येक परिमम्पत्ति कुल परिमम्पत्तियों की प्रतिशतता के रूप में और प्रत्येक देयता कुल देयताओं की प्रतिशतता के रूप में दिखाई जा सकती है। यह विधि तब विशेषतया प्रभावपूर्ण होती है जब डालर अंक बड़े होते हैं। सारणी 75 में वेबलहम इस्थान निगम की पेंशन न्याय निधि और अधीन कम्पनियों के एक वार्षिक प्रतिवेदन में परिमम्पत्तियाँ दिखाई गई हैं। वास्तविक आंकड़े, यद्यपि पूर्णांकित किए गए हैं, इतने बड़े हैं कि सामान्य पाठक उनका ग्रहण कर उनकी तुलना नहीं कर सकता, परन्तु प्रतिशत आंकड़ों से तुलनाएँ कम कठिन बन जाती हैं। ऐसा प्रतिशतता विवरण तैयार करने समय बहुत अधिक दशमनव स्थान न दिखाना वाछनीय है, अन्यथा तुलनाएँ मरनतापूर्वक नहीं की जा सकती। एक बैंक के साधनों के विवरण में सब प्रतिशतताओं को तीन दशमनव स्थानों तक ले जाया गया। यह बिल्कुल अनावश्यक था, विशेषतः इसलिए कि सबसे छोटी मद, “फुटकर बन्धक”, 0.035 (0.0349) प्रतिशत थी और 0.03 प्रतिशत दिखाई जा सकती थी, और क्योंकि दूसरी सबसे छोटी मद, “अन्य परिमम्पत्ति” 0.039 प्रतिशत थी और 0.04 प्रतिशत दिखाई जा सकती थी। सर्वप्रिय प्रस्तुतीकरण के लिए, अधिक महत्त्व की मदों पर ध्यान केन्द्रित करने के लिए इस प्रकार की छोटी मदों को जोड़ कर इकट्ठा करने में कुछ लाभ है। ये दो छोटी मदें, जोड़कर 0.07 प्रतिशत दिखाई देती, अथवा सब प्रतिशतताओं को एक दशमनव स्थान तक दिखाये जाने पर 0.1 प्रतिशत दिखाई देती। परन्तु “फुटकर बन्धक” या “अन्य परिमम्पत्तियों” या दोनों के छोटेपन पर बल देना वाछनीय हो सकता है।

रेल मार्ग अनुपात—रेलमार्गों के कुशल प्रचालन के लिए विस्तृत मात्रा में सार्वजनिक आंकड़ों का एकत्रीकरण और प्रयोग आवश्यक हो जाता है जिसके सबंध में बहुत से अनुपातों की गणना की जाती है। आगे दिए गए आंकड़े 1963 में संयुक्त राज्य के रेल मार्गों के लिए हैं।

प्रति मील लाइन के लिए निवेश, सड़क और उपकरण (नकदी, सामान, और पूर्ति सहित) में कुल निवेश को रेल मार्ग लाइन के मीलो की सख्या से भाग करके प्राप्त होता है। यह अंक 1,63,292 डालर प्रति मील था, अथवा उपचिन्तन मूल्यद्वारा निकाल कर, 1,20,153 डालर प्रति मील था।

प्रति टन-मील भाड़ा आय, कुल भाड़ा आय को डोए गए भार के टन-मीलों की कुल सख्या से भाग दे कर प्राप्त होती है। प्रति टन मील भाड़ा आय 1.310 सेन्ट थी। इसी प्रकार हम प्रति यात्री-मील यात्री आय की संगणना कर सकते हैं, जो 3.178 सेन्ट थी।

प्रचालन अनुपात प्रचालन-आय के सबंध में प्रचालन-व्यय का अनुपात है। प्रचालन-व्यय 7,45,16,08,665 डालर था जबकि प्रचालन आय 9,55,95,46,424 डालर थी। प्रचालन अनुपात 77.95 प्रतिशत था।

अन्य अनेक रेल मार्ग अनुपात हैं, प्रत्येक का अर्थ स्पष्ट ही है। कुद्वेक की गणना इस प्रकार है प्रति टन भार कुल आय 6.14 डालर थी, प्रति टन भार कर्षण 46.4 मील था, प्रति यात्री आय 1.90 डालर थी, प्रति यात्री औसत यात्रा 59.6 मील थी, कुल सम्पत्ति निवेश पर प्रतिलाभ दर 3.10 प्रतिशत थी, वर्ष भर में प्रति रेल मार्ग कर्मचारी काम के घण्टे 2,413 थे, वर्ष के दौरान काम न आ सकने वाले माल के डिब्बों की प्रतिशतता की

औसत 7.0 थी, प्रति माल-डिब्बा टन-मील प्रति दिन 113 थे, प्रति माल-डिब्बा मील प्रति दिन 49.2 मील थे।⁷

ऊपर वर्णित रेल मार्ग अनुपात एक प्रकार के व्यवसाय अनुपात है। अनेक प्रकार के व्यवसाय संगठन उद्यम को अधिक अच्छी प्रकार चलाने के लिए विविध अनुपातों का सकलन करते हैं। एक अन्य ग्रंथ में⁸ इस प्रकार के अनुपातों का विवरण दिया गया है, जैसे चालू अनुपात (चालू परिसम्पत्ति—चालू देनदारियाँ), व्यापारिक माल की बिक्री (शुद्ध बिक्री—पण्य सूची), लाभ की सीमा (लाभ—बिक्री) और श्रमिक आवृत्ति (प्रति-स्थापन—वेतन चिट्ठे पर सख्या)।

प्रतिशतताओं का दूषित प्रयोग

अनुपात और प्रतिशतताएँ इतने सामान्य प्रयोग में हैं कि उनका कभी-कभी दुरुपयोग आश्चर्यजनक नहीं है। प्रतिशतताओं के परिकलन और प्रयोग में आने वाली गठनाइयों का कारण प्रायः निम्न कारणों में से किसी एक में हुई जा सकता है

(1) आधार के सबंध में संभ्रम, (2) लघु पूर्ण सख्याओं पर आधारित प्रतिशतताओं का परिकलन, (3) अस्थानस्थ दशमलव बिन्दु, (4) अकगणिनीय अशुद्धियाँ, (5) प्रतिशतताओं की औसत निकालने की अनुचित विधि। इनका विवरण क्रमानुसार प्रस्तुत किया जाएगा।

आधार के सबंध में संभ्रम—पाँच वर्षों की एक अवधि में संयुक्त राज्य में पशु चिकित्सा कालेजों में विद्यार्थियों का प्रवेश 3,160 से गिरकर 641 पर आ गया। 2,519 विद्यार्थियों की या प्रारम्भिक प्रवेश की 79.7 प्रतिशत कमी हुई, तो भी एक मध्य-पश्चिमी पशु-चिकित्सा कालेज के डीन का यह कहते हुए हवाला दिया गया कि कथित अवधि के दौरान प्रवेश 500 प्रतिशत घट गया था। हो सकता है कि डीन ने वास्तव में यह कहा हो कि प्रारम्भिक पंजीकरण एक वाद के एक का लगभग 500 प्रतिशत था। 500 प्रतिशत कमी का अर्थ पहले पंजीकरण के आकार का चार गुना नकारात्मक प्रवेश होगा।

एक वर्ष संयुक्त राज्य के जिला-स्वायत्तवादी द्वारा एक संकल्पित प्रयत्न किया गया था कि पिट्सबर्ग के भोजनालय अपने मूल्यों को एक निश्चित स्तर पर ले आएँ। समाचार पत्रों ने इस अभियान की सफलता की घोषणा करते हुए कहा कि पिट्सबर्ग के भोजनालयों ने अपने मूल्य 50 से 100 प्रतिशत तक कम कर दिए थे। यह तो स्पष्ट ही है कि मूल्य 100 प्रतिशत कम नहीं किए जा सकते, अन्यथा पहले की बेची जाने वाली सेवाएँ मुफ्त दे दी जाएँगी। कई एक पकवानों के मूल्य-हास बताए गए। कुछ भोजन पहले 15 सेंट प्रति क्वाड्रेश के हिमाब से बिकता था। उगी आकार की सेवाएँ कमी के बाद 5 सेंट के हिसाब से बेची गईं, अतः कमी पहले के विक्रय मूल्य की 66.7 प्रतिशत हुई।

किसी विज्ञापन में यह दावा होते देखना कि “मूल्य 100 प्रतिशत घट गए” प्रसाधारण बिल्कुल नहीं है। हाँ, इसका यह अर्थ होना चाहिए कि वस्तुएँ मुफ्त दी जा रही हैं। एक कम्पनी तो सलाह देने में यहाँ तक गई कि उनकी मूल्य सूची से व्यक्ति “50 से 200 प्रतिशत तक बचत” कर सकेगा।

7 इन और अन्य रेल मार्ग अनुपातों के लिए पूर्वी रेल मार्गों के सार्वजनिक सम्बन्धों की समिति, न्यूयॉर्क द्वारा मासिक निर्मित ए ईयरबुक आफ रेलरोड इन्फरमेशन देखिए।

8 देखिए एफ० ई० फ्राबस्टन तथा बी० जे० फाउलर, प्रॉविटकन बिजनेस स्टैंडिस्टिक्स, तृतीय संस्करण, प्रेन्टिस हॉल, इन्कॉर्पोरेटेड एन्जलवुड क्लिफ्स, एन० जे०, 1960, पृष्ठ 90—99।

आधार के सबंध में गम्भीर सभ्रम टायरो की डाक-क्रयादेश गृह की गारटी में विद्यमान प्रतीत होता है। मस्था का दावा है कि गारटी 'सेवा के मीलो, महीनो या वर्षों की किसी सीमा के बिना है' और टायरो की मुक्त मरम्मत की जाएगी या "आप द्वारा प्राप्त केवल मात्र माल-भत्ते की वास्तविक रकम" लेकर बंदने जाएंगे। शब्दशः, आधार मसीम है और यदि सब टायरो के क़ताओ के लिए गारटी को पूर्णतः पूरा किया जाता तो कम्पनी का शीघ्र ही टायर बेचना बन्द करना पड़ता। उक्त मस्था के लिए औचित्य की दृष्टि से यह नोट करना चाहिए कि उनकी समायोजन नीति उदार है।

सद्यः मस्थाओ से प्रतिशतताएँ—लघु मस्थाओ पर आधारित प्रतिशतताओ को प्रयोग करने की अव्यावहारिकता का एक अत्यन्त पुराना आदर्श उदाहरण चडॉक द्वारा दिया गया है।⁹

जॉन्स हार्किन्स विश्वविद्यालय द्वारा विश्वविद्यालय में स्त्रियों के लिए विशिष्ट पाठ्यक्रम खोलने के कुछ समय बाद यह रिपोर्ट मिली कि महिला छात्राओं में से 33% प्रतिशत न मस्था के सकाया में विवाह कर लिया था। हाँ, महत्वपूर्ण सूचना तो महिला छात्राओं की मस्था थी। वे केवल तीन थी। छोटी सट्या में कौनों पर विचार करते समय केवल प्रतिशतताओं के प्रयोग से अशुद्ध आख्याएँ उत्पन्न होती हैं। इन कौनों में या तो प्रतिशतताओ का प्रयोग वित्कुल नहीं करना चाहिए या वे सट्याएँ जिनपर वे आधारित हैं प्रतिशतताओ के साथ होनी चाहिए।

माधारगुणता जब तक आधार में 100 या अधिक कैम न हो, प्रतिशतताओ का परिकलन नहीं होना चाहिए।

अस्थानस्थ दशमलव बिन्दु—अस्थानस्थ दशमलव बिन्दुओ वाली अशुद्धियों से नितास्त भ्रात व्याख्याएँ हो सकती हैं। वे एक साधारण भी अशुद्धि हैं और उनसे मावधान रहना चाहिए। अस्थानस्थ दशमलव स्थानों में ऐसी प्रारम्भिक प्रकार की अशुद्धियाँ आती हैं कि पाठक यह अनुभव कर सकता है कि वे इनकी प्रारम्भिक हैं कि उनके यहाँ वहाँ की आवश्यकता नहीं। परन्तु एक राज्य विश्वविद्यालय से एक अनुसंधान रिपोर्ट में बताया गया कि एक वर्ष में मनुष्य राज्य की सेनाओ ने उक्त वर्ष में प्राप्त कॉफी के 87 प्रतिशत का उपयोग किया। वे आँकड़े जिनसे प्रतिशतता का परिकलन किया गया था 24 तथा 2,756 मिलियन (दस लाख) पाउंड थे। ठीक एक एक प्रतिशत का 0.87 है।

राजधानी के एक समाचार पत्र के लिए नवाहो के भारतीयों का विवरण देते समय एक फीचर लेखक ने कहा, "जान नवाहो मरण दर 360 प्रति 1,00,000 है।" ग्राम पद्धति से बताई जाने पर यह 3.6 प्रति 1000 या समुक्त राज्य की दर का, जो कि उसी वर्ष में 10.6 थी, लगभग एक-तिहाई होगी। यद्यपि उन मूलभूत आँकड़ों का, जिनसे नवाहो मृत्यु दर की गणना की गई सदिग्ध मूल्य था, यह ज्ञात है कि वह एक समस्त देश के अंक से बहुत बड़ा है। फीचर लेखक ने न केवल दशमलव की मिथ्या स्थापना की (उसकी इच्छा 3,600 प्रति 1,00,000 कहने की थी जो 36 प्रति 1,000 है) बल्कि सम्भवतः उसने अकृगणितय अशुद्धि भी की हो।

यह ध्यान देना रुचिकर होगा कि एक अस्थानस्थ दशमलव का तात्पर्य सदा गम्भीर मिथ्या-वक्तव्य होता है, क्योंकि सबसे छोटी अशुद्धि जो हो सकती है उसका परिणाम होगा कि अशुद्ध अर्ध जितना होना चाहिए उसका दस गुना या उसका दसवाँ भाग होगा।

9 राबर्ट ड० चडॉक को "प्रिंसिपल्स एन्ड मैथड्स ऑफ़ स्टैटिस्टिक्स, हंटन मिफिन कम्पनी, बोस्टन, 1925, पृष्ठ 13—14।

परिकलको द्वारा दशमलवों के अस्थानस्थ किए जाने की उस समय सबसे अधिक सभावना प्रतीत होती है (1) जब बड़ी पूर्ण सख्याओं से सबध हो अथवा (2) जब पूर्व सख्याओं में से एक दूसरी के सबध में, बहुत बड़ी (या छोटी) हो, जिसके परिणामस्वरूप अनुपात बहुत बड़ा (या छोटा) हो। दो उदाहरण पर्याप्त होंगे।

वर्षों की एक अवधि में एक बैंक के साधन 1,00,000 डॉलर से 30,00,00,000 डॉलर तक बढ़ गए। एक समाचार पत्र ने कहा कि वृद्धि 3,000 प्रतिशत थी। वास्तव में, दूसरा अंक पहले अंक का 3,000 गुना है, अथवा इसका 3,00,000 प्रतिशत है, और यदि 2,99,900 प्रतिशत है।

एक विज्ञापन में सकेत किया गया कि संयुक्त राज्य में प्रति दिन 20,00,00,000 से अधिक बैंकों का भुगतान किया जाता है और उनमें से लगभग 99 9995 प्रतिशत घण्टे होते हैं। विज्ञापन में कहा गया "2,000 में से केवल एक नकारा जाता है।" प्रतिशतता और अनुपात में असहमति है। पत्र-व्यवहार से पता चला कि लगभग 1,000 बैंक प्रति दिन निकम्मे थे, अतः अनुपात "2,00,000 में से 1" होना चाहिए था।

अंकगणितीय अनुद्विधा—समाचार-पत्रों के अनुसार एक वर्ष एक प्रसिद्ध सरकारी अधिकारी ने कहा कि रूसी साम्यवादियों का 80,00,00,000 व्यक्तियों पर अधिकार था और इस अंक की लगभग 15,00,00,000 संयुक्त राज्य की जनसंख्या में तुलना की। उसने कहा, बताया जाता है कि अनुपात 7 1 था। ठीक अनुपात 5 33 1 है।

प्रतिशतताओं और अनुपातों की असुद्ध श्रौत निकालना—प्रतिशतताओं और अनुपातों की श्रौत निकालने की सामाजिक आवश्यकता के कारण एक अंतर के दर्शन और उचित विधि पर विचार करने की आवश्यकता है। सारणी 31 के अंकों पर विचार कीजिए। 1960 में संयुक्त राज्य के पहाड़ी विभाग के आठ राज्यों के लिए प्रति 100 स्त्रियों के पीछे पुरुषों की श्रौत प्रतिशतता या अनुपात जानना वाछनीय है। यदि हम सूची में दिए आठ प्रतिशतताओं या अनुपातों को जोड़ें और आठ से भाग करें तो हमारे पास $820.5 \div 8 = 102.5$ आता है। परन्तु यह अंक परिस्थिति का ठीक-ठीक प्रतिनिधित्व नहीं करता। आठ प्रतिशतताओं या अनुपातों की विभिन्न आधारों से गणना की गई थी और इसीलिए तदनुसार भार लगाना चाहिए। नही प्रतिशतता या अनुपात प्राप्त करने के लिए सरलतम विधि यह है कि आठ राज्यों के लिए पुरुष जनसंख्या को जोड़ा जाए, आठ राज्यों की स्त्री जनसंख्या को जोड़ा जाए, और दूसरे अंक को गहने से भाग किया जाए। इससे 101.2 का अंक प्राप्त होता है। वही परिणाम आठ अंकों की श्रौत निकाल कर भी प्राप्त किया जा सकता था, बशर्ते कि प्रत्येक को उभ आधार के अनुसार भारित किया जाए जिससे इसकी गणना की गई है। प्रत्येक अंक को इसके आधार से गुणा करने, निष्कर्षों को जोड़ने, और आधार अंकों (या भारों) के जोड़ से भाग करने की विधि आवश्यक तौर पर वही है जैसी अभी-अभी प्रयुक्त की गई है। परन्तु निष्कर्ष थोड़ा कम सही है क्योंकि प्रत्येक प्रतिशतता अंक या अनुपात का पूर्णांकन किया गया है। एक प्रदत्त प्रतिशतता को पूर्णांक करने में होने वाली अनुद्विध जब प्रतिशतता को गुणा किया जाता है बढ़ जाती है। परन्तु क्योंकि कुछ प्रतिशतताएँ कम की गई हैं और कुछ अधिक की गई हैं, अतः इन अनुद्विधों की प्रवृत्ति प्रतिसंतुलन की है। विशिष्ट स्थितियों में, उन्हें उनके आधारों के अनुसार भारित किए बिना प्रतिशतताओं की श्रौत निकालना उचित हो सकता है। इसकी चर्चा पृष्ठ 166 तथा 167 पर की गई है।

बारंबारता बंटन

सांख्यिकीय आँकड़ों को संगठित करने और उनका माराग निकालने की एक विधि बारंबारता बंटन निर्माण है। इस विधि में एक श्रेणी की विभिन्न मदों का समूहों में वर्गीकरण किया जाता है और प्रत्येक समूह में आने वाली मदों की संख्या बताई जाती है। एक बारंबारता बंटन सांख्यिकी 8.3 में प्रदर्शित है। कभी-कभी आँकड़ों का प्रयोग करने वाले को प्रकाशनों में बारंबारता बंटन पहले ही बने हुए मिलेंगे जिनकी ओर वह संकेत कर सकता है, कभी-कभी वह अवर्गीकृत आँकड़ों से स्वयं अपना बारंबारता बंटन बनाएगा। हम बारंबारता बंटन का अपना विवरण पहले अपक्व या अवर्गीकृत आँकड़ों के रूप पर विचार करके प्रारंभ करेंगे।

अपक्व आँकड़े

वे अवर्गीकृत आँकड़े जिनसे बारंबारता बंटन बनाया जा सके ऐसे प्रणीत हो सकते हैं जैसे कि सारणी 8.1 के आँकड़े। यहाँ हमारे पास रजिस्ट्रार स्टेट यूनिवर्सिटी (नवार्क शाखा) के 1965 में स्नातक होने वाली कक्षा के 409 उद्धार कला विद्यार्थियों द्वारा चार वर्षीय कोर्स के लिए प्राप्त श्रेणियाँ हैं। श्रेणियों की व्यवस्था यादृच्छिक है और हमने स्थान बचाने के लिए नाम छोड़ दिए हैं। अपक्व आँकड़ों का एक अन्य उदाहरण जिससे संभवतः बारंबारता बंटन बनाया जा सके एक कारखाने का वेतन चिट्ठा है। कर्मचारियों के वेतन चिट्ठों को वर्णक्रम में नाम द्वारा, कर्मचारी संख्या द्वारा, विभागों द्वारा और तब नाम या संख्या द्वारा, बरीयता द्वारा, या किसी अन्य सुविधाजनक क्रम में सूची में रखा जा सकता है। सारणी 8.1 में दिखायी विद्यार्थियों की श्रेणियों पर विचार करने से यह स्पष्ट है कि यदि अको की पुनर्व्यवस्था न की जाए तो बहुत कम जानकारी प्राप्त होनी है।¹ जब सारणी 8.1 के समान आँकड़ों की सूची बनाई जाती है तो न्यूनतम श्रेणी और उच्चतम श्रेणी मान्य करना भी टेढ़ा कार्य है। यह निश्चित रूप से जानना और भी कठिन है कि कितने मूल्य के इर्द-गिर्द श्रेणियों की केन्द्रित होने की प्रवृत्ति है अथवा क्या वे वास्तव में ऐसे केन्द्रीकरण का प्रदर्शन करती हैं। विश्लेषण के ये और अन्य पग आँकड़ों की पुनर्व्यवस्था करने और उनका सारांश निकालने से सरल बन जाते हैं।

1. श्रेणियाँ 10, 20, 30, इत्यादि से 1000, 900, 800, आदि में परिवर्तित । गई।

सारणी 8.1

रुजसं स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 मे स्नातक होने वाली कक्षा के 409 उदार कला विद्यार्थियों द्वारा चार वर्षीय पाठ्यक्रम के लिए प्राप्त श्रेणियाँ।

86 1	83 2	84 1	91 1	84 3	93 6	79 7	87 4	95 0
83 3	92 9	82.4	82 6	89 8	81 0	89 5	83 1	82 5
81 5	78 0	87 2	89 8	81 3	84 8	91 0	92 2	90 2
89 7	84 0	80 0	84 8	86 3	88 7	84 6	81 3	87 6
85 0	79 4	94 3	83 5	79 8	82 2	87 1	88 8	78 9
78 6	86 8	82 8	80 7	96 5	83 7	77 8	81 2	84 1
88 5	77 7	84 4	90 6	80 2	90 2	98 3	86 1	90 6
80 6	90 2	85 3	79 1	86 6	80 9	86 2	83 0	86 4
83 5	84 3	91 7	84 0	78 1	88 1	79 6	89 8	81 5
94 6	81 3	88 4	81 0	89 6	81 8	83 2	85 2	83 8
81 1	78 6	83 1	92 8	76 9	83 7	92 0	80 6	94 2
86 2	87 9	81 7	83 8	87 4	85 6	91 8	88 7	79 9
79 7	86 3	89 5	80 9	81 3	94 3	86 6	81 0	90 9
88 7	82 3	84 1	87 6	83 3	81 2	80 2	93 0	82 7
78 9	92 2	80 3	86 4	90 5	87 3	84 0	82 4	86 0
82 5	79 8	88 0	78 3	84 6	82 1	88 8	85 4	88 0
87 2	83 0	82 0	93 9	81 5	87 7	79 3	96 2	82 3
90 7	87 0	83 4	91 8	88 2	79 4	85 8	83 6	85 0
80 2	81 4	90 2	84 8	79 7	92 2	77 4	86 5	89 5
84 7	87 7	80 9	86 2	85 0	82 8	87 7	83 1	91 8
87 5	78 7	86 0	79 9	90 7	83 9	79 2	88 4	84 5
82 7	94 2	83 1	88 5	79 5	86 2	93 8	85 1	94 6
84 0	79 6	97 5	80 6	87 9	77 9	84 2	81 3	81 1
88 6	83 2	80 0	83 3	83 1	88 9	78 6	87 6	86 3
79 3	86 6	85 2	89 8	77 4	84 1	83 7	81 2	89 9
91 4	88 0	79 8	78 5	86 8	83 0	88 7	84 3	84 2
89 8	81 9	85 0	84 5	91 5	84 9	82 9	91 8	91 4
85 1	77 9	87 8	76 5	95 2	91 7	78 9	86 6	87 4
83 8	90 3	81 4	86 8	82 5	89 7	84 7	84 0	84 6
81 8	85 3	92 0	82 3	80 1	86 1	87 0	93 9	83 3
96 7	79 9	82 5	84 0	89 5	79 3	79 6	83 4	88 5
82 2	84 2	85 6	84 3	91 4	85 0	89 6	80 5	84 8
86 1	89 0	77 6	90 9	83 4	78 3	81 4	87 4	82 6
87 4	80 7	86 1	80 4	86 6	93 0	86 0	82 7	96 7
79 6	82 4	94 6	86 5	79 2	83 7	91 6	87 9	83 2
90 2	85 0	83 5	91 8	88 5	82 0	90 3	85 3	86 4
86 2	78 8	87 2	83 2	77 7	88 3	78 8	79 8	87 1
81 0	88 5	79 5	90 2	85 2	81 2	84 5	92 5	81 9
86 8	81 1	84 6	86 3	80 9	85 9	87 5	83 1	89 2
81 3	93 5	83 0	76 9	96 0	80 1	81 0	86 6	80 7
85 6	79 4	87 4	83 7	82 8	84 1	90 7	82 3	85 5
92 5	86 4	80 3	85 3	79 8	87 9	81 7	87 7	
81 4	84 5	83 1	89 4	86 9	79 6	85 0	82 1	
84 8	82 3	87 8	78 5	83 1	89 3	80 3	90 2	
87 1	86 3	79 7	86 6	81 0	79 3	87 3	83 0	
85 9	91 9	82 8	82 6	87 7	86 1	80	84 0	

रुजसं स्टेट यूनिवर्सिटी के पञ्जीयक नार्मलिय ■ धनियाँ 10 20, 30 इत्यादि से 100 0, 90 0, 80 0, आदि मे परिवर्तित की गई ।

सरणी

सारणी 8 2 के विद्याधियों की श्रेणियों की अवरोही क्रम में पुनर्व्यवस्था की गई है। इस प्रकार की व्यवस्था (चाहे आरोही हो या अवरोही) एक सरणी कहलाती है। यह पदों की परिमाण-क्रम में व्यवस्था करती है। हमने सारांश नहीं निकाला है, जब हम वारवारता बटन का निर्माण करेंगे वह तब निकालेंगे। सारणी पर विचार करके हम भाँकड़ों से कुछ सीखने की स्थिति में आ जाते हैं। एक तो, सारणी में हम श्रेणियों का परिसर देखने के तत्काल योग्य हो जाते हैं जो 76.5 से 98.3 तक बढ़ता है। दूसरे, यह भी देखा जा सकता है कि श्रेणियों का केन्द्रीकरण 83 और 85 के बीच में है। जब हम वारवारता बटन का परीक्षण करेंगे और केन्द्रीय प्रवृत्ति के पगों पर विचार करेंगे तो यह अधिक स्पष्ट दिखाई देगी। तीसरे कुछ अधिक विस्तृत परीक्षा से हमें श्रेणियों के बटन की मोटी जानकारी प्राप्त होती है। उदाहरणार्थ, हम देख सकते हैं कि 78 से कम या 96 से ऊपर की श्रेणियाँ कम हैं। जब हमारे पास वारवारता बटन होगा तो श्रेणियों के इस विविष्ट रूप का अध्ययन सरल होना। चौथे, यह देखा जा सकता है कि भ्रमों में उचित मात्रा में सातत्य दिखाई देता है। यदि श्रेणियों को पूर्ण प्रतिशतनामों के रूप में व्यक्त किया जाए तो 77 से 98 तक सब निरंतर मूल्यों का प्रतिनिधित्व होता है। यदि हम दिखाए गए भ्रमों पर एक दशमलव स्थान तक विचार करें तो हम देख सकते हैं कि 79.0 से 92.0 तक के परिसर में, जिसमें 409 विद्याधियों में से 350 सम्मिलित हैं, संभावित 131 मूल्यों में से 118 मिलते हैं। यदि श्रेणियाँ विद्याधियों की अधिक संख्या के लिए होती तो यह प्रवृत्ति अधिक महत्वपूर्ण होती।

किन्तु सरणी भाँकड़ों का एक बेढगा प्रकार है। साथ ही, सब पदों की पुनर्व्यवस्था करने की आवश्यकता के कारण इसका निर्माण कष्टदायक है। सारणी के निर्माण का एक पर्याप्त सन्तोषजनक तरीका भ्रमों को छोटे काष्ठों पर लिखना और काष्ठों को छाँटना है। हाँ, यदि भाँकड़ों को याचिक माग्नीकरण काष्ठों पर द्विगुणित किया जाए तो सारणी का निर्माण सरल है।

श्रेणियों का अध्ययन करते समय हम प्रायः सारणी बनाने के हल्छक हो सकते हैं। कुछ संस्थाएँ प्रतिवर्ष स्नातक होने वाली कक्षा की एक सूची प्रकाशित करती हैं जिसमें उच्चतम से निम्नतम क्रम तक विद्याधियों के नाम और स्थान अंकित होते हैं।

यदि हमारी अस्पताल या समुदाय पैटी के लिए धन इकट्ठा करने के अभियान में रुचि है तो वैयक्तिक उपहारों को अवरोही क्रम में अंकित करना बहुत उपयोगी (उदाहरणार्थ, प्रचार प्रयोजनों के लिए) हो सकता है। परन्तु यह स्पष्ट है कि इस प्रकार से 500 या 1,000 अगदानों की सूची बनाना कष्टदायक और सीमित मूल्य का होगा। बहुत से उदाहरणों में सरणी बनाने से कोई विशेष लाभ नहीं है। एक संस्था के लिए प्रति मास अपने कर्मचारियों को दी राशियों की सरणी बनाना समय को नष्ट करना होगा। इस तर्क में कोई अधिक सार नहीं है कि एक बैंक अपने बहुत से जमाकर्ताओं के दैनिक बकाया की सारणी क्यों बनाए। दूसरी ओर, जन्म मरण सांख्यिकी के विद्यार्थियों को जन्म दरों के अध्ययन में विभिन्न नमूनों की आरोही या अवरोही क्रम से सारणी बनाना और अन्तरी के कारणों पर विचार करना बहुत उपयोगी लग सकता है।

सारणी 82

हजत स्टट यूनिवर्सिटी के 1965 मे स्नातक होने वाली कक्षा के 409 उवार कला
विद्यार्थियो द्वारा चार वर्षीय पाठ्यक्रम के लिए प्राप्त
अंशियो की सरणी

983	910	885	868	852	840	827	811	796
975	909	885	868	852	840	827	811	796
967	909	885	866	852	839	826	811	796
967	907	884	866	851	838	826	810	795
965	907	884	866	851	838	826	810	795
962	907	883	866	850	838	825	810	794
960	906	882	866	850	837	825	810	794
952	906	881	866	850	837	825	810	794
950	905	880	866	850	837	825	810	793
946	903	880	865	850	837	824	809	793
946	903	880	865	850	837	824	809	793
946	902	879	864	850	836	824	809	793
943	902	879	864	849	835	823	809	792
943	902	879	864	848	835	823	807	792
942	902	879	864	848	835	823	807	791
942	902	878	863	848	834	823	807	789
939	902	878	863	848	834	823	807	789
939	902	877	863	848	834	822	806	789
939	899	877	863	847	833	822	806	788
938	898	877	863	847	833	821	806	788
936	898	877	862	846	833	821	805	788
935	898	877	862	846	833	820	804	786
930	898	876	862	846	832	820	803	786
930	898	876	862	846	832	819	803	776
929	897	876	862	845	832	819	803	785
928	897	875	861	845	832	818	802	785
925	896	875	861	845	832	818	802	783
925	896	874	861	845	831	817	802	783
922	895	874	861	844	831	817	801	781
922	895	874	861	843	831	815	801	780
922	895	874	861	843	831	815	800	779
920	895	874	860	843	831	815	800	779
920	894	874	860	843	831	814	799	778
918	893	873	860	842	831	814	799	777
918	892	873	859	842	831	814	799	777
918	890	872	859	842	830	814	798	776
918	889	872	858	841	830	813	798	774
918	888	872	856	841	830	813	798	774
917	888	871	856	841	830	813	798	769
917	887	871	856	841	830	813	798	769
916	887	871	855	841	829	813	797	765
915	887	870	854	840	828	813	797	
914	887	870	853	840	828	812	797	
914	886	869	853	840	828	812	797	
914	885	868	853	840	828	812	796	
911	885	868	853	840	827	812	796	

बारवारता बटन

मरणी 82 की सारणी में विद्यार्थियों की श्रेणियों की पुनर्व्यवस्था की गई। सारणी 83 का बारवारता बटन श्रेणियों के 12 समूहों या वर्गों में सक्षिप्त कर देता है।

सारणी 83

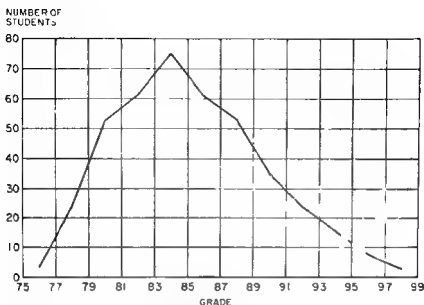
रजसं स्टेट यूनिवर्सिटी की 1964 में स्नातक होने वाली कक्षा के 409 उदार कला विद्यार्थियों द्वारा चार वर्षों पाठ्यक्रम के लिए प्राप्त श्रेणियों का बारवारता बटन

श्रेणी	विद्यार्थियों की संख्या
75 0—76 9	3
77 0—78 9	23
79 0—80 9	52
81 0—82 9	61
83 0—84 9	74
85 0—86 9	61
87 0—88 9	53
89 0—90 9	35
91 0—92 9	23
93 0—94 9	15
95 0—96 9	7
97 0—98 9	2
कुल	409

यह स्पष्ट है कि बारवारता बटन सारणी में दिए विस्तार को नहीं दिखाता, परन्तु सारासं निकालने में बहुत लाभ होता है। हम देख सकते हैं कि निम्नतम श्रेणी 75 में कम नहीं है और उच्चतम श्रेणी 99 भी नहीं है हम उच्चतम और निम्नतम श्रेणियों के ठीक-ठीक मूल्यों को निश्चित रूप से नहीं जान सकते जैसा हमने मरणी से किया था। श्रेणियों का 83 85 के निकट केन्द्रीकरण एक दृष्टि में स्पष्ट है। यदि हम बारवारता बटन का एक वक्र खींचें, जैसा कि चार्ट 81 में है तो हम ग्रांकडो को तुरन्त देख सकते हैं और अन्य श्रेणियों से तुलनाएँ कर सकते हैं जैसा कि इस अध्याय के एक उत्तरवर्ती परिच्छेद में विचार किया गया है। ग्रांकडो के वर्गीकरण के बाद हम विशिष्ट मूल्यों या शीघ्र परिकलन करने की स्थिति में होते हैं (अगले अध्यायों में विवेचित) जो हमें ग्रांकडो के वक्र और उनके विश्लेषण में सहायता करेगा।

जब एक सरणी प्राप्त है तो बारवारता बटन केवल मात्र मदी को गिनकर बनाया जा सकता है। परन्तु केवल बारवारता बटन बनाने के प्रयोजन के लिए एक सरणी बनाना उचित नहीं है क्योंकि मरणी निर्माण करने के लिए बहुत अधिक समय की आवश्यकता होती है।

यदि ग्रांकडो भ्रमगठित रूप में है जैसा सारणी 81 में है, तो हम अध्याय 2 में दिखाई विधि के समान गुणांकन विधि से बारवारता बटन का निर्माण कर सकते हैं। भ्रको के प्रयोग का दूसरा तरीका सारणी 84 के समान एक प्रविष्टि प्रपत्र बनाना है।



चार्ट 8.1 क्लजर्स स्टेट यूनिवर्सिटी की 1965 में स्नातक होने वाली कक्षा के 409 उबार कला विद्यार्थियों द्वारा चार वर्षीय पाठ्यक्रम के लिए प्राप्त श्रेणियाँ। सारणी 8.3 प्रॉकडे।

यह सरणी बनाने की अपेक्षा कम श्रमसाध्य है और गुणांकन विधि की अपेक्षा इसमें कुछ लाभ हैं। प्रविष्टि प्रपत्र के लाभ हैं। (1) हम स्तम्भों की यह देखने के लिए जाँच कर सकते हैं कि कोई मद गलती से तो अंकित नहीं हुई, (2) हम अंकित मदों का जोड़ कर सकते हैं और इस जोड़ की अवगणित प्रॉकडे के जोड़ के साथ पड़ताल कर सकते हैं, (3) यदि हम यह निर्णय करें कि हमें 2 प्रतिशत की बजाय 1 प्रतिशत या 3 प्रतिशत की श्रेणियाँ चाहिए तो हम अपने वारवारता बटन को थोड़ी चेष्टा से पुन आकार दे सकते हैं, (4) जैसा कि अगले अध्याय में दिखाया जाएगा, प्रविष्टि प्रपत्र हमें यह पता लगाने के योग्य बना देता है कि एक श्रेणी का मध्य मूल्य उस श्रेणी में मदों की औसत से कितना अभिन्न मिलता-जुलता है। यदि वास्तविक हो तो प्रविष्टि प्रपत्र में प्रयुक्त श्रेणियाँ हमारे विचार के अनुसार वारवारता बटन के लिए जितनी हम चाहेंगे, उससे भी सफुचित हो सकती हैं। तब इन श्रेणियों को उचित मध्यान्तर और श्रेणी सीमाओं का प्रयोग करके तुरन्त मिलाकर चौड़ा किया जा सकता है।

सारणी 8.3 के वारवारता बटन के सब श्रेणी मध्यान्तर 2 प्रतिशत हैं। जब सब श्रेणी मध्यान्तर समान हो तो चार्ट बनाना और परिकलन करना सरल हो जाता है। अतः जब भी संभव हो, वारवारता बटनों का निर्माण समान श्रेणी मध्यान्तरों से करना चाहिए। परन्तु यह सदा व्यावहारिक नहीं होता। सारणी 8.5 में एक वारवारता बटन दिखाया गया है जिसके श्रेणी मध्यान्तर असमान हैं। इस उदाहरण में परिणाम कम आय वाले सचिवों के सम्बन्ध में अधिक विस्तृत जानकारी देना है।

सांख्यो ८४

रुजर्स स्टेट यूनिवर्सिटी की 1965 में स्थापित होने वाली कक्षा के 409 उद्धार कला विद्यार्थियों द्वारा चार वर्षीय पाठ्यक्रम के लिए प्राप्त भूमिकाओं के लिए प्रविष्टि प्रपत्र।

75 0	77 5	79 0	81 0	83 0	85 0	87 0	89 0	91 0	93 0	95 0	97 0
75 9	78 4	80 9	83 4	85 9	88 4	90 9	93 4	95 9	98 4	100 9	103 4
76 0	78 5	81 0	83 5	86 0	88 5	91 0	93 5	96 0	98 5	101 0	103 5
76 9	79 4	81 9	84 4	86 9	89 4	91 9	94 4	96 9	99 4	101 9	104 4
77 0	79 5	82 0	84 5	87 0	89 5	92 0	94 5	97 0	99 5	102 0	104 5
77 9	80 4	82 9	85 4	87 9	90 4	92 9	95 4	97 9	100 4	102 9	105 4
78 0	80 5	83 0	85 5	88 0	90 5	93 0	95 5	98 0	100 5	103 0	105 5
78 9	81 4	83 9	86 4	88 9	91 4	93 9	96 4	98 9	101 4	103 9	106 4
79 0	81 5	84 0	86 5	89 0	91 5	94 0	96 5	99 0	101 5	104 0	106 5
79 9	82 4	84 9	87 4	89 9	92 4	94 9	97 4	99 9	102 4	104 9	107 4
80 0	82 5	85 0	87 5	90 0	92 5	95 0	97 5	100 0	102 5	105 0	107 5
80 9	83 4	85 9	88 4	90 9	93 4	95 9	98 4	100 9	103 4	105 9	108 4
81 0	83 5	86 0	88 5	91 0	93 5	96 0	98 5	101 0	103 5	106 0	108 5
81 9	84 4	86 9	89 4	91 9	94 4	96 9	99 4	101 9	104 4	106 9	109 4
82 0	84 5	87 0	89 5	92 0	94 5	97 0	99 5	102 0	104 5	107 0	109 5
82 9	85 4	87 9	90 4	92 9	95 4	97 9	100 4	102 9	105 4	107 9	110 4
83 0	85 5	88 0	90 5	93 0	95 5	98 0	100 5	103 0	105 5	108 0	110 5
83 9	86 4	88 9	91 4	93 9	96 4	98 9	101 4	103 9	106 4	108 9	111 4
84 0	86 5	89 0	91 5	94 0	96 5	99 0	101 5	104 0	106 5	109 0	111 5
84 9	87 4	89 9	92 4	94 9	97 4	99 9	102 4	104 9	107 4	109 9	112 4
85 0	87 5	90 0	92 5	95 0	97 5	100 0	102 5	105 0	107 5	110 0	112 5
85 9	88 4	90 9	93 4	95 9	98 4	100 9	103 4	105 9	108 4	110 9	113 4
86 0	88 5	91 0	93 5	96 0	98 5	101 0	103 5	106 0	108 5	111 0	113 5
86 9	89 4	91 9	94 4	96 9	99 4	101 9	104 4	106 9	109 4	111 9	114 4
87 0	89 5	92 0	94 5	97 0	99 5	102 0	104 5	107 0	109 5	112 0	114 5
87 9	90 4	92 9	95 4	97 9	100 4	102 9	105 4	107 9	110 4	112 9	115 4
88 0	90 5	93 0	95 5	98 0	100 5	103 0	105 5	108 0	110 5	113 0	115 5
88 9	91 4	93 9	96 4	98 9	101 4	103 9	106 4	108 9	111 4	113 9	116 4
89 0	91 5	94 0	96 5	99 0	101 5	104 0	106 5	109 0	111 5	114 0	116 5
89 9	92 4	94 9	97 4	99 9	102 4	104 9	107 4	109 9	112 4	114 9	117 4
90 0	92 5	95 0	97 5	100 0	102 5	105 0	107 5	110 0	112 5	115 0	117 5
90 9	93 4	95 9	98 4	100 9	103 4	105 9	108 4	110 9	113 4	115 9	118 4
91 0	93 5	96 0	98 5	101 0	103 5	106 0	108 5	111 0	113 5	116 0	118 5
91 9	94 4	96 9	99 4	101 9	104 4	106 9	109 4	111 9	114 4	116 9	119 4

सारणी 85

अप्रैल 1964 में बोस्टन, मैसाचुसेट्स में 7,011 महिला सचिवों की औसत सामान्य-समय की साप्ताहिक आय

साप्ताहिक आय	महिलाओं की संख्या	वारवारता घनत्व, प्रति 5 00 डालर आय, महिलाओं की संख्या
50 डालर परन्तु 55 डालर से कम	1	1
55 डालर परन्तु 60 डालर से कम	9	9
60 डालर परन्तु 65 डालर से कम	107	107
65 डालर परन्तु 70 डालर से कम	167	167
70 डालर परन्तु 75 डालर से कम	461	461
75 डालर परन्तु 80 डालर से कम	517	517
80 डालर परन्तु 85 डालर से कम	620	620
85 डालर परन्तु 90 डालर से कम	786	786
90 डालर परन्तु 100 डालर से कम	1,796	898
100 डालर परन्तु 110 डालर से कम	1,297	648.5
110 डालर परन्तु 120 डालर से कम	728	364
120 डालर परन्तु 130 डालर से कम	291	145.5
130 डालर परन्तु 145 डालर से कम	179	59.7
145 डालर या अधिक	52	..
कुल	7,011	...

आंकड़े संयुक्त राज्य अर्थ सांख्यिकी ब्यूरो की "प्रॉक्सेशनल वेज सर्वे" बोस्टन, मैसाचुसेट्स, सितम्बर 1964, पृष्ठ 7 से।

वर्ग संख्या का चयन—वर्गों की संख्या के संबंध में, जिनमें वारवारता बटन बाँटा जाना चाहिए, कोई निश्चित नियम नहीं दिया जा सकता। यदि बहुत अधिक वर्ग हैं तो उनमें से बहुतों में केवल कुछ वारवारताएँ होगी और बटन में अनियमितताएँ दिखाई दे सकती हैं जो मापे जा रहे चर के व्यवहार के कारण नहीं हैं। यदि बहुत कम वर्ग हैं तो एक वर्ग में इतनी अधिक वारवारताएँ इकट्ठी हो जाएँगी जिससे बहुत सी जानकारी नष्ट हो जाएगी। वर्गों की प्रयोज्य संख्या आंशिक तौर पर आंकड़ों की प्रकृति पर (जैसाकि भ्रमले परिच्छेद में भोजन की जाँचों के लिए वर्णित किया जाएगा) और प्रगत वर्ग में वारवारताओं की संख्या पर निर्भर करती है। जितनी अधिक वारवारताओं की संख्या है, हमारे पास उतने अधिक वर्ग हो सकते हैं। विचाराधीन मूल्यों के क्षेत्र में जिस अनियमितता से वारवारताएँ बाँटी जाती हैं वह भी एक निर्धारक तत्त्व है। वारवारताओं का बटन जितना अधिक नियमित है, हम उतने अधिक वर्गों का प्रयोग कर सकते हैं, क्योंकि अनियमितता की उच्च मात्रा वाले आंकड़ों को, वारवारताओं में अनुचित घनत्वों और अनियमितताओं को बिना दिखाएँ घने वर्गों में बाँटा जा सकता है। साधारण तौर पर

यह कहा जा सकता है कि 6 या 8 से कम वर्गों का प्रयोग विरले ही करना चाहिए, और 16 से अधिक वर्ग केवल विस्तृत आँकड़ों के साथ काम करने के लिए उपयोगी होंगे। उदाहरणार्थ सारणी 8.3 में 12 वर्ग प्रयुक्त किए गए थे। जब वर्गों की संख्या निर्धारित हो चुकी हो, तो सम्पूर्ण बटन के लिए मूल्यों का परिमर प्रयोग किए जाने वाले श्रेणी मध्यांतर का भेद करता है।

वर्ग सीमाओं का चयन—अध्याय 4 में यह संकेत किया गया था कि प्रत्येक वर्ग के मध्य मूल्य का उपयोग वर्ग का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है। वर्गों के मध्य-मूल्यों का न केवल वारवारता बटन का चार्ट बनाने समय, बल्कि विभिन्न परिकलन करने में भी जिसका बाद के अध्यायों में विवेचन किया जायेगा, प्रयोग किया जाता है। यदि प्रत्येक वर्ग की सीमाओं का स्पष्ट संकेत नहीं किया गया हो तो मध्य-मूल्य का, जो कि ऊपरी और निचली सीमाओं का मध्यमान है, ठीक प्रकार से निर्धारण नहीं किया जा सकता। मध्य मूल्य कल्पना की पर्याप्तता का अधिक पूर्ण रूप से अध्याय 9 में विवेचन किया जाएगा। इस स्थान पर यह स्पष्ट कर देना महत्वपूर्ण है कि जब वारवारता बटन का निर्माण किया जा रहा हो तो वर्ग सीमाओं का इस प्रकार से चयन करना चाहिए कि जहाँ तक संभव हो प्रत्येक वर्ग का मध्य-मूल्य, किन्हीं मूल्यों को जिनके इर्द-गिर्द आँकड़ों के केन्द्रीकरण की प्रवृत्ति है, ठीक ठीक ढँक लेगा।

कल्पना कीजिए कि कॉलेज के नए विद्यार्थियों के एक बड़े समूह के शैक्षिक स्तर के 0 से 100 तक के परिमर के सरासरीक पमाने पर माप किए जाते हैं। आँकड़ों के उदाहरणार्थ, 50 में लगभग 100 तक काफी सरलता से अभ्यास होने की प्रतीक्षा की जा सकती है। कुछ विद्यार्थी 88.0 योग्यताक्रम के और अन्य 89.0 के होंगे, इनके प्रतिरिक्त कुछ अन्य इन दो मूल्यों के बीच में आएँगे। यदि एक पर्याप्त बड़े समूह का माप दिया जाता हो तो 88.0 तथा 89.0 के बीच परिवर्तनों का छोटापन केवल मापक यंत्र की यथार्थता द्वारा सीमित होगा (इस उदाहरण में, श्रेणीकरण विधि)। मूल्यों की ऐसी श्रेणी नहीं होगी जिसके इर्द गिर्द वारवारताओं की केन्द्रित होने की प्रवृत्ति होगी और पूर्वगामी अनुच्छेद के अंत में वर्णित समस्या उत्पन्न नहीं होगी।

दूसरी ओर, एक कैकटीरिया के भोजन के चूँको पर विचार कीजिए जिनमें से बहुत से (परन्तु सब नहीं) 5 सेन्ट का गुणज है। इस उदाहरण में, वर्ग अन्तरालों को 8—12 सेन्ट 13—17 सेन्ट, 18—22, सेन्ट इत्यादि लिखा जाना चाहिए, इस प्रकार 10 सेन्ट 15 सेन्ट, 20 सेन्ट, इत्यादि के मध्य मूल्य प्राप्त होने चाहिए जो केन्द्रीकरण बिन्दुओं से मिलते हैं।

भौक्षिकियों के वेतन मानों के आँकड़ों तथा उदार कला स्नातकों के क्रमनिर्धारण एक सतत चर के उदाहरण हैं क्योंकि मूल्य एक दूसरे से बहुत ही छोटे परिवर्तनों के योग्य हैं। लोगों की ऊँचाईया और भार भी निरन्तर चर हैं। जीवन की दीर्घता एक अन्य उदाहरण है। अल्पाहारमूह के भोजन के चूँको के आँकड़ों एक विविक्त या असतत चर के उदाहरण हैं, क्योंकि मूल्य एक दूसरे से परिमित मात्रा में भिन्न हैं, जो इस मामले में 1 सेन्ट है। एक विविक्त चर के लिए वे सकेन्द्रण दिखाना आवश्यक नहीं जो भोजन के चूँको के आँकड़ों में विद्यमान थे। उदाहरण के लिए, यदि बहुत से कर्मचारों को एकसमान कार्यों में लगाया जाए और उन्हें कार्य भाग की दर के आधार पर अदायगी की जाए (यर्थात् उत्पादन मात्रा के आधार पर) तो यह बिल्कुल संभव है कि एक सप्ताह के कार्य के लिए 161 21

डालर, 161.22 डालर, 161 23 डालर, इत्यादि प्राप्त करने वाले व्यक्ति हो सकते हैं। यद्यपि कार्यभाग दरें एक सेट के भिन्नो में हो सकती हैं और प्रायः होती हैं किन्तु साप्ताहिक अदायगी पूर्ण सेन्टो में होनी आवश्यक है।

पूर्ववर्णन से एक महत्वपूर्ण विचार का सुभाव मिलता है अर्थात् हमारा सबध इतना इस तथ्य से नहीं है कि एक चर विविक्त है, जितना कि इस तथ्य से है कि अंकडे अमलत हो सकते हैं और हमारे पाम वास्तविक अंकडो में अन्तर्निहित अन्तर तथा सकेन्द्रण हैं। वेतनो पर विचार करते समय इस प्रकार की स्थिति प्रायः उत्पन्न होती है। कई सौ कर्मचारियों वाले एक संगठन ने संभवतः लगभग 5,200 डालर से लेकर 40,000 डालर से अधिक प्रति वर्ष तक वेतन दिए। किसी भी दृष्टि से इन सीमाओं के बीच समान रूप से अगाधित बटन संभवतः न हो। सलग्न मूल्यों के बीच अन्तर 100 डालर से लेकर 5,000 डालर तक हो सकते हैं और विभिन्न प्रयोगन वेतना जैसे 6,000 डालर, 7,000 डालर, 7,500 डालर, 8,000 डालर, 10,000 डालर, इत्यादि पर उद्घोषित सकेन्द्रण हो सकते हैं। इस प्रकार के बटन के लिए वर्ग सीमाओं का चयन बड़ी कठिनाई प्रस्तुत करता है। प्रायः मध्य-मूल्यों का इस प्रकार समझन करना कि वे सब सकेन्द्रण बिन्दुओं को ठीक-ठीक ग्रहण करें, संभव नहीं है। तब एक सन्निकट समझन पर्याप्त होना चाहिए।

यह तथ्य कि हम एक सतत चर पर विचार कर रहे हैं जो हमें अधाधुन वर्ग सीमाओं के चयन की आज्ञा नहीं देना। यदि व्यक्तियों के भारों के सबध में, निकटतम पाउंड तक प्रतिवेदन, अंकडे इकट्ठे किए जा रहे हैं। ता जिन व्यक्तियों के भार का प्रतिवेदन 142 पाउंड है वे 141.5 पाउंड तथा 142.5 पाउंड के बीच में कहीं होंगे, समूह के रूप में, उनकी औसत लगभग 142 पाउंड होगी। परन्तु कल्पना कीजिए कि भार का प्रतिवेदन अन्तिम पूर्ण पाउंड तक दिया गया है। इस स्थिति में, जिन व्यक्तियों के भार का प्रतिवेदन 142 पाउंड है वे ठीक 142 पाउंड और ठीक 143 पाउंड से कम के बीच में होंगे, समूह के रूप में, उनकी औसत लगभग 142.5 पाउंड होगी। आइए हम कल्पना करें कि 3 पाउंड के वर्ग-अन्तराल से एक वारवारता बटन का निर्माण करना है। यदि निकटतम पाउंड तक भारों का प्रतिवेदन मिला है तो 143, 146, 149, इत्यादि मध्य-मूल्यों के साथ वर्ग-अन्तरालों को "142—144, 145—147, 148—150" इत्यादि लिखना ठीक है। परन्तु यदि भारों का प्रतिवेदन अन्तिम पूर्ण पाउंड तक हुआ है तो उपयुक्त अनुष्ठ है, परन्तु "142 तथा 145 से कम, 145 तथा 148 से कम, 148 तथा 151 से कम", इत्यादि 143.5, 146.5, 149.5, इत्यादि मध्य-मूल्यों के साथ लिखना शुद्ध है।

कभी-कभी सतत चर पर विचार करते समय वर्ग इस प्रकार लिखे जाते हैं कि सीमाएँ परस्पर अति व्याप्त हुईं प्रतीत होती हैं। उदाहरण के लिए, विद्यापिषा के प्रेडा के अंकडो का 76.0—78.0, 78.0—80.0, 80.0—82.0, इत्यादि वर्गीकरण हो सकता था। जब यह किया जाता है तो वे वारवारताएँ जो एक वर्गसीमा पर गिरती हैं दो वर्गों के बीच विभक्त की जाती हैं जिसका परिणाम प्रायः बटन में कुछ भिन्नात्मक वारवारताएँ होती हैं।¹ इन स्थितियों के प्रयोग से एक वारवारता बटन सागरी 8.2 की मरणी से या मारणी 8.4 के प्रवेश फॉर्म में आसानी से निर्मित किया जा सकता है। परस्पर व्याप्त करने वाले वर्ग अन्तरालों का प्रायः प्रेडा के अंकडो के लिए प्रयोग नहीं किया जाता।

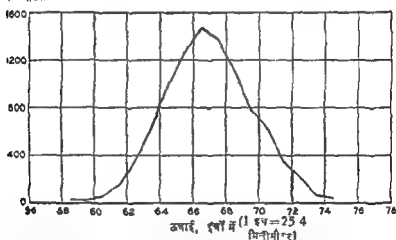
2 दक्षिण एच० ई० कावस्तन, ऐलिमेन्टरी स्टैटिस्टिक्स विद ऐन्लिकेशन्स इन मंडिसिन एण्ड दि बायोलॉजिकल साइन्सिस, शबर प्रकाशन, इन्वार्सिटिड, न्यूयार्क, 1959, पृष्ठ 41—49।

वारवारता बटनों के वक्र—वारवारता बटन के लेखाचित्रों निरूपण का विवेचन अध्याय 4 में किया गया था। यद्यपि वारवारता बटन एक स्तम्भ आरेख या वक्र द्वारा दिखाया जा सकता है, किन्तु उत्तरोक्त युक्ति का अनुप्रयोग करने की प्रथा है। (हम चार्ट 8.5 में तथा अध्याय 23 में स्तम्भ आरेख का प्रयोग करेंगे।) वक्र का एक लाभ यह है कि तुलना के प्रयोजन के लिए उन्हीं अक्षरों पर तुरन्त दो या अधिक वक्र खींचे जा सकते हैं। किसी भी स्थिति में, वारवारता बटन के विश्लेषण में पहला पग चार्ट का निर्माण होना चाहिए, क्योंकि एक ही दृष्टि में यह हमें बताएगा कि हम निम्न प्रकार के बटनों में किस पर विचार कर रहे हैं।

चार्ट 8.1, जिसमें दिखाएँगों के ग्रेडों के आँकड़ों का लेखाचित्रों रूप दिखाया गया है, सममित नहीं है, बल्कि थोड़ा सा दाईं ओर को तिरछा है। (तिरछेपन का वर्णन अध्याय 10 में है।) सामाजिक विज्ञानों में पेशे आने वाले बहुत से वारवारता बटन वक्र असममित हैं और प्रायः दाएँ को टेढ़े होते हैं। विरले ही हमें कोई वक्र बाएँ को टेढ़ा मिलता है।

जब और मानवमितीय श्रेणियों में (विशेषकर वे जिनमें देखीय माप जैसे कि ऊँचाई दो या तीन दिशा की अपेक्षा माप जैसे कटि परिधि या भार, आता है) प्रायः ऐसे वक्र प्राप्त होते हैं जो लगभग सममित हैं। इस प्रकार की श्रेणी चार्ट 8.2 में दिखाई गई है जो नर औद्योगिक कर्मचारियों के एक बड़े समूह का ऊँचाई बटन चित्रित करता है।

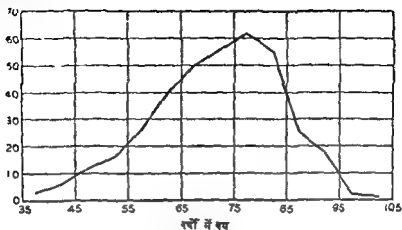
8.1 कर्मचारियों
की संख्या



चार्ट 8.2 9,552 नर, औद्योगिक कर्मचारियों की ऊँचाइयों। गोल्डे ए
हैल्थ स्टडी माफ टैन वाउजेन्ड मेन इंडस्ट्रियल वर्कर्स, पृष्ठ 59 से, समुक्त राज्य
सार्वजनिक स्वास्थ्य सेवा, सांख्यिकीय स्वास्थ्य बुलेटिन नं० 162।

एक वक्र जो बाएँ को तिरछा है चार्ट 8.3 में दिखाया गया है जो 371 ममरीकोन भाविष्कर्ताओं की मृत्यु के समय आयु चित्रित करता है। जैसा कि अध्याय 10 में सकेत किया गया है वहाँ इस श्रेणी में तिरछेपन की मात्रा मुनिश्चित की गई है, तिरछापन चर की विशेषता हो सकती है या इस तथ्य के कारण हो सकता है कि अध्ययन में सम्मिलित भाविष्कर्ताओं के लगभग पाँचवें भाग का जन्म 1800 से पूर्व हुआ था।

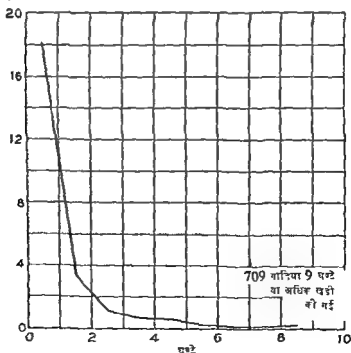
आविष्कृत
संख्या



चार्ट 8.3 371 अमरीकी आविष्कारियों की मृत्यु के समय आयु ।
"बौकडे सन्कडे बिस्टन की बायो सोशल कैरेक्टरिस्टिक्स ऑफ अमेरिकन इन्वेण्टर्स",
अमेरिकन सोस्योलॉजिकल रिव्यू, खंड 2, नं० 6, पृष्ठ 837—849 से ।

चार्ट 8.4 के वक्र से उस कालावधि का सकेत मिलता है जिसके दौरान अल्बूकर्क न्यू मेक्सीको में कारें खड़ी की गईं और इसमें बहुत सी कारें थोड़े समय के लिए खड़ी की

गाड़ियां
हड़ारो में



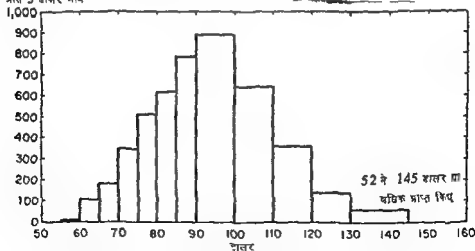
चार्ट 8.4 अल्बूकर्क, न्यू मेक्सीको में मोटर गाड़ियों के खड़ा रहने का समय । बौकडे स्वचातक मुद्रा सस्था (वाउन्डेशन) से लिए हैं ।

गई और प्रायः थोड़ी सम्पत्ति में लम्बी कालावधि के लिए खड़ी की गई दिखाई है। इस विशेषता वाले उल्टे J के रूप वाले वक्र कभी कभी मिल सकते हैं।

लेखाचित्रों निरूपण जब वर्ग-अन्तराल असमान हो—कुछ वारवारता बटनों के लिए बड़ी वर्ग-अन्तराल बराबर बनाए रखना संभव नहीं है। सारणी 8.5 के बटन में 5.00 डॉलर के आठ वर्ग, 10.00 डॉलर के चार वर्ग, 15.00 डॉलर का एक वर्ग और अनिर्धारित बाँड़ा का एक वर्ग है। 5.00 डॉलर के वर्ग-अन्तरालों का बराबर प्रयोग किया जाना वांछनीय न हुआ होता क्योंकि उनके लिए 50.00 डॉलर से लेकर 145.00 डॉलर तक के परिसर के लिए 19 वर्गों की आवश्यकता हुई होती। इतने अधिक वर्ग उपयोगी नहीं हो सकते थे और हमें श्रेणी के उच्च परिसरों के लिए आवश्यकता से अधिक विस्तृत विघटन होने लगाता। 10.00 डॉलर के वर्ग अन्तराल भी वांछनीय न हुए होते क्योंकि प्रति सप्ताह 90.00 डॉलर से कम आय वाले सचिवों के सम्बन्ध में विस्तृत जानकारी नष्ट हो गई होती।

सारणी 8.5 के आँकड़ों का एक उचित चार्ट खींचने के लिए परिवर्तनशील वर्ग-अन्तरालों के लिए समायोजन करना आवश्यक है। वर्ग "90.00 डॉलर किन्तु 100.00 डॉलर से कम" अपने पूर्व के वर्गों से दुगुना बड़ा है। हमें ज्ञान नहीं कि 1,796 सचिवों में से कितनों ने प्रति सप्ताह 90.00 डॉलर किन्तु 95.00 डॉलर से कम कमाए और कितनों ने 95.00 डॉलर किन्तु 100.00 डॉलर प्रति सप्ताह से कम कमाए। परन्तु हम कह सकते हैं कि वर्ग "90.00 डॉलर किन्तु 100.00 डॉलर से कम" के दो बराबर भागों में से प्रत्येक में औसत 898 सचिव थे। इस प्रकार के समायोजन सारणी 8.5 के अन्तिम स्तम्भ में कर दिए गए हैं जहाँ बटन प्रति 5.00 डॉलर आय बनाए गए हैं। ये वारवारता घनत्व हैं।

महिला मंत्रालय
प्रति 5 डॉलर आय

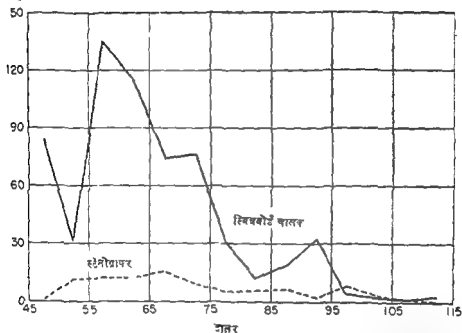


चार्ट 8.5 अक्टूबर 1964 में बोस्टन, मैसाच्यूसेट्स में 7,011 महिला सचिवों की औसत सामान्य समय साप्ताहिक आय के वारवारता घनत्व। आँकड़े सारणी 8.5 से।

सचिवों की आय के बटन का वारवारता घनत्वों के रूप में अब प्रानेखन किया जा सकता है, जैसा कि चार्ट 8.5 में है। सारणी 8.5 में अन्तिम वर्ग-अन्तराल के विस्तार का

अनुमान करना संभव नहीं है। अतः उस वर्ग की वारवारताओं का कोई समझन नहीं किया गया है। चार्ट में देखा कि इन 52 बच्चों की उपस्थिति की ओर पाठक का ध्यान कैसे आकर्षित किया गया। वैकल्पिक तौर पर, वारवारता घनत्वों के आँकड़ों को स्तम्भ आरेख के स्थान पर वक्र द्वारा दिखाया जा सकता था और यह चार्ट 4.21 में किया गया था। परन्तु स्तम्भ आरेख में पाठक के लिए बदलते वक्र विस्तार को नोट करना अधिक सरल हो जाता है।

महिला मर्यादा



चार्ट 8.6 अक्टूबर 1964 में वाशिंगटन, डी० सी० में 619 स्विचबोर्ड चालकों, वर्ग B तथा सिप्रकम फाह्स, साउथ डेकोटा में 90 सामान्य स्टेनोग्राफरों की औसत सामान्य समय माप्ताहिक आय। नक़्के सारणी 8.7 में।

वारवारता बटनों की सेलाचित्रीय तुलना—सारणी 8.6 में दो वारवारता बटन दिखाए हैं, एक 619 वर्ग B स्विचबोर्ड चालकों की सामान्य समय माप्ताहिक आय देता है, दूसरा 90 सामान्य स्टेनोग्राफरों की सामान्य समय माप्ताहिक आय प्रस्तुत करता है। दोनों श्रेणियाँ केवल महिलाओं के लिए हैं। यदि दोनों बटनों का महिलाओं की लगभग उम्र मर्यादा से सम्बन्ध होता तो हम दो वारवारता बटनों को उसी ग्रिड पर केवल आलोचित कर सकते थे और उनकी रूपरेखा का अध्ययन कर सकते थे। सारणी 8.6 की दो श्रेणियों के लिए ऐसा करने का परिणाम चार्ट 8.6 में दिखाया गया है। बहुत भिन्न निरपेक्ष आँकड़ों के कारण तुलना कोई विशेष स्पष्टीकरण करने वाली नहीं है। परन्तु यदि प्रत्येक वारवारता योग की प्रतिशतता के तौर पर, जिसका यह एक भाग है, व्यक्त की जाए तो हमारे पास प्रतिशतता वारवारता बटन आ जाते हैं जो सारणी 8.6 में भी दिए गए हैं। दोनों प्रतिशतता

वारवारता बटनों के आलेखन से, जैसा कि चार्ट 8.7 में है, हम दोनों श्रेणियों की लेखाचित्री विधि द्वारा तुलना करने के योग्य हो जाते हैं, जो विभिन्न मंदों की सख्या के कारण जटिल नहीं रहती। सभी विभिन्न श्रेणियों का सापेक्ष महत्व अब तुरन्त देखा जा सकता है।

सारणी 8.6

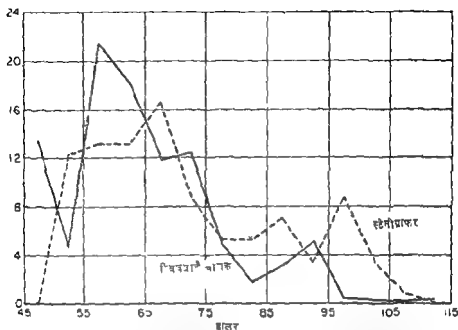
अक्टूबर 1964 में वाशिंगटन, डी० सी०, में 619 स्विच बोर्ड चालकों वर्ग B, और सिग्नेस फाल्स, साउथ डेकोटा में 90 सामान्य स्टेनोग्राफरों की औसत सामान्य समय साप्ताहिक आय।

साप्ताहिक आय	सख्या		कुल का प्रतिशत	
	स्विच बोर्ड चालक	स्टेनोग्राफर	स्विच बोर्ड चालक	स्टेनोग्राफर
45 डालर परन्तु 50 डालर से कम	84	0	13.6	0.0
50 डालर परन्तु 55 डालर से कम	31	11	5.0	12.2
55 डालर परन्तु 60 डालर से कम	135	12	21.8	13.3
60 डालर परन्तु 65 डालर से कम	115	12	18.6	13.3
65 डालर परन्तु 70 डालर से कम	73	15	11.8	16.7
70 डालर परन्तु 75 डालर से कम	77	8	12.4	8.9
75 डालर परन्तु 80 डालर से कम	31	5	5.0	5.6
80 डालर परन्तु 85 डालर से कम	13	5	2.1	5.6
85 डालर परन्तु 90 डालर से कम	18	7	2.9	7.8
90 डालर परन्तु 95 डालर से कम	32	3	5.2	3.3
95 डालर परन्तु 100 डालर से कम	4	8	0.6	8.9
100 डालर परन्तु 105 डालर से कम	2	3	0.3	3.3
105 डालर परन्तु 110 डालर से कम	1	1	0.2	1.1
110 डालर परन्तु 115 डालर से कम	3	0	0.5	0.0
योग	619	90	100.0	100.0

निकट समुक्त राज्य ग्राम सचिवालय ब्यूरो, आकूपेशनल वेंज सर्वे, वाशिंगटन डी० सी०—मेरीलैंड—बर्जीनिया, दिसम्बर 1964, पृष्ठ 7, तथा आकूपेशनल वेंज सर्वे सिग्नस फाल्स, साउथ डेकोटा, दिसम्बर 1964, पृष्ठ 3 से।

सारणी 8.6 की दो श्रेणियों की तुलना सरल हो गई थी क्योंकि वर्ग-अन्तराल समान थे। यदि समान इकाइयों में व्यक्त किन्तु भिन्न वर्ग अन्तरालों वाली दो श्रेणियों की लेखाचित्री तुलना करनी है, तो हम वारवारता घनत्वों का प्रति इकाई आलेखन कर सकते हैं (अर्थात् प्रति डालर, प्रति पाउंड या जो कुछ भी इकाई हो)। यदि दो श्रेणियों में मंदों की सख्या के सम्बन्ध में भी पर्याप्त भिन्नता है तो प्रतिशतता वारवारताओं की सगणना करके और प्रतिशतता वारवारताओं को वारवारता घनत्वों के तौर पर व्यक्त करके दोनों वक्रों के नीचे का क्षेत्रफल एकसमान बनाया जा सकता है।

महिला
पतिता

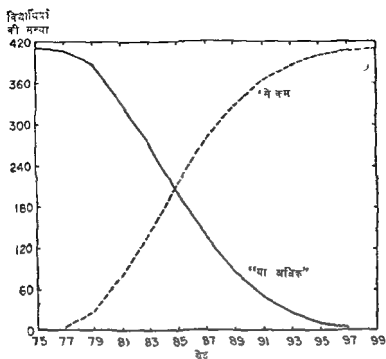


चार्ट 8.7 अक्टूबर 1964 वाशिंगटन, डी० सी० में 619 रिजर्वबोर्ड वालकी वर्ग B तथा सिमरस फास साउथ डेकोटा में 90 सामान्य स्टैनोप्राफरो की औसत सामान्य समय साप्ताहिक प्राय के प्रतिशतता बटन । धाकड़ सारणी 8.6 के ।

सारणी 8.7

हजस स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उधार कला स्नातकों के प्रेडों के सचयी बटन

ग्रेड	विद्यार्थियों की सख्या जिनके ग्रेड		विद्यार्थियों का प्रतिशत जिनके ग्रेड	
	प्रत्येक वर्ग की ऊपरी सीमा से कम थे	प्रत्येक श्रेणी की निचली सीमा के बराबर या उससे अधिक थे	प्रत्येक वर्ग की ऊपरी सीमा से कम थे	प्रत्येक वर्ग की निचली सीमा के बराबर या उससे अधिक थे
75.0—76.9	3	409	0.7	100.0
77.0—78.9	26	406	6.4	99.3
79.0—80.9	78	383	19.1	93.6
81.0—82.9	139	331	34.0	80.9
83.0—84.9	213	270	52.1	66.0
85.0—86.9	274	196	67.0	47.9
87.0—88.9	327	135	80.0	33.0
89.0—90.9	362	82	88.5	20.0
91.0—92.9	385	47	94.1	11.5
93.0—94.9	400	24	97.8	5.9
95.0—96.9	407	9	99.5	3.2
97.0—98.9	409	2	100.0	0.5



घाट 88 रजत स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उदार कला स्नातकों के ग्रेडों के संबंधी बटन। सारणी 87 के आंकड़ों।

समय-समय पर हम चाहते हैं कि दो श्रेणियाँ में मदों की संख्या के बीच के अंतर स्पष्ट हो जैसा कि घाट 24 1—24 4 में है, और ऐसी स्थिति में हम प्रतिशतता बार-बार ताँझों का प्रयोग नहीं करते। परन्तु आवश्यकता होने पर बार-बारता घनत्वों का प्रयोग किया जाएगा, जैसा कि घाट 24 1, 24 3 तथा 24 4 में है।

जब दो बार-बारता बटन को भिन्न इकाइयों के रूप में व्यक्त किया जाता है (डालरों, पाउंडों, इंचों, इत्यादि में) तो सीधी लेखाचित्री तुलना संभव नहीं है, क्योंकि ऐसा कोई सरल मार्ग नहीं है जिसमें X पैमानों का एक दूसरे में समझन दिया जा सके। विशिष्ट परिक्लिप्त मूल्यों का, जिनका बाद में विवेचन किया जाएगा, प्रभावपूर्ण महत्वात्मक तुलना प्राप्ति के लिए प्रयोग किया जा सकता है।

संबंधी बार-बारता बटन और तौर—सारणी 83 के आंकड़ों में बार-बारता बटन का सामान्य (अनन्य) रूप दिखाया गया है और उनसे हम प्रत्येक वर्ग में आने वाले विद्यार्थियों की संख्या निश्चित करने के योग्य हो जाते हैं। परन्तु कभी-कभी यह जानना उपयोगी हो सकता है कि कितने विद्यार्थियों ने या विद्यार्थियों की औसत ने विशेष ग्रेड से कम प्राप्त किए, अथवा कितने विद्यार्थियों या विद्यार्थियों की किस औसत ने विशिष्ट ग्रेड या उससे अधिक प्राप्त किए। यह जानकारी सारणी 87 के समान एक संबंधी सारणी में स्पष्ट तौर पर देली जा सकती है। इस सारणी में सारणी 83 की बार-बारताएँ “अथवा कम” आधार पर और साथ ही “अथवा अधिक” आधार पर संचित की गई हैं।

जब सचयी वारवारता बटन बनाए जाते हैं तो वारवारताओं का उचित वर्ग सीमाओं के सामने आलेखन किया जाता है जिसके परिणामस्वरूप चार्ट 8.8 में प्रदर्शित वक्र के समान वक्र आते हैं। ऐसे वक्र तोरण कहलाते हैं।

सचयी वारवारता सारणियों और तोरणों का प्रायः मजदूरी और काम के घण्टों के आंकड़े प्रस्तुत करने के लिए प्रयोग किया जाता है। मजदूरी के संकेत से वे हमें यह सुनिश्चित करने योग्य बनाते हैं कि एक समूह में से कितनी को (अथवा किस अनुपात को) निर्वाह स्तर से कम, मानक स्तर या सुविधा स्तर प्राप्त होता है। इसी प्रकार हम निर्वाह स्तर या अधिक, मानक स्तर या अधिक, और सुविधा स्तर या अधिक प्राप्त करने वाली सख्या या अनुपात को सुनिश्चित कर सकते हैं। यह सुनिश्चित करना भी संभव है कि कर्मकारों में से न्यूनतम (या अधिकतम) प्राप्त करने वाले 10, 25, 50 या अन्य प्रतिशत क्या मजदूरी प्राप्त कर रहे हैं। काम के घण्टों के संबंध में हम आधारणीय तौर पर अधिक या कम घण्टे काम करने वाली सरया या अनुपात को शीघ्रता से देख सकते हैं।

यदि दो सचयी वारवारता बटन लगभग एकसमान मद सख्या पर निर्भर करते हैं तो उनके तोरणों को बनाया और उनकी निरपेक्ष रूप में तुलना की जा सकती है। परंतु यदि दो श्रेणियाँ भिन्न योगों पर निर्भर करती हैं तो तुलना का प्रतिगनता वारवारताओं पर आधारित करना आवश्यक है जैसाकि असचयी रूप में दो वारवारता बटनों की तुलना करते समय होता है जिसका कि पहले विवेचन किया गया।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

हम देख चुके हैं कि एक बारबारता बटन का कैसे निर्माण किया जाए और एक बारबारता वक्र किस प्रकार खींचा जाए। वर्गीकृत आँकड़ों से या चार्ट से यह स्पष्ट है कि कुछ मूल्य ऐसे हैं जो बहुलता से विद्यमान होते हैं और कुछ अन्य ऐसे होते हैं जो कम बहुलता से उत्पन्न होते हैं। अधिकतर वक्र जो हमारे सामने आते हैं बहुत मोटे तौर पर घटी नुमा प्रकार के हैं जैसा कि चार्ट 8.1, 8.2, तथा 8.3 में दिखाया गया है। इस प्रकार की श्रेणियों के लिए जिनका ये चार्ट प्रतिनिधित्व करने हैं यह स्पष्ट है कि अधिक लाक्षणिक मूल्य बटनों के केन्द्रीय भाग में हैं। अतः हम मानों को पहचानने के लिए, जिनका एक बारबारता बटन के इस पक्ष का स्वरूप दिखाने की चेष्टा में परिकल्पना किया जा सकता है, केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप शब्दावली का प्रयोग करते हैं। इस अध्याय में हम समान्तर माध्य, माध्यिका, बहुलक, और सक्षेप में गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य का विवरण देंगे।

अगले अध्याय में हम प्रसार के मापों पर, जो एक बटन के फैलाव का संकेत करते हैं, तिरछेपन के मापों पर जो असममिति की दिशा और मात्रा को मापते हैं, तथा ककुदता के मापों पर जिनसे श्रेणी के “शिखरत्व” के अर्थ का संकेत मिलता है, विचार करेंगे।

समान्तर माध्य

प्रसमूहित आँकड़ों से समान्तर माध्य—समान्तर माध्य ऐसे लगातार दैनिक प्रयोग में है कि लगभग हम सभी इस प्रत्यय से परिचित हैं। कभी-कभी समान्तर माध्य को हम केवल “औसत” या “माध्य” कहते हैं, परन्तु जब हम गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य या किसी अन्य कम सामान्य माध्य की बात करते हैं तो सदा उचित विशेषण का प्रयोग करते हैं।

मदों की एक श्रेणी का समान्तर माध्य मदों के मूल्यों को जोड़ कर और मदों की संख्या से भाग करके प्राप्त किया जाता है। कल्पना कीजिए कि किसी छोटे नगर में गाजर 8 सेंट, 10 सेंट, 11 सेंट, तथा 12 सेंट प्रति पाउंड बिक रही है। इन चार प्रकारों का समान्तर माध्य

$$\frac{8 \text{ सेंट} + 10 \text{ सेंट} + 11 \text{ सेंट} + 12 \text{ सेंट}}{4} = \frac{41 \text{ सेंट}}{4} = 10.25 \text{ सेंट}$$

के द्वारा दिया जाएगा। यदि हम X_1, X_2, X_3 , इत्यादि द्वारा विभिन्न मूल्यों को विभिन्न मूल्यों का संकेत करने दें, N को मदों की संख्या की ओर संकेत करने दें तथा \bar{X} को समान्तर माध्य को व्यक्त करने दें तो हम

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N}$$

प्राप्त करते हैं। अथवा, अधिक संक्षेप में, सकलन संकेत Σ , का प्रयोग करके हम कह सकते हैं

$$X = \frac{\Sigma x}{N}$$

समान्तर माध्य की पूर्ण की संगणना में इस तथ्य का कोई विचार नहीं आया कि विभिन्न मूल्यों पर विभिन्न मात्राओं में गाजरें बेची गई हो सकती हैं। जब इस प्रकार से समान्तर माध्य का परिकलन किया गया है तो इसे साधारण समान्तर माध्य कहा जा सकता है। इस माध्य को अभारित समान्तर माध्य कहना ठीक नहीं है क्योंकि प्रत्येक मूल्य समान रूप से भारित था। इस तथ्य का विचार करके कि 10,000 पाउंड गाजरे 8 सेंट पर, 8,000 पाउंड 10 सेंट पर, 4,000 पाउंड 11 सेंट पर, और 1,000 पाउंड 12 सेंट पर बेची गईं, आइए हम उचित प्रकार से भारित समान्तर माध्य का परिकलन करें। अब हमारे पास

$$\begin{aligned} X &= \frac{(10,000 \times 8 \text{ सेंट}) + (8,000 \times 10 \text{ सेंट}) + (4,000 \times 11 \text{ सेंट}) + (1,000 \times 12 \text{ सेंट})}{23,000} \\ &= \frac{2,16,000 \text{ सेंट}}{23,000} = 9.39 \text{ सेंट} \end{aligned}$$

आता है। यदि प्रत्येक औसत किए जाने वाले मूल्य से संबंधित संख्याओं या बारबारताओं को दिखाने के लिए हम f_1, f_2, f_3 , इत्यादि संकेतों का प्रयोग करें तो हमारे पास

$$X = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 + \dots}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N}$$

आता है। साधारणतया एक समान्तर माध्य को भारित समान्तर माध्य समझा जाता है, जैसा कि अभी-अभी वर्णन किया गया है, जब तक अन्यथा उल्लिखित न किया जाए।

यह ध्यान में रखना चाहिए कि यद्यपि गाजरों का समान्तर माध्य मूल्य 9.39 सेंट प्रति पाउंड है, वास्तव में प्रति पाउंड ठीक इस मूल्य पर कोई गाजरें नहीं बेची गईं। अतः समान्तर माध्य को आवश्यक तौर पर एक परिकल्पित मूल्य समझना चाहिए, वास्तव में विद्यमान मूल्य नहीं।

समान्तर माध्य के गुणधर्म—समान्तर माध्य का एक महत्वपूर्ण गुण यह है कि माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलनों का बीजोप योग शून्य के समान होता है। यह महत्वपूर्ण है क्योंकि इससे हम X के परिकलन की विधि का विकास करने के योग्य हो जाएंगे जिससे बारबारता बटन से व्यवहार करते समय हमारा बहुत सा समय बच जाएगा। आइए हम पाँच मूल्यों 6, 8, 9, 11, 14 की एक श्रेणी पर विचार करें जिनमें से प्रत्येक केवल एक बार आता है

$$X = \frac{6 + 8 + 9 + 11 + 14}{5} = \frac{48}{5} = 9.6$$

आइए, अब हम समान्तर माध्य से प्रत्येक मूल्य के विचलन का परिकलन करें,

$x_1 = X_1 - \bar{X}$, $x_2 = X_2 - \bar{X}$, $x_3 = X_3 - \bar{X}$, इत्यादि। हमारे पास

X	x
6	-3.6
8	-1.6
9	-0.6
11	+1.4
14	+4.4

प्राप्त हैं। आप यह देखेंगे कि $\Sigma x = 0$, यह मूल्यों की किसी श्रेणी के लिए भी सदा सत्य है।¹

यदि हम किसी निर्दिष्ट मूल्य में जो समांतर माध्य नहीं है पाँच मदों के d विचलनों का परिकलन करें तो इन विचलनों का योग Σd शून्य के समान नहीं होगा। यदि निर्दिष्ट मूल्य समान्तर माध्य से कम है तो बहुत अधिक घनात्मक विचलन होंगे और विचलनों का योग शून्य से अधिक होगा। यदि निर्दिष्ट मूल्य समांतर माध्य से अधिक है तो बहुत अधिक ऋणात्मक विचलन होंगे और विचलनों का योग एक ऋणात्मक मात्रा होगी। क्योंकि पाँच (N) मदों में से प्रत्येक की एक निर्दिष्ट सराया से, जो उसी माध्य नहीं है, तुलना की गई है, तो विचलनों का योग उतनी मात्रा से शून्य के समान होने में असफल रहेगा जो उस मात्रा का ठीक पाँच (N) गुना है जिसमें निर्दिष्ट मूल्य वास्तविक समांतर माध्य से विचलित होता है। अतः इस निर्दिष्ट मूल्य से विचलनों का निर्धारण करने के लिए किसी मूल्य को कल्पित माध्य X_d के तौर पर निर्दिष्ट करना, तथा (बीजत) आवश्यक सशोधन $\frac{\Sigma d}{N}$ को जोड़ कर समांतर माध्य² प्राप्त करना मभव है। इस विधि का सारणी 9.1 में चित्रण है जहाँ X_d को 9 लिया गया है। यहाँ यह देखा गया है कि $\Sigma d = +3$ यदि हम इस अंक को N से भाग करें तो हम देखते हैं कि X_d , 0.6 से बहुत छोटा था। यह

$$\frac{\Sigma d}{N} = \frac{+3}{5} = 0.6$$

द्वारा प्राप्त होता है। यह कल्पित माध्य में जोड़ा जाने वाला सशोधन है, इस प्रकार,

$$X = X_d + \frac{\Sigma d}{N} = 9 + \frac{3}{5} = 9.6$$

जो मूल्यों को जोड़ कर तथा 5 से भाग करने पर परिकलित \bar{X} से ठीक मिलता है।

1. परिशिष्ट घ, परिच्छेद 9.1 देखिए। यदि $\Sigma x = 0$, तो यह स्पष्ट है कि $\frac{\Sigma x}{N} = 0$ ।

$\frac{\Sigma x}{N}$ को 'माध्य के विषय में प्रथम पूर्ण' या केवल 'प्रथम पूर्ण' कहते हैं। अबने अध्याय में हमें द्वितीय पूर्ण $\frac{\Sigma x^2}{N}$, या तृतीय पूर्ण केवल $\frac{\Sigma x^3}{N}$, तथा चतुर्थ पूर्ण $\frac{\Sigma x^4}{N}$ पर विचार करने का अवसर आया।

2. परिशिष्ट घ, परिच्छेद 9.2 देखिए।

सारणी 9.1

कल्पित माध्य, $\bar{X}_d = 9$, के प्रयोग से समांतर माध्य, \bar{X} , की गणना

X	d	$\Sigma d = +3$
6	-3	$\bar{X} = \bar{X}_d + \frac{\Sigma d}{N}$ $= 9 + \frac{3}{5} = 9.6$
8	-1	
9	0	
11	+2	
14	+5	
	$\frac{-}{+3}$	

पूर्ववर्णित उदाहरण में \bar{X}_d , \bar{X} से कम था। कल्पना कीजिए कि हम \bar{X}_d को 13 चुनते हैं। परिकलन सारणी 9.2 में दिखाए गए हैं।

सारणी 9.2

कल्पित माध्य, $\bar{X}_d = 13$, के प्रयोग में समांतर माध्य, \bar{X} की गणना,

X	d	$\Sigma d = -17$
6	-7	$\bar{X} = \bar{X}_d + \frac{\Sigma d}{N}$ $= 13 + \frac{-17}{5} = 9.6$
8	-5	
9	-4	
11	-2	
14	+1	
	$\frac{-}{-17}$	

इस स्थिति में, \bar{X}_d , \bar{X} से बड़ा था जैसा कि $\frac{\Sigma d}{N} = \frac{-17}{5} = -3.4$ द्वारा दिखाया गया है। पहले के समान, परिणाम है, $\bar{X} = 13 - 3.4 = 9.6$

समानर माध्य का एक दूसरा गुण, जिसका वाद में आने वाले विवरणों के संबंध में महत्व है, यह है कि वर्गीकृत विचलनों, Σx^2 , का योग, उस समय कम है जब विचलन \bar{X} के आसपास लिए जाते हैं अपेक्षाकृत उस समय के जब वे किसी अन्य मूल्य के आसपास लिए जाएँ। यह परिनिष्ठ घ, परिच्छेद 10.1 में प्रदर्शित है।

समूहित आँकड़ों से समांतर माध्य दीर्घ विधि—सारणी 9.3 में विद्यार्थियों के ग्रेडों बटन दिखाया गया है और श्रेणी के लिए \bar{X} का मूल्य सुनिश्चित करना वांछित है। बारबारता बटन पर विचार करते समय हमारे पास साधारणतः वे मौलिक आँकड़े नहीं होते जिनसे बारबारता बटन बना था। जब हमारे पास अवर्गीकृत आँकड़े हैं (जैसा कि सारणी 8.1 में है), तो हम मूल्यों को जोड़ कर और मर्दों की संख्या में भाग करके समांतर माध्य का मूल्य विन्कुल सही प्राप्त कर सकें हैं। हमारे पास जब केवल बारबारता बटन है तो हमारे लिए वर्गीकृत आँकड़ों से माध्य की गणना करना आवश्यक है। आइए, हम सारणी 9.3 के बारबारता बटन के लिए \bar{X} का परिकलन करें और तब अवर्गीकृत आँकड़ों में परिकलित समांतर माध्य के साथ अपने निष्कर्ष की तुलना करें।

बारबारता बटन से समांतर माध्य का परिकलन करते समय हम प्रत्येक वर्ग का मध्य मूल्य (जिसे कभी-कभी वर्ग बिन्दु कहा जाता है) उस वर्ग के प्रतिनिधि के तौर पर लेते

हैं, विभिन्न मध्य-मूल्यों को उनके अनुरूप बारबारताओं से गुणा करते हैं, इन गुणनफलों को जोड़ते हैं और मध्य की कुल संख्या से भाग करते हैं। सकारात्मक दृष्टि से, यदि X_1, X_2, X_3, \dots मध्य मूल्यों का और f_1, f_2, f_3, \dots बारबारताओं का प्रतिनिधित्व करते हैं, तब

$$\bar{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 + \dots}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{\sum fX}{N}$$

एक वर्ग का मध्य-मूल्य उस वर्ग की ऊपरी और निचली सीमाओं को जोड़कर तथा 2 से भाग करके प्राप्त किया जाता है। प्रत्येक बारबारता बटन के लिए हमें ध्यानपूर्वक विचार करना चाहिए कि वे सीमाएँ क्या हैं। सारणी 9.3 के बटन के लिए हम प्रथम वर्ग की सीमाएँ 75.0 और 77.0 ले सकते हैं जिससे मध्य-मूल्य 76.0 आता है। यदि प्रत्येक स्तर को अन्तिम पूर्ण दसवें भाग तक पूर्णांकित किया हो तो यह सही होगा, ताकि 75.0 में ठीक 75 से 75.099, तक के परिसर के मूल्य सम्मिलित हों, 76.1 में ठीक 76.1 से 76.199 तक के मूल्य आएँगे इत्यादि, बजाय निकटतम दसवें भाग तक पूर्णांकित

सारणी 9.3

रजसं स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उबार कला स्नातकों के ग्रेडों के लिए

व्यंजक $\bar{X} = \frac{\sum fX}{N}$ के प्रयोग द्वारा समान्तर माध्य की गणना

ग्रेड	विद्यार्थियों की संख्या f	वर्ग X का मध्य मूल्य	fX
75.0—76.9	3	75.95	227.85
77.0—78.9	23	77.95	1,792.85
79.0—80.9	52	79.95	4,157.40
81.0—82.9	61	81.95	4,998.95
83.0—84.9	74	83.95	6,212.30
85.0—86.9	61	85.95	5,242.95
87.0—88.9	53	87.95	4,661.35
89.0—90.9	35	89.95	3,148.25
91.0—92.9	23	91.95	2,114.85
93.0—94.9	15	93.95	1,409.25
95.0—96.9	7	95.95	671.65
97.0—98.9	2	97.95	195.90
योग	409	...	34,833.55

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{34,833.55}{409} = 85.17$$

किए जाने के जैसा कि वास्तव में किया गया। यदि पूर्णांकन अन्तिम पूर्ण दसवें भाग तक होता तो वर्ग को "75 तथा 77 से कम" नामांकित किया जाना चाहिए था। क्योंकि हम एक सतत चर पर विचार कर रहे हैं, ऐसे वर्ग की सीमाएँ 75 और 77 होनी और मध्य-मूल्य 76। विद्यार्थियों के ग्रेडों के लिए पूर्णांकन निकटतम दसवें भाग तक था और निम्नतम

मूल्य जो वर्ग "75 0—76 9" में आ सकता था 74 95 है जब कि उच्चतम मूल्य 76 9499.. है। इस प्रकार क्योंकि चर सतत है, वर्ग सीमाएँ 74 95 तथा 76 95 हैं और मध्य-मूल्य 75.95 है। मध्य-मूल्य इस विधि के अनुसार सागणी 93 में दर्ज किए गए हैं।

जब एक वर्ग को (उदाहरणार्थ) "32 00—33 99" नामांकित किया जाता है तो मध्य-मूल्य वारतव में 32 995 है। परन्तु बहुत से सांख्यिकी विद् मध्य मूल्य 33 00 बताएंगे क्योंकि सापेक्ष अमरगति छोटी है। बारवारता बटन के लिए मध्य-मूल्य निर्धारण करने में यह जानना महत्वपूर्ण है कि पाठ्यांक कैसे पूर्णांकित किए गए थे। जब बारवारता बटन के सबंध में पूर्णांकन के बारे में कोई सूचना नहीं दी गई तो संभवतः यह कल्पना करना सर्वोत्तम है कि अंको का, दो हुई निकटतम इकाई तक, पूर्णांकन किया गया था। उदाहरण के लिए, यदि एक-इंच वर्ग "12 0—12 9 इंच" लिखा गया है तो सीमाएँ 11 95 और 12 95 इंच समझिए, यदि एक पाँच-पाउंड वर्ग 10—14 पाउंड लिखा गया है तो सीमाएँ 9 5 और 14 5 पाउंड मानिए। परन्तु विविक्त आँकड़ों के लिए एक दो-डालर वर्ग "10 00 डालर—11 00 डालर" की सीमाएँ 10 00 डालर तथा 11 99 डालर हैं और एक दस-डालर वर्ग "70 डालर—79 डालर" की सीमाएँ 70 डालर और 79 डालर हैं यदि आँकड़े केवल पूर्ण डालरों में दिए जाएँ। एक वर्ग '5 पाउंड परन्तु 10 पाउंड से कम' नहीं लिखा जाना चाहिए जब तक कि हमारा बिल्कुल वही अर्थ न हो जो कि हम कहते हैं, प्रर्थात् इस वर्ग में भेद 5 पाउंड से नीचे नहीं गिरता और 10 पाउंड के बराबर नहीं होता। यदि विद्यार्थियों के ग्रेडों के वर्ग 75 0—77 0, 77 0—79 0, इत्यादि लिखे जाते और यदि एक वर्ग सीमा पर आने वाले मामलों के दो वर्गों के बीच बाँटा जाता, जैसा कि अध्याय 8 में नोट किया गया था, तो मध्य-मूल्य 76 0, 78 0 इत्यादि होंगे।

विद्यार्थियों के ग्रेडों के लिए मध्य-मूल्यों पर विचार करके, जैसा कि ऊपर विवरण दिया गया है, और व्यंजक $\bar{X} = \frac{\sum fX}{N}$, का प्रयोग करके, हम देखते हैं कि समांतर माध्य

85 17 है, जैसा कि सागणी 93 के नीचे दिखाया है। मारली 81 के अवर्गीकृत आँकड़ों से, भाइए, हम यह देखने के लिए कि अभी प्राप्त अंक उस मूल्य से कितना अधिक मिलता है। \bar{X} के मूल्य का परिकलन करें यदि हम सब अलग-अलग ग्रेडों का योग करें और 409 से भाग करें तो हमारे पास निम्नलिखित आ जाता है

$$\bar{X} = \frac{34,828.1}{409} = 85.15$$

\bar{X} के दो मूल्य घोड़े से भिन्न हैं। उनका समरूप होना असामान्य है परन्तु हम साधारणतया यह समझ सकते हैं कि अन्तर कुछ प्रतिशत से अधिक नहीं होगा। एक बारवारता बटन से परिकलित समांतर माध्य का मूल्य साधारणतया अवर्गीकृत आँकड़ों से लिए समांतर माध्य के साथ निकट से मिलता-जुलता होगा, यदि चर सतत है और बटन सममित है। यदि (1) बटन तिरछा है अथवा यदि (2) चर विविक्त (असतत) है (अथवा यदि आँकड़े टूटे हुए हैं) अथवा यदि दोनों (1) और (2) सत्य हैं तो अनुरूपता कम निकट होगी। इसी प्रकार, यदि आँकड़ों में अनियमितताएँ हैं क्योंकि बहुत ही छोटी प्रतिदर्श का प्रयोग किया गया था तो निकट की अनुरूपता की आशा नहीं की जा सकती।

जब भी \bar{X} के दो मूल्यों में अनुरूपता का अभाव विद्यमान है तो यह मध्य मूल्य परिकल्पनाओं की अपर्याप्तता के कारण है। यह लगभग सदा सत्य है कि मध्य-मूल्यों में से

कोई भी घास्तव ये अपने वर्गों का सही मकेन्द्रण बिन्दु नहीं है। अधिकतम बारवारता के समूह के बाईं ओर के समूहों के लिए, एक समूह का मध्य-मूल्य प्रायः उस समूह के माध्य से कम है, जब कि अधिकतम बारवारता के समूह के दाईं ओर के समूहों के लिए, एक समूह का मध्य-मूल्य प्रायः उस समूह के माध्य से बड़ा है। यद्यपि सभी मध्य-मूल्य परिकल्पनाएँ प्रायः अशुद्ध होती हैं, अशुद्धियों में एक-दूसरे को समाप्त करने की एक निश्चित प्रकृति होती है, यदि बटन लगभग, सममित है। उदार कला छात्रों के डेटों में आंकड़ों के लिए हमारे पास ये अवर्गीकृत आंकड़े हैं जिनसे बारवारता बटन बनाया गया था और हम प्रत्येक वर्ग के लिए समांतर माध्य का परिकलन कर सकते हैं और वर्गों माध्यों और वर्ग मध्य मूल्यों की तुलना कर सकते हैं। यह सारणी 9.4 में किया गया है जहाँ यह देखा जा सकता है कि प्रथम 5 वर्गों में से 3 के लिए प्रत्येक वर्ग का मध्य-मूल्य वर्ग माध्यों से कम है। परन्तु

सारणी 9.4

उदार कला छात्रों के डेटों के लिए वर्ग मध्य-मूल्यों की प्रत्येक वर्ग के समांतर माध्य से तुलना

ग्रेड	विद्यार्थियों की संख्या	प्रत्येक वर्ग में कुल ग्रेड (सारणी 8.4 से)	प्रत्येक वर्ग के लिए समांतर माध्य	प्रत्येक वर्ग का मध्य-मूल्य
75.0—76.9	3	230.3	76.77	75.95
77.0—78.9	23	1,799.9	78.26	77.95
79.0—80.9	52	4,158.2	79.97	79.95
81.0—82.9	61	4,994.1	81.87	81.95
83.0—84.9	74	6,204.5	83.84	83.95
85.0—86.9	61	5,243.3	85.96	85.95
87.0—88.9	53	4,657.2	87.87	87.95
89.0—90.9	35	3,150.0	90.00	89.95
91.0—92.9	23	2,113.1	91.87	91.95
93.0—94.9	15	1,409.4	93.96	93.95
95.0—96.9	7	672.3	96.04	95.95
97.0—98.9	2	195.8	97.90	97.95
योग	409	34,828.1	85.15	..

अन्तिम 6 वर्गों के लिए 3 मध्य-मूल्य अपने वर्ग माध्यों से अधिक हैं और तीन मध्य-मूल्य अपने वर्ग माध्यों से कम हैं।

समूहित आंकड़ों से समांतर माध्य लघु विधियाँ—सारणी 9.1 तथा 9.2 में यह दिखाया गया था कि समांतर माध्य के लिए हम एक मूल्य \bar{X} की परिकल्पना कर सकते थे और इस तथ्य का प्रयोग करके कि $\sum x = 0$, \bar{X} प्राप्त करने के लिए आवश्यक संशोधन का परिकलन कर सकते थे। इस विधि के द्वारा बारवारता बटन से माध्य का परिकलन करने में लगने वाला हमारा बहुत सा समय बच जाएगा। \bar{X} के लिए व्यञ्जक पहले के समान

हैं, सिवाय इसके कि विभिन्न वर्गों में बारबारताओं के कारण संकेत f का पुनः समावेश किया गया है। इस प्रकार

$$X = X_s + \frac{\sum fd}{N}$$

X_s के लिए चुना हुआ मूल्य किसी वर्ग का मध्य-मूल्य हो सकता है। सारणी 9.5 में \bar{X}_s को पंचम वर्ग के मध्य-मूल्य के तौर पर लिया गया है और सारणी के नीचे के परिकलनों से दिखाई देता है कि $\bar{X} = 85.17$ वही है जैसा कि सारणी 9.3 की लम्बी विधि से प्राप्त हुआ था।

सारणी 9.5

रुजर्स स्टेड यूनिवर्सिटी के 1965 के उबार कला स्नातकों के प्रेशों के लिए व्ययक

$$\bar{X} = X_s + \frac{\sum fd}{N}$$

का प्रयोग करके समान्तर माध्य की गणना

ग्रेड	विद्यार्थियों की संख्या f	d	fd
75.0—76.9	3	— 8	— 24
77.0—78.9	22	— 6	— 138
79.0—80.9	52	— 4	— 208
81.0—82.9	61	— 2	— 122
83.0—84.9	74	0	
85.0—86.9	61	+ 2	+ 122
87.0—88.9	53	+ 4	+ 212
89.0—90.9	35	+ 6	+ 210
91.0—92.9	23	+ 8	+ 184
93.0—94.9	15	+ 10	+ 150
95.0—96.9	7	+ 12	+ 84
97.0—98.9	2	+ 14	+ 28
योग	409	...	+ 498

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \bar{X}_s + \frac{\sum fd}{N} = 83.95 + \frac{498}{409}, \\ &= 83.95 + 1.218, \\ &= 85.17.\end{aligned}$$

हम यह देखेंगे कि सारणी 9.5 के सब वर्ग एक समान विस्तार वाले हैं। जब यह मध्य है तो \bar{X}_s से अपने विचलन वर्ग अन्तरालों, d , के रूप में लेकर हम Δ के अपने परि-

कलन को और भी छोटा कर सकते हैं। यह एक ऐसी विधि है जिसे कभी-कभी "सक्वेटीकरण" कहते हैं। हमारा सशोधन $\frac{\sum fd'}{N}$ तब वर्ग-अन्तरालों के रूप में होगा और इसका X_d के साथ बीजीय जोड़ करने से पूर्व इसे वर्ग-अन्तराल में गुणा करना आवश्यक है। तब समान्तर माध्य के लिए,

$$\bar{X} = X_d + \left(\frac{\sum fd'}{N} \right) i$$

इस व्यंजक से \bar{X} का सकलन सारणी 9.6 में दिखाया गया है और इसका वही परिणाम है जो कि सारणी 9.3 और 9.5 में दिया गया है। जब बारबारता बटन समान वर्ग-अन्तरालों में बना हुआ है तो इस विधि का सर्वश्रेष्ठ प्रयोग करना चाहिए। बारबारता बटन में जिनमें अधिक वर्गों को और जितनी अधिक मदों का समावेश हुआ है उतना ही अधिक समय इस विधि से बच जाता है।

असमान वर्ग-अन्तरालों वाले समूहित आँकड़ों से समान्तर माध्यम — असमान वर्ग-अन्तरालों वाले बारबारता बटन के लिए सारणी 9.6 में दिखाई गई विधि से \bar{X} का परिकलन अनुपयुक्त होगा क्योंकि हमने d' के आंशिक मूल्य पाएँगे। उचित प्रविधि यह है जो सारणी 9.3 में दिखाई गई है या सारणी 9.5 में है। जब वर्गों के विस्तार में भिन्नता है तो बटन निरपवाद रूप में तिरछा है और हमें स्मरण रखना आवश्यक है कि जैसे तिरछापन बढ़ता है हमारी मध्य-मूल्य परिकल्पनाएँ एक दूसरी को कम निकटता से प्रतिबिम्बित करती हैं। इस प्रकार असमान वर्ग-अन्तरालों वाले बारबारता बटन से परिकलित माध्य अवगति आँकड़ों से परिकलित माध्य से काफी भिन्न हो सकता है, साथ ही, जैसा कि इस अध्याय के अन्त में विवेचन किया जाएगा, निश्चित तौर पर तिरछे बटन के समान्तर माध्य की सीमित उपयोगिता है। जब सारणी 8.5 वाले के समान एक बारबारता बटन की एक मिरे पर (अथवा, वदा-कदा दोनों सिरो पर) अपरिमित विस्तार वाला वर्ग है तो उस मूल्य का कोई संकेत नहीं है जो वर्ग के प्रतिनिधि के तौर पर चुना जाना चाहिए। यदि यह कल्पना की जाती है कि अपरिमित वर्ग का वही विस्तार है जो कि इसमें पहले का है तो मध्य-मूल्य प्रायः बहुत कम होगा। ऐसे मध्य-मूल्य के प्रयोग का, पूर्व के मध्य-मूल्यों के ऊपर की ओर के झुकाव को प्रतिबिम्बित करने में परिणाम हो सकता है परन्तु हम कभी-कभी असंदिग्ध नहीं हो सकते कि कितना, प्रतिबिम्बित होता है या कि झुकाव ही प्रतिबिम्बित नहीं हो जाता। एक वर्ग अपरिचित क्यों छोड़ा जाता है इसका कारण प्रायः यह है, क्योंकि इसमें कुछ मर्द विस्तृत क्षेत्र पर बिखरे मूल्यों वाली हैं।

इस बात पर बल देना चाहिए कि असमान वर्ग-अन्तरालों वाले एक तिरछे बटन के लिए परिकलित समान्तर माध्य का मूल्य केवल एक पर्याप्त अच्छा सन्निकटन है। जब एक या दो अपरिचित वर्ग विद्यमान हैं तो यह और भी कम यथार्थ हो जाता है। इस प्रकार के बटन के लिए माध्यम के परिकलन में आने वाली कठिनाई पूर्ण रूप से मुलमल जाती है यदि सारणी के साथ अवगति आँकड़ों को जोड़ देने वाली एक पाद टिप्पणी जोड़ दी जाए। यदि इस विधि का अनुकरण किया जाए तो समान्तर माध्य का मूल्य देने के लिए एक अकेला भाग पर्याप्त है।

समान्तर माध्य के संशोधित रूप—एक श्रेणी की सब मद्दों के लिए समान्तर माध्य का परिकलन करने की बजाय कभी-कभी सबसे छोटे और सबसे बड़े प्रको की प्रोसत लेकर अनुमान करना पर्याप्त हो सकता है। इस प्रकार की विधि का परिणाम समान्तर माध्य से अधिक भिन्न नहीं होगा यदि हम एक ऐसे सतत चर (या एक विविकत चर, जिसमें अन्तराल नहीं है) में व्यवहार कर रहे हैं जिसका बटन सममित या लगभग सममित है। उदाहरणार्थ, मीनम वैज्ञानिकों ने पता लगाया है कि तापमान की दैनिक प्रोसत निकालने के लिए दिनभर घण्टे-घण्टे के बाद तापमान लेना और इन 24 पाठ्यांक की प्रोसत निकालना साधारणतः आवश्यक नहीं है। साधारणतया केवल अधिकतम और

सारणी 9.6

हजर्स स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उबार कला स्नातकों के प्रेशों के लिए ध्वंजक के प्रयोग द्वारा समान्तर माध्य की समराना

$$\bar{X} = \bar{X}_d + \frac{\sum fd'}{N}$$

ग्रेड	विद्यार्थियों की संख्या f	d'	fd'
75.0—76.9	3	—4	—12
77.0—78.9	23	—3	—69
79.0—80.9	52	—2	—104
81.0—82.9	61	—1	—61
83.0—84.9	74	0	
85.0—86.9	61	+1	+61
87.0—88.9	53	+2	+106
89.0—90.9	35	+3	+105
91.0—92.9	23	+4	+92
93.0—94.9	15	+5	+75
95.0—96.9	7	+6	+42
97.0—98.9	2	+7	+14
योग	409 +249

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \bar{X}_d + \frac{\sum fd'}{N} = 83.95 + \frac{249}{409} \cdot 2, \\ &= 83.95 + 1.218, \\ &= 85.17.\end{aligned}$$

न्यूनतम तापमानों की प्रोसत निकालना पर्याप्त होता है। ये दो पाठ्यांक ग्राफ पर दिखाए ऊँचे और नीचे बिन्दुओं में जो दर्ज करने वाले तापमापी से अनुरक्षित किए गए, प्राप्त किए जा सकते हैं अथवा ये उस तापमापी से प्राप्त किए जा सकते हैं जो स्वयमेव अधिकतम एवं न्यूनतम तापमान दर्ज कर लेता है।

आपको स्मरण होगा कि विद्यार्थियों के ग्रेडों के आंकड़े दाईं ओर को तिरछे हैं। परिणामस्वरूप हमें आशा करनी चाहिए कि निम्नतम और उच्चतम ग्रेडों की औसत सभी ग्रेडों से सर्वांगत समान्तर माध्य से अधिक होगी। आइए, हम इन दो चरम सीमा वाले मूल्यों की औसत निर्धारित करें और देखें कि यह \bar{X} से कितना भिन्न है। सारणी 8.2 में दिखाया गया उच्चतम दर्जा 98.3 है जबकि निम्नतम दर्जा 76.5 है। इन दो दर्जों की औसत 87.40 है। अवर्गीकृत आंकड़ों से सकलित \bar{X} का मूल्य 85.15 मालूम हुआ था। यद्यपि चरम सीमा वाले अंकों की औसत निकालने से उत्पन्न होने वाली असमिति केवल 2.25 अथवा 2.6 प्रतिशत है हमें इस विधि का \bar{X} के सम्मिकटन के तौर पर प्रयोग नहीं करना चाहिए जब तक कि बटन सममित या लगभग सममित न हो।

समान्तर माध्य का दूसरा सशोधन वह है जिसकी ओर मौसमी गतियों के माप के मध्य में पुनः संकेत किया जाएगा (अध्याय 14)। यह सशोधन आवश्यक तौर पर या तो इस आधार पर कुछ मदों की उपेक्षा करता है कि वे असामान्य चरम सीमा वाले मूल्य हैं जो सम्भवतः इस स्थिति में असम या अनुपस्थित कारक के साने का परिणाम हैं, अथवा एक सारणी के उच्चतम या निम्नतम मूल्यों में से एक या अधिक को छोड़ देना है ताकि केवल अधिक प्रतिरूपी मूल्यों की औसत निकाली जाए।

कल्पना कीजिए कि धावक ने एक मौसम में 100 गज की दस दौड़ प्रतिभागिताओं में भाग लिया और उसने निम्न समय लिए

10.2, 10.1, 10.0, 10.0, 10.1, 10.0, 9.9, 10.1, 11.4, 10.2 सेकंड

अब इन दस अंकों का समान्तर माध्य 10.2 सेकंड है, यद्यपि केवल तीन दौड़ें ही इतनी धीमी या इतना मन्द गति में दौड़ी गई थी। ऊपर नौवें अंक द्वारा दिखाई गई दौड़ में धावक को कौल लग गई थी और उसने सब से अन्त में लयदाते हुए दौड़ समाप्त की। अंक 11.4 में उसकी दौड़ की योग्यता का संकेत नहीं मिलता और इसे इस धावक की योग्यता का प्रतीक औसत समय निकालने के लिए पूर्ण तर्कसंगत ढंग से छोड़ा जा सकता था। यदि हम अन्य नौ अंकों की औसत निकालें तो हमें सामान्य दौड़ की स्थितियों में इस धावक के लिए समान्तर माध्य के तौर पर 10.07 सेकंड प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार यदि एक दौड़, धावक ने पीछे की तेज हवा के साथ दौड़ी होनी तो 100 गज के लिए उसका समय असामान्य ढंग से कम होगा और वह अंक भी छोड़ा जा सकता है।³ सभी सभी वंशित विधि मौसमी गतियों को मापने में अनुकूल विधि से इस दृष्टि से भिन्न है कि केवल वे विशिष्ट मूल्य जिनके लिए निश्चित तौर पर कोई विशिष्ट कारण दिया जा सकता था छोड़े गए हैं। मौसमी गतियों को मापने समय हम एक सारणी के दोनों सिरों पर एक, दो या अधिक मदों को छाड़ देंगे ताकि उन मदों की औसत निकाली जाए जो किसी केन्द्रीय मूल्य के इर्द गिर्द जमा प्रतीत होती हैं।

प्रतिशतताओं की औसतें निकालना—अध्याय 7 में यह संकेत किया गया था कि भिन्न मूल्याओं पर आधारित प्रतिशतताओं की एक श्रेणी की औसत साधारणतया प्रत्येक प्रतिशतता पर इसके आधार के अनुपात में भार डालकर निकालनी चाहिए। परन्तु

3 समय-अध्ययनों के संबंध में प्रयुक्त सशोधन माध्य का इस प्रकार का विवरण एक० ई० ब्रॉक्सटन और डी० ज० काउडन के प्रैक्टिकल बिजनेस स्टैटिस्टिक्स, प्रथम संस्करण, ग्रेंटिस हाल, एन्गोर्पिटिड, एंगलवुड क्लिफ्स, एन० ज०, 1960, पृष्ठ 458—463 में दिया गया है।

ऐसी भी स्थितियाँ हैं जिनमें हम भिन्न आधारों की उपेक्षा करने और कई प्रतिशतताओं की, भारों की एक भिन्न पद्धति का प्रयोग करके, औसत निकालने के इच्छुक हो सकते हैं। उदाहरणार्थ, हम कल्पना करे कि एक विद्यार्थी ने दो विस्तृत परीक्षाएँ दी हैं जिनमें से प्रत्येक में एक कोर्स की विषय-सामग्री का आधार आता है। कल्पना कीजिए कि प्रथम परीक्षा में 100 "सत्य-भूठ" प्रश्न सम्मिलित थे जिनमें से उसने 82 प्रतिशत किए, जबकि द्वितीय में 150 ऐसे प्रश्न थे जिनमें से उसने 88 प्रतिशत किए। क्योंकि प्रत्येक प्रतिशतता एक उपसत्र के आधे काम को सम्पन्न करने के स्तर की प्रतिनिधि है, उस उपसत्र के लिए विद्यार्थी के काम के अधिक अच्छे बलुन में दोनों प्रतिशतताओं को समान भार दिया जाएगा जिसके परिणामस्वरूप औसत

$$\frac{82 + 88}{2} = 85$$

प्राप्त होगा। बजाय इसके कि पूछे गए प्रश्नों की संख्या के अनुसार प्रतिशतताओं को भार दिया जाए जिससे

$$\frac{(100 \times 82) + (150 \times 88)}{250} = 85.6$$

प्राप्त हो। यदि द्वितीय परीक्षा 10 'निबन्ध' के प्रश्नों पर आधारित होती तो यह और भी स्पष्ट है कि भार डालने का निर्धारण सम्मिलित प्रश्नों की संख्या से नहीं होना चाहिए।

औसतों की औसत निकालना—औसतों की औसत निकालने की समस्या की सामान्य रूपरेखाएँ वही हैं जो कि प्रतिशतताओं की औसत निकालने में आती हैं। यदि हमारे पास कई औसत हैं और प्रत्येक का एक कोटि की ओर सकेत है और हम एक ऐसे विवरण पर पहुँचने के लिए जाँ इन कोटियों से बने जोड़ के सगत हैं इन औसतों की औसत निकालना चाहते हैं तो प्रत्येक औसत को इसकी कोटि के महत्त्व के अनुसार और भार देना आवश्यक है। उदाहरण के लिए, यदि 7 फुटबाल साइनमेंटों का औसत भार 210 पाउंड हो और 4 पीछे खेलने वाली का औसत भार 186 पाउंड हो, तो हम दोनों माध्यों को जोड़ कर 2 से भाग दे सकते हैं, जिसका परिणाम 198 पाउंड होगा। परन्तु वह ग्यारह खिलाड़ियों के भारों का सही समान्तर माध्य नहीं है। हम नहीं अक इस प्रकार प्राप्त करते हैं

$$\frac{(7 \times 210) + (4 \times 186)}{11} = \frac{2,214}{11} = 201 \text{ पाउंड।}$$

यदि हम ग्यारह खिलाड़ियों के अलग अलग भारों का योग करें और ग्यारह से भाग करें, तो हमें यही अक प्राप्त होगा।

प्रतिशतताओं के समान ही कुछ उदाहरण हो सकते हैं जिनमें प्रत्येक कोटि का महत्त्व कोटि में सम्मिलित मदों की संख्या के अतिरिक्त किसी अन्य कारक पर निर्भर है। कल्पना कीजिए कि 12 टायर, ड्राइवर को अपवादित कर, खाली परीक्षार्थ ट्रकों के एक समूह में लगाकर दौड़ाए गए और उन्होंने 13,618 मील औसत दूरी निकाली। कल्पना कीजिए कि 20 ऐसे ही टायर ऐसे ही परीक्षार्थ ट्रकों के एक समूह में प्रयोग किए गए जिनमें प्रत्येक में ड्राइवर और 2,000 पाउंड भार सदा है और उन्होंने 12,136 मील औसत दूरी निकाली। भारित औसत दूरी होगी

$$\frac{(12 \times 13,618) + (20 \times 12,136)}{32} = 12,692 \text{ मील।}$$

हमने पहले की अपेक्षा द्वितीय औसत को $\frac{39}{24}=1.67$ गुना भार दिया है। वास्तव में, ट्रक कभी-कभी खाली चलते हैं, कभी-कभी भरे हुए, कभी-कभी आंशिक तौर पर लदे हुए और कभी-कभी अति लदे हुए। यदि हमारे उदाहरण में ट्रक अपनी दूरी का $\frac{1}{2}$ भाग खाली चलते हैं और अपनी दूरी का $\frac{1}{2}$ भाग लदे हुए तो हमें अपनी औसत पर

$$\frac{(1 \times 13,618) + (4 \times 12,136)}{5} = 12,432 \text{ मील}$$

द्वारा पहुँचना चाहिए। भार डालने में परीक्षित टायरों की सस्या की अपेक्षा ट्रक के प्रयोग में विभिन्न भार स्थितियों के महत्त्व पर विचार किया जाना चाहिए।

माध्यिका

असमूहिन आँकड़ों से माध्यिका—माध्यिका की परिभाषा प्रायः उस मूल्य के तौर पर दी जाती है जो एक बटन को इस प्रकार भाग करता है कि इसके दोनों ओर समान सस्या में मदे होती हैं। यदि हमारे पास पाँच मदे, 5 डालर, 11 डालर, 7 डालर, 11 डालर, 10 डालर हैं तो यह स्पष्ट है कि माध्यिका का मूल्य 7 डालर है क्योंकि दो मदे उस मूल्य से नीचे और दो मदे इसके ऊपर हैं। यदि हमारे पास छ मदे, 2 इंच, 5 इंच, 6 इंच, 7 इंच, 9 इंच, 12 इंच हैं तो यह स्पष्ट है कि 6 इंच से बड़ा और 7 इंच से छोटा कोई मूल्य हमारी परिभाषा पर पूरा उतरेगा। व्यावहारिक तौर पर, जब मदों की सस्या सम होती है, तो हम प्रायः माध्यिका का मूल्य दो केन्द्रीय मदों के बीच का आधा लेते हैं। इस उदाहरण में माध्यिका 6.5 इंच होगी।

यदि हमारा सम्बन्ध मूल्यों की एक ऐसी श्रेणी जैसे 12, 13, 14, 15, 15, 17, तथा 18 पाउंड से हो तो ऐसा कोई मूल्य नहीं है जिसकी स्थिति ऐसी हो कि तीन मदे इससे छोटी हों और तीन मदे इससे बड़ी हों। तो भी हम 15 पाउंड को माध्यिका कहेंगे। यह स्पष्ट होना चाहिए कि पहले की गई परिभाषा इस प्रकार की स्थितियों पर लागू नहीं होगी। अतः परिभाषा पुनः इस प्रकार ढाली जाती है माध्यिका वह मूल्य है जो एक श्रेणी को इस प्रकार भाग करता है कि आधी या अधिक मदे इसके बराबर या इससे कम हों और आधी या अधिक मदे इसके समान या इससे बड़ी हों।

जो अभी तक कहा जा चुका है उससे यह स्पष्ट है कि माध्यिका को तुरन्त ढूँढ़ा नहीं जा सकता जब तक कि आँकड़े एक सारणी में, अथवा, जैसा हम थोड़ी देर में देखेंगे, एक बारवारता बटन में नहीं रखे जा सकते। आपकी स्मरण होना कि माध्यिका के सकलन के लिए कोई व्यवस्था आवश्यक नहीं है। क्योंकि एक श्रेणी की मदों का योग किया जा सकता है फिर चाहे उनका क्रम कुछ भी क्यों न हो।

एवं श्रेणियों की माध्यिका का मूल्य एक वर्तमान मदे के मूल्य से मिल भी सकता है, नहीं भी। जब एक सारणी में मदों की सस्या विषम हो तो माध्यिका का मूल्य मदों में से एक के समान होता है, जब एक सारणी में मदों की सस्या सम है तो यह नहीं मिलता।

माध्यिका का एक महत्वपूर्ण गुण जिसकी ओर पुनः संकेत किया जाएगा यह है कि इस पर सारणी की मदों की स्थिति का प्रभाव पड़ता है परन्तु मदों के आकार का नहीं। यह पहले ही कहा जा चुका है कि 5 डालर, 6 डालर, 7 डालर, 8 डालर, 10 डालर की माध्यिका 7 डालर है। दो बड़ी मदों के, 7 डालर से अधिक कोई भी मूल्य हो सकते हैं

और दो छोटी मदों के 7 डालर से कम कोई भी मूल्य हो सकते हैं, तो भी माध्यिका 7 डालर रहती है।

वर्गित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सकलन पर विचार प्रारम्भ करने से पूर्व, ध्यान दें, हम सारणी 8.2 में क्रमबद्ध 409 उदार कला छात्रों के ग्रेडों के लिए माध्यिका के मूल्य का सकलन करेंगे। हम वह मूल्य मानूँगे कि जिसकी स्थिति ऐसी हो कि इसके किसी भी ओर 204 मदें होंगी। निस्सन्देह यह 205वीं मद का मूल्य है और किसी भी सिरे से गिनने पर पता चलता है कि माध्यिका का मूल्य 84.6 है। यदि हमारे पास 200 मदों की सारणी हो तो हमें वह मूल्य मानूँगे कि जिसकी स्थिति ऐसी हो कि इसके किसी भी ओर 100 मदें होंगी और 100 इसके ऊपर होंगी। स्पष्ट ही यह सरणी के किसी भी सिरे से गिने जाने पर 100वीं और 101वीं मदों का माध्य है।

समूहित आँकड़ों से माध्यिका—एक बार-बार-आने वाला बटन की माध्यिका का मूल्य निर्धारित करने के लिए हम बटन के किसी भी सिरे से धीरे-धीरे बार-बार-आने वाले गिनते हैं, ताकि वह मूल्य सुनिश्चित हो सके जिसके किसी भी ओर आधी बार-बार-आने वाली है। विद्यार्थियों के (सारणी 9.6) ग्रेडों के लिए माध्यिका का मूल्य निर्धारित करने के लिए हम पहले $\frac{N}{2} = 204.5$ का सकलन करते हैं। तब हम माध्यिका का मूल्य सुनिश्चित करते हैं। बटन की पहली चार कक्षाओं में 139 बार-बार-आने वाले का समावेश है। अतः माध्यिका का अनुमानित मूल्य पंचम वर्ग में 65.5 बार-बार-आने वाले (204.5—139) का अन्तर्वेशन करके प्राप्त किया जाता है, इस कल्पना के आधार पर कि उस वर्ग में बार-बार-आने वाले उस वर्ग के भीतर समान रूप से बँटे हैं। तब माध्यिका व्यंजक

$$\text{Med} = 82.95 + \frac{65.5}{74} \cdot 2 = 82.95 + 1.77 = 84.72$$

से प्राप्त होता है। यदि हम बटन के दूसरे सिरे से अपने सकलन प्रारम्भ करें तो ठीक यही निष्कर्ष प्राप्त होता है। अन्तिम मात वर्ग में 196 बार-बार-आने वाले का समावेश है और हम, ऊपरी सीमा से निचली सीमा की ओर पंचम वर्ग में 8.5 बार-बार-आने वाले (204.5—196) का अन्तर्वेशन करने वाले हैं। परिणाम है

$$\text{Med} = 84.95 - \frac{8.5}{74} \cdot 2 = 84.95 - 0.23 = 84.72$$

हाँ, माध्यिका का मूल्य वही है, चाहे हम अपने सकलन एक सिरे से प्रारम्भ करें या दूसरे सिरे से।

4. अवर्गित आँकड़ों के लिए सारणी में उच्चतम (या न्यूनतम) मद से प्रारम्भ करके $\frac{N+1}{2}$ मदों की गिनती करने से माध्यिका का मूल्य मानूँगे कि जिसकी स्थिति ऐसी हो कि इसके किसी भी ओर 204 मदें होंगी। निस्सन्देह यह 205वीं मद का मूल्य है और किसी भी सिरे से गिनने पर पता चलता है कि माध्यिका का मूल्य 84.6 है। यदि हमारे पास 200 मदों की सारणी हो तो हमें वह मूल्य मानूँगे कि जिसकी स्थिति ऐसी हो कि इसके किसी भी ओर 100 मदें होंगी और 100 इसके ऊपर होंगी। स्पष्ट ही यह सरणी के किसी भी सिरे से गिने जाने पर 100वीं और 101वीं मदों का माध्य है।

वारवारता बटन से अभी-अभी प्राप्त माध्यिका का मूल्य 84.72 सरणी से प्राप्त 84.6 से बहुत निकट से समरूप है। जब तक कि आँकड़ों में अन्तराल या अनियमितताएँ न हों, हम सतत चर पर विचार करने समय सन्निकट समता की ही आशा कर सकते हैं, और इसी प्रकार निवृत्त चर के लिए भी, यदि आँकड़े टूटे हुए नहीं हैं।

अब हमने विद्यार्थियों के ग्रेडों के वारवारता बटन के लिए समान्तर माध्य और माध्यिका के मूल्यों का सकलन कर लिया है। माध्य 85.17 था। माध्यिका 84.72 थी। माध्य माध्यिका से इसलिए बड़ा है क्योंकि बटन दाईं ओर को तिरछा है। यदि बटन ठीक सममित हो तो माध्य और माध्यिका समरूप होते हैं। यदि बटन दाईं ओर को तिरछा है तो माध्य माध्यिका से कम होगा। इस बिन्दु पर अधिक विस्तार से इस अध्याय के अन्त में और आगे अध्याय में प्रकाश डाला जाएगा। अध्याय 10 में हम देखेंगे कि तिरछापन के मापने के एक तरीके में माध्य और माध्यिका के मूल्यों का विचार करना होता है।

अप्रमान वर्ग-अन्तरालों के वारवारता बटन से माध्यिका का परिकलन अभी-अभी वर्णित परिकलन से भिन्न नहीं है और न किसी एक या दोनों सिरों पर अनिर्धारित समूहों की उपस्थिति से प्रविधि जटिल बनती है।

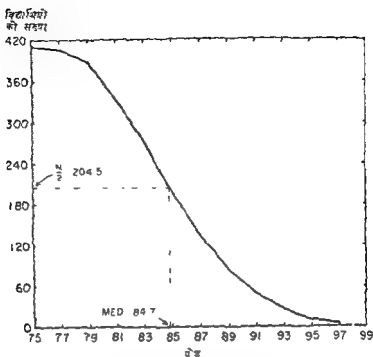
यदि बटन के एक तोरण का आनेखन किया जाए तो माध्यिका का मूल्य लेखाचित्र से प्राप्त करना संभव है, जैसा कि चार्ट 9.1 में दिखाया गया है। यह विधि पहले ही किए गए परिकलनों का लेखाचित्र रूप है और हमने निम्न पग आते हैं। (1) $\frac{N}{2}$ का परिकलन कीजिए और इस बिन्दु को ऊर्ध्वाधर पैमाने पर खोजिए। (2) 4-प्रक्ष पर इस बिन्दु पर लम्ब खींचिए और लम्ब को तोरण को काटते हुए बढ़ाइए। (3) प्रतिच्छेद बिन्दु पर, X-प्रक्ष पर एक लम्ब डालिए। प्रतिच्छेद माध्यिका का मूल्य बताता है। चार्ट 9.1 से यह देखा गया है कि विद्यार्थियों के ग्रेडों के लिए, लेखाचित्र द्वारा दिखाया हुआ माध्यिका का मूल्य 84.7 है जो, अकगणितीय ढंग से परिकलित मूल्य के पर्याप्त निकट है।

चतुर्थक, पचमक, दशमक, तथा शततमक—माध्यिका अपनी बीच की स्थिति के कारण मूल्यों की एक श्रेणी का स्वरूप दिखाती है। वारवारता बटन के कई अन्य माप हैं जो अनग-अनग तोर पर तो केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप नहीं हैं परन्तु, जैसा हम बाद में देखेंगे, जिनका प्रसार और निरुद्धान मापने में सहायता के लिए प्रयोग किया जा सकता है। परन्तु वे इस दृष्टि में माध्यिका से सम्बद्ध हैं कि वे श्रेणी में अपनी स्थिति पर आधारित हैं। अतः हम यहाँ चतुर्थको, पचमको, दशमको और शततमको का विवरण देने के लिए विषयान्तर करेंगे।

चतुर्थक तीन है, Q_1 , Q_2 तथा Q_3 , जो बटन को चार बराबर भागों में बाँटते हैं। हाँ, Q_2 , माध्यिका है और प्रायः इसी प्रकार अभिहित किया जाता है। कैंडेंट-मिडशिपमैन के ग्रेडों के आँकड़ों के लिए, पहले या निचले चतुर्थक Q_1 का मूल्य निर्धारित करने के लिए हम प्रथम वर्ग की निचली सीमा से $\frac{N}{4} = \frac{409}{4} = 102.25$ वारवारताओं को गिनते हैं।

इस प्रकार हमारे पास Q_1 का मूल्य है

$$Q_1 = 80.95 + \frac{24.25}{61} = 81.75$$



चार्ट 9.1 रजर्स स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उदार कला स्नातको के रजों के लिए माध्यिका की लेखाचित्रीय खोज । बाँके सारणी 9.6 से ।

यही परिणाम अन्तिम वर्ग की ऊपरी सीमा से $\frac{3N}{4}$ को गिनकर प्राप्त किया जा सकता है।

तृतीय चतुर्थक Q_3 का मूल्य प्रथम वर्ग की निचली सीमा से $\frac{3N}{4}$ को गिनकर परिकलित किया जा सकता है यद्यपि, अधिक क्षिप्रता से, अन्तिम वर्ग की ऊपरी सीमा से $\frac{N}{4}$ को गिनकर । क्योंकि $\frac{N}{4} = 102.25$, और क्योंकि अन्तिम पाँच वर्गों में 82 बारवराताएँ हैं तो हमारे पास आता है ।

$$Q_3 = 88.95 - \frac{20.25}{53} \cdot 2 = 88.19$$

चार पंचमक है जो बटन की पाँच बराबर भागों में बाँटते , नौ दशमक है जो बटन को दस बराबर भागों में बाँटते हैं, और निम्नान्वये शततमक है जो बटन को 100 बराबर भागों में बाँटते हैं । इन मूल्यों के परिकलन करने की विधि माध्यिका और चतुर्थकों की विधि जैसी है । उदाहरणार्थ, हम तृतीय दशमक के मूल्य का परिकलन करेंगे जो 30वाँ शततमक भी है । हम $\frac{3N}{10} = \frac{1,227}{10} = 122.7$ को प्रथम वर्ग की निचली सीमा से गिनते हैं और अन्तर्वेशन करते हैं । क्योंकि पहले तीन वर्गों में 78 बारवराताएँ हैं तो हमारे पास

$$80.95 + \frac{44.7}{61} \cdot 2 = 82.42$$

उब तक कि एक बटन बहुत विम्बुन न हो, बहुत अधिक शून्यमकों का परिकलन करने से कोई प्रयोग न सिद्ध नहीं होगा। उनमें न केवल कुछ एक का बहुलता स प्रयोग किया जाना है, जैसे 99वाँ, 98वाँ, 95वाँ, 90वाँ, 85वाँ, 80वाँ, इत्यादि।

कभी-कभी चतुर्थक, पंचमक, दशमक, तथा शून्यमक मंदा वा एक अलग अर्थ में, बटन के उन भाग की ओर जिनमें मद आती है, संकेत करने के लिए, प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार, यदि एक विद्यार्थी को अपनी कक्षा के ऊपरी चतुर्थक में कहा जाना है तो वह ऊपरी 25 प्रतिशत में है। यदि वह अपनी कक्षा के ऊपरी दशमक में है तो वह ऊपर के 10 प्रतिशत में है। निम्नलिखित हमने स्पष्ट अभिव्यक्ति होगी यदि हम चतुर्थको, पंचमको, दशमको, और शून्यमको को इस अनुभाग के प्रारम्भ में विवेचन मापों के अर्थ के लिए सुरक्षित रखें। एक बटन के उस भाग की ओर, जिनमें एक विद्यार्थी आता है, संकेत करने के लिए हम कह सकते हैं "उच्चतम चतुर्थांश" (Q_3 से अधिक), "द्वितीय उच्चतम चतुर्थांश" (Q_3 और Q_2 के बीच), "तृतीय उच्चतम चतुर्थांश" (Q_2 और Q_1 के बीच), तथा "निम्नतम चतुर्थांश" (Q_1 से कम)। इसी प्रकार हम पंचमकों के स्थान पर "पंचम", दशमकों की बजाय "दशम" और शून्यमकों की बजाय "सीरो" कह सकते हैं।

बहुलक

समूहित आँकड़ों से बहुलक—एक बटन का बहुलक उन बिन्दु पर वह मूल्य है जिसके इर्द-गिर्द मंदा की प्रवृत्ति सर्वाधिक केन्द्रित होने की है। इसे मूल्यों की एक श्रेणी का सर्वाधिक प्रवृत्ति माना जा सकता है। इसी कारण न यह स्पष्ट है कि एक या कुछ बटन ऊँचे (या नीचे) मूल्यों के होने से बहुलक पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।⁵ यदि आँकड़ों की एक श्रेणी अवर्गीकृत है, जिसका न तो समीकरण हुआ है और जिसे न बार-बार बटन म रखा गया है तो बहुलक का निर्णय पना नहीं चल सकता।

पहले एक बटन ही मरल उदाहरण लीजिए। यदि मान व्यक्ति 35 डालर, 42 डालर, 49 डालर, 49 डालर, 49 डालर, 56 डालर, 70 डालर, दैनिक आय प्राप्त कर रहा है तो यह स्पष्ट है कि बहुलकीय आय 49 डालर प्रति दिन है। यदि हमारे पास मूल्यों की एक ऐसी श्रेणी है जैसे

$$21, 35, 42, 49, 63, 70, 77$$

तो यह स्पष्ट है कि बहुलक नहीं है।

समूहित आँकड़ों से बहुलक—यदि हम सारणी 8.2 में दिखाई गई विद्यार्थियों के प्रश्नों की मारपी की परीक्षा करें तो हमें पता चलता है कि वह मूल्य निर्धारित करना

5 यह बहुलक का निर्धारण की सामान्य विधि के सम्बन्ध में जिसका यहाँ वर्णन किया गया है सत्य है। यदि बहुलक की ध्वज

$$\text{बहुलक} = \lambda - s \frac{\sqrt{\beta_1} (\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$

से, या एक स्वतंत्र वक्र के शिखर के ठीक नीचे λ मूल्य के निर्धारण से निर्धारित किया जाता है ता चरम सीमा के मूल्यों का कुछ छोटा सा प्रभाव होता है। s , β_1 , तथा β_2 का परिचयन का विवरण अगले अध्याय में दिया गया है।

बहुल कठिन होगा जिसके इर्द-बिर्द मदों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति है। एक बारवारता घटन जैसे सारणी 9.6 की ओर मकेल करके तुरन्त बहुलक का स्थान निर्धारण किया जा सकता है। यहाँ यह स्पष्ट है कि बहुलकीय वर्ग 83.0—84.9 है, और यदि हम वर्ग के प्रतिनिधि के तौर पर मध्य-मूल्य लें तो हमें 83.95 को बहुलक कहना चाहिए।

प्रायः मध्य-मूल्य बहुलक का सर्वोत्तम अनुमान नहीं है, क्योंकि बहुलकीय वर्ग से पहले के और बाद के वर्गों में बारवारताएँ नियम के अनुसार बराबर नहीं हैं। बहुलकीय वर्ग के भीतर सभावित सकेन्द्रण द्वारा बिन्दु का अनुमान करने के लिए यह प्रायः आवश्यक है कि निम्न ध्येयक का प्रयोग करें

$$Mo = l_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i,$$

जहाँ l_1 = बहुलकीय वर्ग की निचली सीमा,

Δ_1 = बहुलकीय वर्ग की बारवारता और उससे पूर्व के वर्ग की बारवारता का अन्तर (चिह्न उपेक्षित),

Δ_2 = बहुलकीय वर्ग की बारवारता और उससे प्रथम वर्ग की बारवारता का अन्तर (चिह्न उपेक्षित),

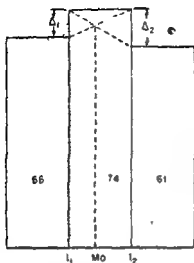
i = बहुलकीय वर्ग का अन्तराल।

विद्यापियों के ग्रेडों के बारवारता बटन के लिये

$$\begin{aligned} Mo &= 82.95 + \frac{74-61}{(74-61) + (74-61)} \times 2, \\ &= 82.95 + \frac{1}{2} \times 2 = 83.95 \end{aligned}$$

इस विशेष उदाहरण में परिकल्पित बहुलकीय मूल्य वित्कुल मध्य मूल्य के बराबर है जो सामान्य बात नहीं है। यह इसलिए घटित होता है क्योंकि उदाहरण में बहुलकीय वर्ग में तुरन्त पहले और पीछे आने वाले वर्गों में बारवारताएँ बराबर हैं। यदि वे असमान होता तो परिकल्पित बहुलकीय मूल्य वर्ग के मध्य-मूल्य से कम या अधिक हुआ होता। उदाहरण के लिए यदि 81.0—82.9 ग्रेडों वाले वर्ग में 61 के स्थान पर 66 बारवारताओं का समावेश हुआ होता तो परिकल्पित बहुलकीय मूल्य 83.71 होता। यदि 85.0—86.9 ग्रेडों वाले वर्ग में 61 के स्थान पर 66 बारवारताओं का समावेश हुआ होता तो परिकल्पित बहुलकीय मूल्य 84.19 होता।

हमने जिस अन्तर्वेशन विधि का वर्णन किया है उसे लेखाचित्र द्वारा दिखाया जा सकता है, जैसा कि चार्ट 9.2 में दिखाया गया है। इस विधि में Δ_1 और Δ_2 जो कार्य करते हैं उसे दिखाने के लिए हमने 81.0—82.9 ग्रेडों वाले वर्ग के लिए 66 को बारवारता की कल्पना की है। यह समझ लेना चाहिए कि हम केवल मात्र बहुलक के मूल्य का अनुमान कर रहे हैं। तो भी, यह उपयोगी अनुमान है और यह स्मरण रखना चाहिए कि बहुलक की दो महत्वपूर्ण विशेषताएँ हैं, प्रथम यह कि यह बटन के सर्वाधिक प्ररूपी मूल्य का प्रतिनिधित्व करता है और यह विद्यमान मदों से एकरूप होना चाहिए, द्वितीय यह कि बहुलक पर (सामान्य तौर पर परिकल्पित) बहुत ही बड़ी या छोटी मदों की अवस्थिति का प्रभाव नहीं पड़ता।



चार्ट 9.2 बहुलक के मूल्य के लिए अन्तर्बर्धन करने की विधि का लेखा चित्रो उदाहरण। Δ_1 और Δ_2 की ओर प्रभाव डालना है और Δ_1 मोमें की ओर प्रभाव डालना है, प्रत्येक अपने परिमाण के अनुपात में, ताकि बहुलक बहुलकीय वर्ग के अन्तराल को दो भागों में बाँटना है जो Δ_1 और Δ_2 के अनुपातिक हैं। अर्थात्,

लेखाचित्रो इस में हम एक स्तम्भ आरेख से बहुलक प्राप्त कर सकते हैं, जैसा कि चार्ट 9.2 में है। बारबारता वक्र के उच्चतम बिन्दु अथवा तोरण के अधिकतम खंडे भाग के अनुरूप X अक्ष पर मूल्य पढ़कर हम बहुलक का बहुत मोटा अनुमान लगा सकते हैं। वक्रों का मुक्त हस्त से समरेखण किया जा सकता है क्योंकि जब तक श्रेणी को समरेखण प्रक्रिया के अन्तर्गत नहीं लाया जाता, तब तक हम बहुलकीय वर्ग के मध्य-मूल्य के तौर पर लगभग वही मूल्य प्राप्त करेंगे।

कभी-कभी, ऐसी श्रेणियाँ सामने आती हैं जिनके दो बहुलक हों। वे द्वि-बहुलकीय कहलाती हैं। इस प्रकार की एक श्रेणी चार्ट 9.3 में चित्रित की गई है। कभी-कभी द्वि-बहुलकता समीप का परिणाम होती है, कभी-कभी यह इस तथ्य के कारण होती है कि असम आँकड़ों के दो समुच्चय उपस्थित हैं। चार्ट 9.3 में दो संकेन्द्रण इस तथ्य के कारण हुए हैं कि कुछ ड्राइवर पूरे (या लगभग पूरे) समय काम पर थे, जबकि अन्य सप्ताह में केवल एक या दो दिन काम कर रहे थे।

माध्य-माध्यिका, और बहुलक की विशेषताएँ

केन्द्रीय प्रवृत्ति के अन्य मापों पर विचार करने से पूर्व हम इन तीन प्रपेक्षाकृत सरल और बहुत महत्वपूर्ण मापों की विशेषताओं का परीक्षण करेंगे।

प्रथम का परिचय—समान्तर माध्य केन्द्रीय प्रवृत्ति के सब मापों में सबसे अधिक प्रयुक्त होता है। जैसा बाद में संकेत किया जायेगा, यह ऐसी स्थितियों में बहुलता से

$$\frac{Mo - l_1}{l_2 - Mo} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

ज्यामितीय रूप से, दो विकीर्णों के प्रतिच्छेद से एक लम्ब रूप रेखा गिराकर बहुलक का स्थान ज्ञात किया जा सकता है जैसा कि आरेख में दिखाया गया है।

बौलीय रूप से व्यञ्जक

$$Mo = l_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

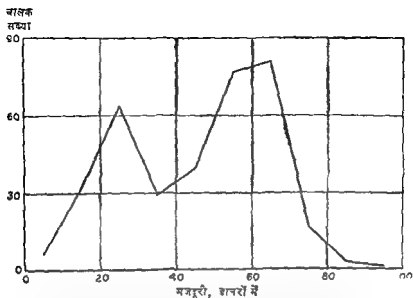
को निम्न प्रकार से विकसित किया जा सकता है हम बहुलक जानना चाहते हैं ताकि

$$\frac{Mo - l_1}{l_2 - Mo} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 Mo - \Delta_2 l_1 &= \Delta_1 l_2 - \Delta_1 Mo, \\ \Delta_1 Mo + \Delta_2 Mo &= \Delta_1 l_2 + \Delta_2 l_1, \\ Mo(\Delta_1 + \Delta_2) &= \Delta_1 l_2 + \Delta_2 l_1.\end{aligned}$$

$$\text{यदि } l_2 = l_1 + i$$

$$\begin{aligned}\therefore Mo &= \frac{\Delta_1 l_1 + \Delta_2 l_1 + \Delta_2 i}{\Delta_1 + \Delta_2}, \\ &= \frac{\Delta_1 l_1 + \Delta_2 l_1}{\Delta_1 + \Delta_2} + \frac{\Delta_2 i}{\Delta_1 + \Delta_2}, \\ &= l_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} i.\end{aligned}$$



चार्ट 9.3 बिटमनी कोयला खानों, इलीनोइस में ड्राइवरो द्वारा धाघे मास में प्राप्त मजदूरी का बटन । आबडे संयुक्तराज्य अथ सांख्यिक, म्यूरो शेजिज एन्ड प्रावर्स ऑफ लेबर इन बिटुमिनस कोल माइनिंग, कुस्टेन न० 601, पृष्ठ 61 से ।

प्रयोग किया जाता है जो इसे पथभ्रष्ट करने वाला बना देती है । माध्यिका समान्तर माध्य की अपेक्षा कम प्रसिद्ध है परन्तु यह एक अधिक सरल प्रत्यय पर आधारित है । समान्तर माध्य से कम प्रसिद्ध ही, बहुलक का प्रत्यय, मदों के एक दल के सर्वाधिक सामान्य या प्ररूपी के रूप में, सम्भवतः तीनों में सबसे अधिक सरल है ।

तीनों मापों के प्रत्ययों को चार्ट 9.4 के तीन भागों के द्वारा चित्रित किया जा सकता है । माध्य समतुलन बिन्दु पर या गुलब केन्द्र पर इस प्रकार से है, कि माध्य के एक ओर $\Sigma f/X$ दूसरी ओर $\Sigma f/X$ के समान है । माध्यिका वक्र को दो समान क्षेत्रों में बाँटता है । बहुलक वक्र के शिखर के नीचे का मूल्य है ।

बीजीय निरूपण—समान्तर माध्य का बीजीय निरूपण किया जा सकता है

(क) क्योंकि $\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N}$, यह निष्कर्ष निकलता है कि यदि तीन कारकों (योग,

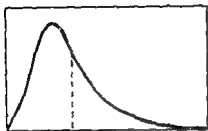
समान्तर माध्य, मदों की सख्या) में से कोई दो मायूम हों तो तीसरे का सकलन किया जा सकता है । इस प्रकार

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N}, \quad \Sigma fX = N\bar{X}, \quad N = \frac{\Sigma fX}{\bar{X}}$$

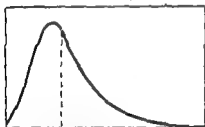
(ख) उचित भागों का प्रयोग करके, समान्तर माध्यों की एक श्रेणी का औसत निकला जा सकता है ताकि उन सब आँकड़ों का समान्तर माध्य प्राप्त हो जिन पर वे माध्य आधारित हैं ।

समान्तर माध्य के लिए विवेचित प्रकार का बीजीय प्रतिपादन माध्यिका पर लागू नहीं होता । माध्य के लिए आरेखित के समान, बहुलक का बीजीय प्रतिपादन सम्भव नहीं है ।

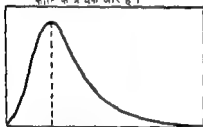
आँकड़ों के वर्गीकरण की आवश्यकता—समान्तर माध्य का परिकलन अवर्गीकृत आँकड़ों से, सरणीकृत आँकड़ों से, बारवारता वटन से, अथवा (जैसा ऊपर देखा गया है)



A \bar{X} के माप के मानों का \bar{X} के बाएँ ओर से अनुमान है।



B माध्यिका वक्र के नीचे क्षेत्रफल का आधा भाग माध्यिका पर लंबी की गई काटि के प्रत्येक ओर है।



C बहुलक सीधा वक्र के शिखर के नीचे है।

चार्ट 94 दाईं ओर की तिरछे बार-बारता वटन में समान्तर माध्य, माध्यिका और बहुलक की जानकारी।

केवल मात्र योग $\sum X$ तथा मदों की संख्या N की जानकारी से किया जा सकता है। जब समान्तर माध्य का परिकलन एक बारवारता वटन से किया जाता है तो \bar{X} का मूल्य अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए \bar{X} के मूल्य के बहुत निकट होगा। जितना अधिक सममित वटन होगा, उतनी ही अधिक निकटतर इन दो मूल्यों की समरूपता होगी।

माध्यिका के मूल्य के परिकलन के लिए, आँकड़ा का एक सरणी में (कम से कम केन्द्रीय मदें सरणीबद्ध होनी चाहिए) अथवा एक बारवारता वटन में होना आवश्यक है। बार-बारता वटन से निर्धारित सरणी से परिकलित माध्यिका के साथ लगभग मेल खाएगा यदि माध्यिका वाले वर्ग के भीतर मदों का वटन नियमित है।

बहुलक बारवारता वटन से अत्यधिक शीघ्रता से खोजा जाता है और सरणी से केवल कुछ कठिनाई के साथ। एक लेखक ने कहा है कि संयुक्त राज्य के नगरों की, प्रत्येक की जनसंख्या के अनुसार, सरणी से कोई बहुलक दिखाई नहीं देगा। परन्तु यदि ऐसे आँकड़ों को वर्गों में रखा जाए, तो एक बहुलकीय प्रवृत्ति उत्पन्न हो सकती है। इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि बहुलकीय समूह के भीतर बहुलकीय मूल्य के लिए अन्तर्वेशन की विधि अधिक से अधिक एक अनुमान मात्र है। बहुलक की खोजने के अधिक विविध तरीकों का अर्थ आवश्यक तौर पर सूत्र से आँकड़ों का समीक्षण करना और अधिकतम काटि के \bar{X} मूल्य का निर्धारण करना है।

असमान वर्ग-अन्तरालों का प्रभाव—जब वर्ग विस्तार में भिन्न हो तो समान्तर माध्य के मूल्य का परिकलन किया जा सकता है। वर्ग अन्तरालों की ऐसी भिन्नता महत्वपूर्ण तिरछापन (लगभग निरपवाद रूप से दाएँ की या सकारात्मक) की उपस्थिति के कारण आवश्यक हो जाती है जिसका परिणाम \bar{X} का एक ऐसा मूल्य होता है जिसकी अवर्गीकृत आँकड़ों पर आधारित मूल्य से निकट समरूपता न भी हो। ऐसे तिरछे बारवारता वटन से \bar{X} के मूल्य की अवर्गीकृत आँकड़ों से \bar{X} के मूल्य से अधिक होने की आशा होगी।

माध्यिका का निर्धारण साधारणतया भिन्न वर्ग अन्तर्गलो वाले बारवारता बटन से सन्तोपजनक ढंग से किया जा सकता है। परन्तु ऊपरी चतुर्थक अथवा ऊपरी पंचमको या दशमको में एक या अधिक बारवारताओं में गृहित एक विस्तृत वर्ग में आ सकते हैं। ऐसी स्थिति में आवश्यक अन्तर्वेशन प्रविश्वसनीय होगा।

जब एक बारवारता बटन के वर्ग अन्तराल विस्तार में भिन्न हो तो बहुलक सन्तोपजनक ढंग में मालूम किया जा सकता है, यदि बहुलकीय वर्ग और इसके दोनो ओर स्थित वर्ग अन्तरालो का विस्तार समान हो। अन्यथा निर्धारण की शुद्धता सीमित होने की सम्भावना है।

खुले सिरे वाले वर्गों का प्रभाव—एक बारवारता बटन के एक सिरे पर “अपेक्षाकृत कम...” वर्ग की ओर/अथवा दूसरे सिरे पर एक “अथवा अधिक” वर्ग की उपस्थिति का परिणाम λ का अर्थार्थ निर्धारण होता है क्योंकि ऐसे वर्गों के लिए साधारणतया मध्य मूल्यों का सन्तोपजनक ढंग से निर्धारण नहीं किया जा सकता।

खुले सिरे वाले वर्गों की उपस्थिति का माध्यिका के निर्धारण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

अनिर्धारित समूहों में बहुलकीय मूल्य की पोज करने की प्रक्रिया जटिल नहीं बनती। कभी-कभार, जैसा कि अत्यधिक तिरछे या उलटे J-आकार के बटन के साथ कार्य करते समय, बहुलक बटन के सिरे पर या उसके निकट होता है। ऐसी स्थितियों में बटन के उस सिरे पर एक अनिर्धारित समूह रखने का कोई कारण नहीं होगा। प्रासंगिक तौर पर, ऐसे बटन की स्थिति में, बहुलक केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप नहीं है।

तिरछेपन का प्रभाव—सममित बटन के लिए माध्य, माध्यिका, और बहुलक समरूप हैं। यदि सममित बटन को केवल एक पिछला सिरा बढ़ा कर इस प्रकार बदल दिया जाए कि बटन तिरछा हो जाए तो बहुलक के मूल्य में (जैसा प्रायः परिवर्तित होता है) कोई आवश्यक परिवर्तन नहीं आता, परन्तु माध्यिका तिरछेपन की दिशा में बदल जाती है। इस प्रकार घनात्मक तिरछेपन में (दाईं ओर को तिरछेपन से) माध्यिका का मूल्य बढ़ जाता है। माध्य और भी अधिक बढ़ जाता है क्योंकि यह न केवल इस तथ्य से प्रभावित होता है कि अब बहुलक के एक ओर बटनों की अधिकता है, बल्कि उन मात्रा से भी जिसके द्वारा विभिन्न अधिक बटन बहुलक में अलग हो। यद्यपि उदार कला विद्यार्थियों के ग्रेडों का बटन केवल थोड़ा सा तिरछा हो तो तिरछेपन की उपस्थिति का प्रभाव उस समय दिखाई देता है जब हम यह स्मरण करते हैं कि बहुलक 83.95 है, माध्यिका 84.72 है, और माध्य 85.17 है। ये मूल्य चार्ट 10.7 में दिखाए गए हैं।

चरम मानों का प्रभाव—जब तिरछापन सामान्य नहीं होता बल्कि उन कुछ मनों के कारण होता है जो बहुलक से काफी कुछ अलग हो ता माध्यिका पर केवल मामूली सा प्रभाव पड़ेगा। परन्तु समान्तर माध्य श्रेणी में प्रत्येक मद के मूल्य से प्रभावित होता है और श्रेणी में कुछ बहुत ही बड़ी (या बहुत ही छोटी) मदों की उपस्थिति में एक ऐसा माध्य उत्पन्न हो सकता है जो बहुत भ्रामक हो। जैसे कि साधारणतया परिकल्पित होता है, बहुलक पर कुछ असामान्य तौर पर ऊँचे (या नीचे) चरम मूल्यों की उपस्थिति का विल्कुल कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

ऊपर की बात इसी अधिक महत्व की है कि हम इसकी ओर अधिक ध्यान देंगे। बल्पना कीजिए कि हमारे पास सात मूल्यों की निम्न श्रेणी है।

डालर 12, डा० 14, डा० 15, डा० 15, डा० 16, डा० 18, डा० 19, जिसका माध्य डालर 15.57, माध्यिका डालर 15 और बहुलक डालर 15 हो। यदि इन मान में एक चरम मूल्य 25 डालर जोड़ दिया जाता है तो समान्तर माध्य 16.75 डालर बन जाता है, माध्यिका 15.50 डालर, जबकि बहुलक 15 डालर रहता है। अब यदि आठवीं मद के रूप में 25 डालर जोड़ने की बजाय हम 200 डालर जोड़ते हैं तो माध्य 38.62 डालर बन जाता है, परन्तु माध्यिका अभी भी 15.50 डालर है और बहुलक 15 डालर है। माध्यिका पर 16 डालर में ∞ तक किसी भी मूल्य के जोड़े जाने का प्रभाव एकसमान है। बहुलक पर चरम मूल्य का विन्कुल कोई प्रभाव नहीं पड़ता, यद्यपि यदि हमने एक 16 डालर की मद जाड़ी हानी तो इस पर प्रभाव पड़ता। इससे एक भिन्न बात का उदाहरण भी मिलना है, अर्थात् बहुलक एक उपयोगी माप नहीं है जब तक कि यह एक सुप्रतिभाषित मकेन्द्रण दिशान के लिए पर्याप्त मदों पर आधारित न हो।

समान्तर माध्य पर चरम मूल्यों के प्रभाव के कारण, वटन का वर्णन करने के लिए इन श्रक का प्रयोग करना कभी कभी घामक होना है। यदि हम एक मनुष्य समूह की आय पर विचार कर रहे हैं और यदि उनमें में अधिकतर की आय माधारण है परन्तु एक या कुछ की अत्यन्त ऊँची (या नीची) आय है, तो माध्य पर इन चरमनामों का प्रतिबिम्ब दिखाई देगा और उस सीमा तक वह प्ररूपी के बजाय अप्ररूपी होगा। छात्रों की एक परिपद् न एक बार उन म्मानकों का अध्ययन किया जिन्हें कालेज से निकले 20 वर्ष हो चुके थे। पूछे गए अन्य प्रश्नों में एक प्रश्न वर्ष विगेष में आय के सवध में था।⁶ 350 से अधिक प्रश्नावलिर्मा भेजी गईं, केवल 133 उत्तर प्राप्त हुए। इस बात की काफी संभावना है कि ये उत्तर चयनात्मक ह। और इनसे व्युत्पन्न किन्हीं भी श्रकों का मूल्य सदेहस्पद होगा। 133 उत्तरदानाओं की आय का माध्य 35,000 डालर था, परन्तु यह ऊँची औसत इस तथ्य के कारण थी कि कई बहुत ऊँची आय थी जो निश्चित ही चरम मान थी। माध्यिका आय 18,750 डालर थी, जबकि बहुलक 12,500 डालर के बहुत निकट था। इस प्रकार के मामले में, वटन का वर्णन करने के लिए हम अकेले माध्य का प्रयोग नहीं करना चाहिए। यदि केवल एक श्रक का प्रयोग करना हो तो माध्यिका या बहुलक का प्रयोग करना अधिक अच्छा है, यह इस बात पर निर्भर करेगा कि किम प्रत्यय का अधिक महत्त्व है। हाँ, यह बहुत अधिक अच्छा होगा कि तीनों मूल्य दिए जाएँ और यदि संभव हो तो बारबारता वटन या बारबारता वक्र भी दिया जाए।

कभी-कभी एक ऐसी श्रेणी पर विचार करते समय जिसमें सदिग्ध विषयमागता विद्यमान हो, समान्तर माध्य के स्थान पर माध्यिका का प्रयोग करना उचित हो सकता है। उदाहरणार्थ, संभव है कि कई स्वर्णमत्स्यो के वजन का माप लिया गया हो और श्रकों से कई असामान्य तौर पर बड़े नमूनों की उपस्थिति का पता चलता हो। यह सदेह किया जाना है कि अज्ञान या अभावधानी के कारण गणनाकार ने स्वर्णमत्स्य के साथ कुछ बायो (शफरी) को नमिश्रित कर लिया हो। शकास्पद मूल्यों को छोड़ा जा सकता है। परन्तु हम इस बात का विश्वास नहीं है कि भारी मछलियाँ कार्ये थी और संभवत उनके माप छोड़े नहीं जाने चाहिए। माध्यिका के प्रयोग से यह स्वीकृति हो जाती है कि चरम मूल्यों का श्रेणी में उनकी स्थिति से, न कि उनके आकार से, प्रतिनिधित्व किया जाए।

६ सभी श्रक प्रचलित डालर में और निम्नम 250 डालर तक पूर्णांकित हैं।

कभी-कभी हमारे पास एक ऐसी श्रेणी होती है जिसमें ऐसी चरमताएँ उपस्थित होनी हैं जिनकी सख्या हमें पता हो परन्तु अलग-अलग मूल्य पता न हो। ऐसी स्थिति में हम माध्यिका या बहुलक का पता चला सकन है, परन्तु माध्य का नहीं।

जब हमारे पास बड़े परिमर में व्याप्त मूल्यों की एक श्रेणी हो तो केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप की कोई भी सकल्पना सदेहास्पद है। कल्पना कीजिए कि हमारे पास 4, 6, 2000, तथा 2,100 मूल्य हैं। यह स्पष्ट है कि माध्य या माध्यिका का परिकलन हो सकता है, परन्तु दोनों में से किसी का भी कोई व्यावहारिक अर्थ नहीं होगा।

आँकड़ों की अनियमितता का प्रभाव—जब आँकड़े टूटे हुए या अनियमित हो तो एक बार-बारता वटन से परिकलित माध्य का मूल्य असंगठित आँकड़ों पर आधारित मूल्य से निश्चित रूप से भिन्न हो सकता है।

यदि माध्यिका वाले वर्ग में आने वाली मदों के बीच में अन्तराल हो तो यही माध्यिका के लिए भी सत्य है। जब माध्यिका के आस-पास अन्तराल हो तो प्रयोग के लिए विशेष तौर पर अच्छा प्रत्यय माध्यिका नहीं है, क्योंकि यदि एक या दो मदें श्रेणी में जोड़ दी जाएँ या श्रेणी से घटा दी जाएँ तो इसका मूल्य अनियमित हो जाएगा।

यदि एक बहुलक की स्पष्ट तौर पर परिभाषा की जाए तो उस मूल्य के निकट अन्तराल रहने की आशा नहीं है। जब बहुलक के समीप अन्तराल विद्यमान हो तो यह विलुल संभव है कि श्रेणी में इतनी कम मदें हो कि बहुलक की स्पष्ट तौर पर परिभाषा या अर्थ न दिया जा सके।

प्रतिदर्शों पर आधारित होने पर विश्वसनीयता—अध्याय 24 में हम उस विचलन का विवरण देंगे जिसकी समान्तर माध्य के मूल्यों में उस समय अपेक्षा की जा सकती है जब वह पुनरावृत्त यादृच्छिक प्रतिदर्शों पर आधारित हो। इस पुस्तक में माध्यिकाओं या बहुलकों के प्रतिदर्शों के विचलन का विवरण नहीं दिया जाएगा। तो भी एक सामान्य जनसंख्या से एक ही आकार के प्रतिदर्शों के लिए, माध्यिका में समान्तर माध्य की अपेक्षा प्रतिदर्श का विचलन अधिक हो सकता है और बहुलक माध्यिका से अधिक विचलित हो सकता है।

गणितीय गुणधर्म—समान्तर माध्य के दो महत्वपूर्ण गुणधर्म हैं। प्रथम, $\sum x = 0$, तथा द्वितीय $\sum x^2 =$ न्यूनतम। इस वाद के गुणधर्म के कारण माध्य, प्रसार के मापों के लिए सदर्थ का प्रायिक आधार होता है। माध्य बहुत भी प्रक्रियाओं में, जो इस पुस्तक के बाद के परिच्छेदों में आएँगी, एक महत्वपूर्ण फलन है। अन्य उपयोगों में, यह प्रेक्षित आँकड़ों पर प्रसामान्य वक्र बिठाने के लिए आवश्यक है।

माध्यिका से विचलनों का योग (चिह्न को उपेक्षित कर) न्यूनतम है। इस कारण से, प्रसार के कुछ माप कभी-कभी माध्यिका पर आधारित किए जाते हैं।

समुचित माप का चयन—पूर्वगामी मापों का वर्णनात्मक विधियों के तौर पर प्रयोग करके सांख्यिकीविद् के समान यह निर्णय करने की समस्या आ सकती है कि आँकड़ों के एक दत्त समुच्चय का स्वरूप दिखाने के लिए कौनसा माप प्रयोग में लाया जाए। साधारण तौर पर केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप जो उसे प्रयोग में लाना चाहिए, (1) आँकड़ों के वटन के स्वभाव पर तथा (2) केन्द्रीय प्रवृत्ति के प्रत्यय पर, जो विशिष्ट प्रयोजन के लिए वाछनीय है, आधारित है।

यदि बटन, सममित्र या लगभग ऐसा हो तो तीनों मापों का लगभग एक दूसरे के म्यान पर प्रयोग किया जा सकता है। यदि एक श्रेणी तिरछी हो तो हमें यह ध्यान में रखना चाहिए कि समान्तर माध्य प्रायः प्ररूपी मूल्य नहीं है और बहुलक (जो प्ररूपी है) या माध्यिका का प्रयोग करना अधिक अच्छा हो सकता है। जब चरम विचलन हो या जब विषममापना का भेद हो तो हम माध्य के म्यान पर माध्यिका का प्रयोग कर सकते हैं, अथवा एक संशोधित माध्य का प्रयोग किया जा सकता है।

यदि 'X' का परिकलन किया जाता है तो जोड़ प्राप्त करने के लिए उस मूल्य का प्रयोग किया जा सकता है। इस प्रकार यदि व्यक्तों का औसत भार 150 पाउंड है तो 3,000 पाउंड उठा सकने की क्षमता वाले एक उत्पादक में लगभग 20 व्यक्ति लादना सुरक्षित है। (150 पाउंड का अर्ध व्यक्तों के औसत भार के लिए कुछ ऊँचा है, परन्तु यह वह अंक है जिसका प्रायः उत्पादक क्षमता के परिकलन के लिए प्रयोग किया जाता है। यह स्पष्ट है कि संकेतित सभी 20 व्यक्ति भारी व्यक्ति नहीं होने चाहिए।) यदि माप के संबंध में बाद के परिकलन करने हैं तो माध्य की आवश्यकता हो सकती है। यदि बारबारता बटन के अनुसार एक बड़े खींचना हो तो संभवतः माध्य का प्रयोग किया जाएगा। यदि प्रसार के संबंध में अन्त में आँकड़ों की एवं श्रेणी की दूसरी से तुलना करनी हो तो माध्य की आवश्यकता हो सकती है। परन्तु इसका यह अर्थ नहीं कि दोनों में से किसी एक या दोनों श्रेणियों का वर्णन करने के लिए माध्यिका या बहुलक का प्रयोग नहीं करना चाहिए।

एक वर्ग में किसी व्यक्ति का मापेज स्थान यह बनाकर संकेतित किया जा सकता है कि क्या उसका घेड़ आधे सदस्यों के घेड़ों से अच्छा है अथवा नहीं। इस योग्यता क्रम निर्धारण में माध्यिका का प्रयोग सार्थक है। विद्यार्थियों के विभिन्न अनुपातों के संबंध में अन्य विवरण चतुर्थको, पंचमको, दशमको या शततमको का प्रयोग करने दिए जा सकते हैं।

यदि हम मोटर चलाने वालों के गैसोलिन के लिए प्ररूपी वार्षिक व्यय जानने की रुचि रखते हैं तो हम बहुलक का प्रयोग करना चाहिए।

क्योंकि तीनों मापों में भिन्न प्रत्ययो का समावेश है अतः कभी कभी दो या मग्नभ्र हो तो तीनों का प्रयोग करना उचित हो सकता है। माध्य और बहुलक या माध्य और माध्यिका के प्रयोग में हम विद्यमान तिरछापन की मात्रा का आभास मिलता है, जैसाकि अगले अध्याय में दिखाया जाएगा।

कभी कभी एक श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति का शीघ्र अनुमान करना आवश्यक होता है। सभी स्थितियों में, बहुलक का बारबारता बटन से सुरक्षित अनुमान लगाया जा सकता है और माध्यिका का या तो सरणी में या बारबारता बटन से शीघ्र अनुमान किया जा सकता है। हाँ, यदि जोड़ और मध्य की संख्या दी हुई हो तो समान्तर माध्य का कुछ सेकंड में परिकलन किया जा सकता है।

लघु माध्य

समान्तर माध्य, माध्यिका, तथा बहुलक, अपनी विस्तृत उपयोगिता, सरलता, तथा सामान्य प्रयोज्यता के कारण, केन्द्रीय प्रवृत्ति के प्रायः अधिक महत्वपूर्ण माप समझे जाते हैं। कुछ स्थितियों में केन्द्रीय प्रवृत्ति के अन्य माप उपयोगी हो सकते हैं और इसलिए हम गूणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य पर विचार करेंगे। जैसे पहले संकेत किया

गया है, "माध्य" शब्द का प्रयोग प्रायः समान्तर माध्य को निर्दिष्ट करने के लिए किया जाता है, परिणामस्वरूप, किसी अन्य माध्य जैसे गुणोत्तर माध्य या हरात्मक माध्य की ओर संकेत करते समय हमें माप की ओर सदा इसकी पूर्ण गदमजा से संकेत करना चाहिए।

गुणोत्तर माध्य—गुणोत्तर माध्य की "मदों के गुणनफल के N वें मूल" के रूप में परिभाषा की जाती है। इस प्रकार, चार मदों 5, 8, 10, 12 के लिए गुणोत्तर माध्य है।

$$G = \sqrt[4]{5 \times 8 \times 10 \times 12} = \sqrt[4]{4800} = 8.3$$

यह जानना उचित है कि इन चार मदों का समान्तर माध्य 8.75 है। धनात्मक मूल्यों (सभी एक्सपान नहीं) की किसी श्रेणी के लिए गुणोत्तर माध्य समान्तर माध्य से छोटा है।⁷ यदि श्रेणी का एक मूल्य शून्य के बराबर हो तो गुणोत्तर माध्य शून्य के बराबर होगा और इसीलिए अनुपयुक्त होगा। यदि एक या अधिक मूल्य ऋणात्मक हों तो गुणोत्तर माध्य का कभी-कभी परिकलन किया जा सकता है परन्तु वह निरर्थक हो सकता है। इसके प्रयोग में ये महत्वपूर्ण कमियाँ हैं।

प्रतीकात्मक दृष्टि से गुणोत्तर माध्य $N \sqrt[N]{X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_N}$ है। परिकलन प्रायः लघुगणको के द्वारा इस प्रकार किया जाता है।

$$\log G = \frac{\log X_1 + \log X_2 + \log X_3 + \dots + \log X_N}{N} = \frac{\sum \log X}{N}$$

इस प्रकार गुणोत्तर माध्य का लघुगणक मूल्यों के लघुगणको का समान्तर माध्य है।

जब बारवारताएँ विद्यमान हों तो प्रत्येक लघुगणक को तदनुसार बारवारता में गुणा करना आवश्यक है। इस प्रकार

$$\log G = \frac{f_1 \log X_1 + f_2 \log X_2 + f_3 \log X_3 + \dots}{N} = \frac{\sum f \log X}{N}$$

बारवारता बटन के लिए गुणोत्तर माध्य का प्रायः निम्न द्वारा परिकलन किया जाता है

(1) प्रत्येक वर्ग के मध्य मूल्य के लघुगणक को सुनिश्चित करके, (2) प्रत्येक लघुगणकीय मध्यमूल्य को इसकी उचित बारवारता से गुणा करके, (3) इन गुणनफलों को जोड़कर, (4) मदों की संख्या से भाग करके, तथा (5) निष्कर्ष का प्रति-लघुगणक लेकर। यदि श्रेणी लघुगणकीय दृष्टि से सममित है (अध्याय 23 देखिए) और मदें वर्गों में समान्तर दृष्टि की वजह से गुणोत्तर दृष्टि से समान रूप में बँटी हो तो वर्गों के मध्य मूल्यों के लघुगणको की वजह से वर्गों की संख्या के लघुगणको के मध्यमूल्यों का प्रयोग करना अधिक श्रेष्ठ है। यदि कच्चे आँकड़े प्राप्त हैं तो बारवारता बटन का पुनर्निर्माण करना भी उचित है ताकि वर्ग भन्तरालों को गुणोत्तर दृष्टि से समान बनाया जाए, यदि पहले ही ऐसा न किया गया हो।

भाषकों ध्यान होगा कि समान्तर माध्य मूल्यों के योग को उनकी संख्या से भाग करके प्राप्ता है, जबकि गुणोत्तर माध्य-मूल्यों के गुणनफल का N वाँ मूल है। जैसा पहले

⁷ निश्चय के लिए परिशिष्ट घ, परिच्छेद 9.3 देखिए।

देखा गया है, X का N गुण ΣX है। गुणोत्तर माध्य के लिए, $G^N = X_1 X_2 \dots X_N$ इत्यादि, अर्थात् गुणोत्तर माध्य की N वीं शक्ति मूल्यों के गुणनफल के बराबर होती है। इसमें कुछ रुचिकर बिन्दु उत्पन्न होता है कि एक समान N और समान ΣX वाली सख्याओं की किसी श्रेणी का समान्तर माध्य समान होता है (उदाहरणतः, 1 तथा 11, 2 तथा 10, 4 तथा 8, 5 तथा 7, -2 तथा 14 इन सब का समान्तर माध्य 6 है), और समान N और समान गुणनफल वाली सख्याओं की किसी श्रेणी का गुणोत्तर माध्य समान होता है (उदाहरणार्थ, 1 तथा 36, 2 तथा 18, 4 तथा 9 इन सबका गुणोत्तर माध्य 6 है)।

गुणोत्तर माध्य का एक अन्य गुण यह है कि गुणोत्तर माध्य के सवध में गुणोत्तर माध्य के एक और मूल्यों के अनुपातों का गुणनफल गुणोत्तर माध्य के दूसरी ओर मूल्यों के सवध में गुणोत्तर माध्य के अनुपातों के गुणनफल के बराबर है। उदाहरण के लिए, हम 4, 5, 20, 25 मूल्य ले, जिनका गुणोत्तर माध्य $\sqrt[4]{10000} = 10$ है। गुणोत्तर माध्य के सवध में 4 तथा 5 मूल्यों के अनुपात $\frac{4}{10}$ तथा $\frac{5}{10}$ है, जबकि 20 तथा 25 मूल्यों के सवध में गुणोत्तर माध्य के अनुपात $\frac{20}{10}$ तथा $\frac{25}{10}$ है। इस प्रकार हमारे पाम निम्न-लिखित होता है

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{25},$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

इसी प्रकार, अनुपातों को उलट कर हम लिख सकते हैं

$$\frac{10}{4} \cdot \frac{10}{5} = \frac{20}{10} \cdot \frac{25}{10},$$

$$5 = 5.$$

निम्न अनुच्छेदों में कुछ उदाहरणों का विवरण है जिनमें कि गुणोत्तर माध्य उपयोगी है।

(1) गुणोत्तर माध्य का प्रयोग अनुपातों का मध्यमान निकालने के लिए किया जा सकता है। निम्न आंकड़ों पर विचार कीजिए।

{प्रतिशत} {प्रतिशत}

समुदाय देशज निवासी विदेशज निवासी देशजों के सवध में विदेशजों के सवध में
विदेशजों का अनुपात देशजों का अनुपात

A...	8,000	4,000	50	200
B.	1,500	3,000	200	50

विदेशज जनसंख्या के सवध में विदेशजों के दो अनुपातों का समान्तर माध्य 125 प्रतिशत है। इसी प्रकार, विदेशज जनसंख्या के सवध में देशजों के दो अनुपातों का समान्तर माध्य 125 प्रतिशत है! ये दो औसत एक दूसरे के साथ असमत हैं। यदि हम गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करें तो यह बेतुका परिणाम नहीं निकलता, क्योंकि अनुपातों के दो युगलों में से प्रत्येक

का गुणोत्तर माध्य $\sqrt{0.50.200} = 10$ या 100 प्रतिशत है। हाँ, हम दोनों समुदायों के विदेशज निवासियों का योग या औसत, और देशज निवासियों का योग या औसत निकाल सकते थे, इस प्रकार दो ऐसे अनुपात कर सकते थे जो सगत हों। 7,000 विदेशज तथा 9,500 देशज निवासी हैं, या औसत 3,500 विदेशज तथा 4,750 देशज निवासी हैं। देशजों के सबध में विदेशजों का अनुपात

$$\frac{7,000}{9,500} \text{ या } \frac{3,500}{4,750} = 73.7 \text{ प्रतिशत है,}$$

और विदेशजों के सबध में देशजों का अनुपात

$$\frac{9,500}{7,000} \text{ या } \frac{4,750}{3,500} = 135.7 \text{ प्रतिशत है।}$$

इन दो अनुपातों का गुणनफल 1 है, परन्तु यह अकगणितीय विधि दोनों अनुपातों पर समान भार नहीं डालती। ध्यान से देखिए, अकगणितीय विधि में समान्तर माध्यों (या योगों) का अनुपात आता है, जबकि गुणोत्तर विधि में अनुपातों का गुणोत्तर माध्य आता है। हमारे पास यहाँ दो भिन्न प्रत्यय हैं। एक दी हुई स्थिति में किमका प्रयोग करना है यह प्रयोजन पर निर्भर करता है। यदि हम कई एक समुदायों के लिए एक प्ररूपी अनुपात निश्चित करना चाहते हैं और चाहते हैं कि वह अनुपात विभिन्न स्थानों में उपस्थित देशज या विदेशज व्यक्तियों की संख्या से स्वतंत्र हो, अर्थात् हम प्रत्येक अनुपात पर समान भार देना चाहते हैं, तो हम अनुपातों के गुणोत्तर माध्य का प्रयोग कर सकते हैं। यदि हम जनसंख्याओं की अपना प्रभाव डालने की आज्ञा देना चाहते हैं तो हम योगों या समान्तर माध्यों का अनुपात निर्धारित कर सकते हैं। प्रश्न यह नहीं है कि अनुपातों का समान्तर माध्य प्रयोग किया जाए या गुणोत्तर माध्य, बल्कि यह है कि समान्तर माध्यों (या योगों) पर आधारित अनुपात का प्रयोग किया जाए या अनुपातों का गुणोत्तर माध्य।

यदि देशजों के सबध में विदेशजों के दो अनुपातों की अकगणितीय ढग से औसत निकाली जाए, परन्तु उन्हें देशज जनसंख्याओं के अनुसार भारित किया जाए तो 73.7 प्रतिशत परिणाम प्राप्त होता है। यदि विदेशजों के सबध में देशजों के दो अनुपातों की अकगणितीय ढग से औसत निकाली जाए परन्तु विदेशज जनसंख्या के अनुसार भारित किया जाए तो हमारे पास 135.7 प्रतिशत आता है। हाँ, ये एक उनके साथ समरूप हैं जो योगों के अनुपात लेकर प्राप्त किए गए हैं।

जब हम परिवर्तन के समान अनुपातों पर समान भार डालना चाहते हैं तो गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया जा सकता है। कल्पना कीजिए (क) कि दो वस्तुएँ 2 डालर और 10 डालर प्रति इकाई पर बिक रही हैं, (ख) कि बाद की तिथि में प्रथम वस्तु का मूल्य दुगुना हो जाता है जबकि द्वितीय का मूल्य आधा रह जाता है, और इस प्रकार वे क्रमशः 4 डालर तथा 5 डालर पर बिकती हैं; तथा (ग) कि और बाद की तिथि में प्रथम वस्तु का प्रारम्भिक मूल्य आधा रह जाता है और 1 डालर हो जाता है, जबकि दूसरी वस्तु का दुगुना हो जाता है और 20 डालर बन जाता है। इन तीन स्थितियों में समान्तर माध्य (क) 6 डालर; (ख) 4.50 डालर, तथा (ग) 10.50 डालर प्रदान करता है। गुणोत्तर माध्य प्रदान करता है : (क) 4.47 डालर; (ख) 4.47 डालर; तथा (ग) 4.47 डालर। गुणोत्तर माध्य को उचित मिश्र करने के लिए प्रयोग की गई कल्पना यह कहकर निर्देशित

की गई है कि मूल्य का दुगुना मूल्य के आधे को प्रतिसन्तुलित कर देता है, मूल्य का चार गुना प्रारम्भिक अंक के चौथाई मूल्य को प्रतिसन्तुलित कर देता है, और इसी प्रकार निम्नी भी दो अनुपातों के लिए जिनका गुणनफल 1 हो। इस विशेषता की ओर मूल्य सूचकांक के संबंध में गुणोत्तर माध्य के संभव प्रयोग के बारे में पुनः मनेत किया जाएगा।

(2) कभी-कभी एक बार-बारता बटन सामने आता है जो दाईं ओर को प्रत्यन्त तिरछा होता है। यदि वर्गों के मध्यमानों का आरेखन करने की बजाय हम मध्यमानों के लघुगणकों का प्रयोग करें (अथवा इससे भी अधिक अच्छा, लघुगणकीय मध्यमानों, परि-सीमाओं के प्रत्येक जोड़े के गुणोत्तर माध्य को, लघुगणकीय X -पैमाने पर आरेखित करें) और इसका परिणाम एक सममित बटन हो तो एक गुणोत्तर विश्लेषण उचित हो सकता है। इसका अधिक पूर्ण विवरण अध्याय 23 में दिया गया है।

(3) सम्भवतः गुणोत्तर सिद्धान्त का सर्वाधिक होने वाला प्रयोग औसत प्रतिशत परिवर्तन निर्धारण से संबंधित है। यदि एक नगर को एक दिए हुए वर्ष में जनसंख्या 1,00,000 हो और दस वर्ष बाद 1,20,000 हो तो औसत वार्षिक प्रतिशत परिवर्तन क्या था? सम्पूर्ण अवधि में परिवर्तन 20 प्रतिशत था। यदि हम उस अंक का दसवां भाग या 2 प्रतिशत वार्षिक प्रतिशत वृद्धि के तौर पर लें और प्रति वर्ष पहले के वर्ष की तुलना में 2 प्रतिशत वृद्धि का संकलन कर ता दूसरा जनसंख्या अंक 1,21,900 बनता है। स्पष्ट है कि ठीक अंक 2 प्रतिशत से थोड़ा कम है क्योंकि हम वास्तव में चक्रवृद्धि कर रहे हैं। हम औसत वार्षिक प्रतिशत परिवर्तन का संकलन

$$P_n = P_0(1+r)^n,$$

का प्रयोग करते कर सकते हैं, जहाँ P_0 = अवधि के प्रारम्भ में जनसंख्या,

$$P_n = \text{अवधि के अंत में जनसंख्या};$$

$$r = \text{दशमलव के तौर पर व्यक्त प्रति वर्ष सापेक्ष वृद्धि (या कमी),}$$

$$n = \text{वर्ष संख्या।}$$

ऊपर के आंकड़ों के लिए,

$$1,20,000 = 1,00,000 (1+r)^{10}$$

लघुगणकों के प्रयोग से इसे हल करने से

$$5.079181 = 5.000000 + 10 \log (1+r) \text{ प्राप्त होता है।}$$

$$\log (1+r) = \frac{0.079181}{10},$$

$$= 0.0079181,$$

$$1+r = 1.0184,$$

$$r = 1.84 \text{ प्रतिशत।}$$

$P_n = P_0 (1+r)^n$ पद को कभी-कभी चक्रवृद्धि व्याज की विभिन्न समस्याओं में इसकी उपयोगिता के कारण चक्रवृद्धि व्याज सूत्र कहा जाता है। हमने ऊपर इसकी औसत

वार्षिक प्रतिशत वृद्धि⁸ को निर्धारित करने के लिए उपयोग किया है। दिखाए गए चार संकेतों में से किन्हीं तीन के मूल्य जानने पर हम चौथे को निकाल सकते हैं। इस प्रकार हम निर्धारित कर सकते हैं

(क) औसत वार्षिक प्रतिशत परिवर्तन r

(ख) कुछ निश्चित वर्ष बाद जनसंख्या P_n , एक स्थिर सापेक्ष परिवर्तन की कल्पना के आधार पर।

(ग) पुन एक स्थिर सापेक्ष परिवर्तन के आधार पर, वर्ष संख्या n जब तक कि एक नियत जनसंख्या प्राप्त न हो जाए।

(घ) कुछ निश्चित वर्ष पूर्व जनसंख्या, P_0 , यदि प्रतिशत परिवर्तन स्थिर हो।

यह ध्यान में रखना चाहिए कि जनसंख्या के लिए एक स्थिर सापेक्ष परिवर्तन की कल्पना सम्भव "नए" देशों को छोड़कर किन्हीं अन्य के लिए बड़ी हुई अवधियों के लिए ठीक नहीं है।

हरात्मक माध्य—हरात्मक माध्य मूल्यों के व्युत्क्रमों के समान्तर माध्य का व्युत्क्रम है। इसका पद निम्नलिखित है

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \dots + \frac{1}{X_N}}{N}} = \frac{1}{\frac{\sum \frac{1}{X}}{N}}$$

परिवर्तन के प्रयोजन के लिए, निम्नलिखित रूप का प्रयोग करना अधिक सुविधाजनक है :

$$H = \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \dots + \frac{1}{X_N}} = \frac{N}{\sum \frac{1}{X}}$$

अथवा

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \dots + \frac{1}{X_N}}{N} = \frac{\sum \frac{1}{X}}{N}$$

3 और 12 इन दो मूल्यों का हरात्मक माध्य है :

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{12}}{2} = \frac{5}{24},$$

$$H = 4.8$$

8. ऊपर के विवेचन में हमने दो चुने हुए बिन्दुओं के बीच में औसत प्रतिशत वृद्धि को मान्य किया। बशर्तकी हम वह औसत प्रतिशत वृद्धि मान्य करना चाहते हैं जो विभिन्न वर्षों के लिए सर्वोत्तम ढंग से कई एक मूल्यों का वर्णन करती है। ऐसी औसत किसी श्रेणी में केवल प्रथम और अन्तिम मूल्यों पर निर्भर नहीं होती और इसलिए इसके एक प्रतिनिधित्वक होने की अधिक सम्भावना है। ऐसी औसत प्राप्त करने के लिए एक ढंग लगाने की विधि अध्याय 13 में दी है।

इन्ही मूल्यों के लिए, समान्तर माध्य 7.5 है, जबकि गुणोत्तर माध्य $\sqrt{3 \times 12} = 6$ है। मूल्यों की किन्हीं श्रेणियों के लिए (सभी समान नहीं अथवा शून्य को एक मूल्य के रूप में सम्मिलित न करते हुए) हरात्मक माध्य गुणोत्तर अथवा समान्तर माध्य दोनों से कम है।⁹

बारवारता बटन के लिए हरात्मक माध्य का परिकलन इतना कम होता है कि हम केवल यह विधि नोट करें जिसमें प्रत्येक मध्यमान के व्युत्क्रम को (अथवा वर्ग भीमात्रों के व्युत्क्रमों के मध्यमान को) इसकी बारवारता द्वारा गुणा करना, इन गुणनफलों को जोड़ना, N से भाग करना, तथा जा निष्कर्ष आये उसका व्युत्क्रम लेना आता है।

जबकि हरात्मक माध्य अधिक महत्वपूर्ण माप नहीं है, यह प्रायः भ्रामक है और इसलिए हम कुछ विस्तार सहित व्याख्या देने और कई संभव प्रयोगों की ओर संकेत करेंगे।

अनुप्रयोग 1 यद्यपि सतरों का प्रायः इस ढंग से मूल्य तय नहीं होता, तथापि हम कल्पना कर लें कि सतरों के दो प्रकार 1 डालर के 10 तथा 1 डालर के 20 बिक रहे हैं। समान्तर माध्य का परिकलन इस प्रकार किया जा सकता है :

$$\bar{X} = \frac{10 + 20}{2} = 15$$

अर्थात्, 1 डालर के 15, अथवा 0.067 डालर प्रति सतरा। यदि हम प्रत्येक प्रकार के सतरों के लिए समान व्यय खर्च कर तो हमारे लिए प्रति सतरा यह मूल्य देना आवश्यक है। 30 सतरों में से प्रत्येक के लिए 0.067 डालर देकर हम कुल के लिए 2.00 डालर खर्च करेंगे। हरात्मक माध्य से भिन्न परिणाम निकलता है

$$H = \frac{2}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20}} = \frac{2}{\frac{3}{20}} = \frac{40}{3} = 13 \frac{1}{3}$$

अर्थात्, 1 डालर के $13 \frac{1}{3}$ हैं, अथवा 0.075 डालर प्रति सतरा। यदि प्रत्येक मूल्य पर समान सत्या में सतरे खरीदे जाते हैं तो प्रति सतरा हमें यह मूल्य देना आवश्यक है। इस प्रकार यदि हम 15 सतरे 1 डालर के 10 के हिसाब से, तथा 15 सतरे 1 डालर के 20 के हिसाब से खरीदें तो कुल 30 के लिए हम 2.25 डालर खर्च करेंगे। इसी प्रकार यदि हम 30 सतरे 0.075 डालर प्रति सतरे के हिसाब से खरीदे तो कुल के लिए हम 2.25 डालर व्यय करेंगे।

यदि हम प्रत्येक मूल्य पर खरीदी मात्राओं से वजन करें तो हरात्मक माध्य से वही परिणाम निकलेंगे जो समान्तर माध्य से। इस प्रकार

$$H = \frac{30}{10\left(\frac{1}{10}\right) + 20\left(\frac{1}{20}\right)} = 15 \text{ सतरे प्रति डालर, अथवा } 0.067 \text{ डालर प्रति सतरा,}$$

प्रत्येक प्रकार के सतरे के लिए समान मुद्रा के व्यय की कल्पना के आधार पर।

यदि मूल्य सामान्य ढंग से बताए जाएँ, अर्थात् शतना प्रति दर्जन, तो ये सतरे 1.20 डालर प्रति दर्जन तथा 0.60 डालर प्रति दर्जन के हिसाब से बिक रहे हैं। सरल समान्तर माध्य है :

$$Y = \frac{\text{डालर } 1.20 + \text{डालर } 0.60}{2} = 0.90 \text{ डालर प्रति दजन, अथवा } 0.075 \text{ डालर प्रति सतरा।}$$

यह प्रथम हरात्मक माध्य के समान है क्योंकि हम अपने परिकलन में यह कल्पना कर रहे हैं कि प्रत्येक मूल्य पर समान मात्राएँ खरीदी जानी है। (यदि भाव प्रति दजन सतरों के स्थान पर प्रति सतरा हैं तो समान परिणाम प्राप्त होते हैं।) दूसरी ओर यदि हम विचार करें कि 10 सतरे 1.20 डालर प्रति दजन के हिसाब से खरीदे जाएँ तथा 20 सतरे 0.60 डालर प्रति दजन के हिसाब से खरीदे जाएँ तो हमारे पास

$$Y = \frac{(\text{डालर } 1.20 \times 10) + (\text{डालर } 0.60 \times 20)}{30} = 0.80 \text{ डालर प्रति दजन अथवा } 0.067 \text{ डालर प्रति सतरा आता है।}$$

यह परिणाम वही है जो हमारी प्रथम और तृतीय गणनाओं में प्राप्त हुआ क्योंकि हमने यह कल्पना की है कि प्रत्येक प्रकार के सतरे के लिए मुद्रा की समान मात्राएँ खच की जानी हैं।

यदि कीमतें निम्नलिखित रूप में दी गई हैं	यदि कल्पना की गई है कि	
	प्रत्येक प्रकार या वस्तु पर मुद्रा की समान रकम खच की गई	प्रत्येक कीमत पर प्रत्येक प्रकार या वस्तु की समान इकाइया खरीदी गई
प्रति इकाई कीमत	1 1 मुद्रा की समान रकमों के लिए मात्राओं से भारित (यहाँ प्रति डालर इकाइया)	I 1 इकाइयों की संख्या से भारित (या समान रूप से)
	2 H डालरों से भारित (या समान रूप से)	II H इकाइयों की समान संख्याओं के लिए डालरों से भारित (अथवा प्रति इकाई कीमत)
प्रति डालर इकाइयाँ	3 1 डालरों में भारित (या समान रूप से)	III 1 इकाइयों की समान संख्याओं के लिए डालरों से भारित (अथवा प्रति इकाई कीमत)
	4 H मुद्रा की समान रकमों के लिए मात्राओं से भारित (यहाँ प्रति डालर इकाइयाँ)	IV H, इकाइयों की संख्या से भारित (या समान रूप से)

ऊपर के उदाहरणों में हरात्मक माध्य से कोई ऐसी जानकारी प्राप्त नहीं हुई है जो समांतर माध्य के प्रयोग से पहले ही प्राप्त न हो चुकी हो। तो भी हरात्मक माध्य उस समय उपयोगी हो सकता है जब आंकड़े परम्परागत रूप से या सुगमता से प्रति मिनट हल की गई समस्याओं प्रति घण्टा तय किए गए मीलों प्रति डालर खरीदी गई इकाइयों, इत्यादि के रूप में दिए गए हो।

यदि (क) आंकड़े कैसे दिए गए ह और (ख) कौनसे भारों का प्रयोग करना है पर उचित विचार किया जाए तो समांतर माध्य और हरात्मक माध्य से मंगत परिणाम प्राप्त होते हैं। कीमतों को उदाहरण के तौर पर लेकर निम्न तालिका में संवध दिखाए गए हैं। व्यंजक I 2, 3 4 से एवं दूसरे के माध्य सगुन निष्कर्ष प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार, व्यंजक I II II IV से सगुन निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।

वस्तु A को प्रति डालर 4 इकाइया के हिसाब से, अथवा 0.25 डालर प्रति इकाई के हिसाब से बिकती हुई तथा वस्तु B को प्रति डालर 10 इकाइया के हिसाब से या 0.10 डालर प्रति इकाई के हिसाब से बिकती हुई विचार कीजिए।

यदि प्रत्येक वस्तु के लिए समान रकमों में मुद्रा खर्च की जाती है

$$1 \quad I = \frac{(0.25 \times 4) + (0.10 \times 10)}{14} = \frac{2.00}{14} = 0.1429 \text{ डालर प्रति इकाई,}$$

अथवा 1 डालर की 7 इकाइया।

$$2 \quad H = \frac{2}{1\left(\frac{1}{0.25}\right) + 1\left(\frac{1}{0.10}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{0.50}} = \frac{1.00}{0.50} = 0.1429 \text{ डालर प्रति}$$

इकाई, अथवा 1 डालर की 7 इकाइया।

$$3 \quad X = \frac{(4 \times 1) + (10 \times 1)}{2} = \frac{14}{2} = 1 \text{ डालर की 7 इकाइया, या}$$

0.1429 डालर प्रति इकाई।

$$4 \quad H = \frac{14}{4\left(\frac{1}{4}\right) + 10\left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{14}{2} = 1 \text{ डालर की 7 इकाइया, या}$$

0.1429 डालर प्रति इकाई।

यदि प्रत्येक कीमत पर प्रत्येक वस्तु की समान रकम में इकाइया खरीदी जाना है

$$I \quad P = \frac{(0.25 \times 1) + (0.10 \times 1)}{2} = \frac{0.35}{2} = 0.175 \text{ डालर प्रति इकाई}$$

या 1 डालर की 5.71 इकाइया।

$$II \quad H = \frac{0.35}{0.25\left(\frac{1}{0.25}\right) + 0.10\left(\frac{1}{0.10}\right)} = \frac{0.35}{2}$$

= 0.175 डालर प्रति इकाई
या 1 डालर की 5.71 इकाइया।

$$\text{III } \bar{X} = \frac{(4 \times 0.25) + (10 \times 0.10)}{0.35} = \frac{2.00}{0.35} \\ = 1 \text{ डालर की } 5.71 \text{ इकाइयाँ,} \\ \text{या } 0.175 \text{ डालर प्रति इकाई।}$$

$$\text{IV. } H = \frac{2}{1\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{2}{\frac{14}{40}} = \frac{80}{14} \\ = 1 \text{ डालर की } 5.71 \text{ इकाइयाँ} \\ \text{या } 0.175 \text{ डालर प्रति इकाई।}$$

अभी-अभी जो कुछ कहा गया है उसमें यह देखा जा सकता है कि (दोनों में से किसी एक कल्पना के लिए) जब हम समान्तर माध्य का प्रयोग करते हैं यदि भार हर वाले रूप में हो, हम और हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं यदि भार भाग्य वाले रूप में हो। हाँ, यदि भार भाग्य वाले रूप में है तो उन्हें हर के रूप में बदला जा सकता है और समान्तर माध्य का प्रयोग किया जा सकता है।

कल्पना कीजिए कि एक सौदा हुआ जिसमें 40 रुमाल 1 डालर के 10 के हिसाब से और 60 रुमाल 1 डालर के 20 के हिसाब से बँचे गए। अब ऊपर दी गई दोनों में से किसी भी कल्पना में हमारी रुचि नहीं है। जब 40 रुमाल 1 डालर के 10 के हिसाब से और 60 एक डालर के 20 के हिसाब से बिकते हैं तो हम जो चाहते हैं वह मध्यमान कीमत है। दिए हुए भावों का प्रयोग करके (अर्थात् प्रति डालर इकाइयों की संख्या के रूप में) हम माया भागों के माध्य हरात्मक माध्य का प्रयोग कर सकते हैं। इस प्रकार

$$H = \frac{100}{40\left(\frac{1}{10}\right) + 60\left(\frac{1}{20}\right)} = \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7} \text{ प्रति डालर, अथवा} \\ 0.07 \text{ डालर प्रति इकाई।}$$

फिर प्रति डालर इकाइयों के रूप में भावों का प्रयोग करके, हम समान्तर माध्य के द्वारा उसी परिणाम पर पहुँच सकते हैं, यदि हमारे भार प्रत्येक खेती के लिए खर्च की गई मुद्रा की रकम है। इस प्रकार

$$\bar{X} = \frac{(10 \times 4) + (20 \times 3)}{7} = \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7} \text{ प्रति डालर, अथवा } 0.07 \text{ डालर} \\ \text{प्रति इकाई।}$$

यदि हम अपने भाव को प्रति इकाई मूल्य में बदल दें तो हमारे पास 40 रुमाल प्रति 0.10 डालर की दर से और 60 रुमाल प्रति 0.05 डालर की दर से बिकते हैं। अब, हरात्मक माध्य का प्रयोग करके, हम प्रत्येक प्रकार के रुमाल के लिए खर्च की गई मुद्रा की रकम के द्वारा भारित करते हैं। इस प्रकार

$$H = \frac{7}{4\left(\frac{1}{0.10}\right) + 3\left(\frac{1}{0.05}\right)} = \frac{7}{\frac{10}{0.10}} = 0.07 \text{ डालर प्रति इकाई, अथवा} \\ 14\frac{2}{7} \text{ प्रति डालर।}$$

अन्त में, प्रति इकाई मूल्यों के समान्तर माध्य का प्रयोग करके तथा वेची गई मायाओं द्वारा भारित करके, हमारे पास

$$\bar{X} = \frac{(0.10 \times 40) + (0.05 \times 60)}{100} = \frac{7}{100} = 0.07 \text{ डालर प्रति इकाई,} \\ \text{अथवा } 14\frac{2}{7} \text{ प्रति डालर, आता है।}$$

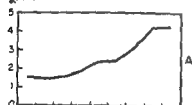
अनुप्रयोग (2) कभी-कभी एक बार-बारता बटन ऐसा भी आ सकता है जो दाईं ओर को इस प्रकार झुका हुआ है कि यदि इसे वर्ग मध्यमानों के व्युत्क्रमों के रूप में आलेखित किया जाए तो यह लगभग सामान्य रूप धारण कर लेता है। इस प्रकार के उदाहरणों में हरात्मक प्रतिपादन इंगित किया जा सकता है। परन्तु इस प्रकार की स्थितियाँ कुछ असामान्य हैं और उनका इस पुस्तक में प्रतिपादन नहीं किया जाएगा।

अनुप्रयोग (3) हाल्लुक् वर्किंग¹⁰ द्वारा एक लेख में हरात्मक माध्य का एक संचिकर और देखने में सही प्रयोग दिया गया है। आलुओ के मूल्य पर प्रभाव डालने वाले कारकों के अपने अध्ययन में, वर्किंग हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं, क्योंकि जैसा कि वे सकेत करते हैं, ऋतु के कुछ भाग में कम कीमत शेप ऋतु के दौरान केवल एक अनुपातिक ढँचे मूल्य द्वारा पूर्ण होगी। उदाहरणार्थ, हमने एक फसल वर्ष के लिए मासिक मूल्यों को चुना है और उन्हें चार्ट 9.5 में दिखाया है। जब व्युत्क्रमों अथवा लघुगणकों को आलेखित किया है तो अकण्ठितीय मूल्यों के आलेखन के समय की अपेक्षा वक्र अधिक सीधा हो गया है, व्युत्क्रमों से संभवतः सबसे अधिक सीधी रेखा प्राप्त हुई है। इससे सकेत मिलता है कि एक ऋतु के दौरान आलुओ के औसत मूल्य के माप के तौर पर हरात्मक माध्य अनुचित नहीं है।

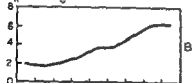
कभी-कभी यह तर्क दिया जाता है कि आँकड़ों की उन श्रेणियों के लिए जिनकी

निश्चित निम्न सीमा और अनिश्चित ऊपरी सीमा है गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया जाना चाहिए। ऐसे आँकड़ों का एक प्रकार मूल्य में संबंध रखता है, जो 100 के आधार के साथ शून्य पर गिर सकता है परन्तु असीम (∞) तक बढ़ सकता है। प्रश्न ऐसी सीमाओं के अस्तित्व का उतना नहीं है जितना इस बात का है कि वास्तव में कौनसे मूल्य उत्पन्न होते हैं और सीमाएँ कैसे प्राप्त होती हैं—अकण्ठितीय ढग से, गुणोत्तर ढग से या व्युत्क्रम ढग से—तथा क्या, यदि हम एक बार-बारता बटन का प्रतिपादन कर रहे हैं तो श्रेणी X के रूप में लगभग सममित है, लघु X के रूप में तिरछी, परन्तु लगभग सममित है, या $\frac{1}{X}$ के रूप में तिरछी परन्तु लगभग सामान्य है।

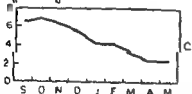
मूल्य सं. 10 में



मूल्य का लघुगणक



मूल्य का व्युत्क्रम



चार्ट 9.5 आलुओ का प्रति बुशल मूल्य A मूल्य, B मूल्य का लघुगणक, C मूल्य का व्युत्क्रम। आँकड़े हाल्लुक् वर्किंग से उक्ते, पृष्ठ 40।

अकण्ठितीय दृष्टि से, मूल्य की 33.3 प्रतिशत कमी (मूल आधार की) 33.3 प्रतिशत मूल्य वृद्धि से पूरी होती है, 50 प्रतिशत कमी 50 प्रतिशत वृद्धि से पूर्ण

10 हाल्लुक् वर्किंग, फैंक्टर्स डिटरमिनिंग दि प्राइस आफ पोर्टेज इन सेंट पाल एण्ड मिनिपोलिस, तकनीकी बुनेटिन 10, मिनेसोटा विश्वविद्यालय कृषि प्रयोग स्टेशन, पृष्ठ 9 तथा 10।

होती है, और 90 प्रतिशत गिरावट 90 प्रतिशत वृद्धि से पूरी होती है। इस प्रकार

$$\frac{66.7 + 133.3}{2} = 100,$$

$$\frac{50 + 150}{2} = 100,$$

$$\frac{10 + 190}{2} = 100.$$

गुणोत्तर दृष्टि से, मूल्य की 33.3 प्रतिशत कमी (मूल आधार की) 50 प्रतिशत वृद्धि से पूर्ण होती है, 50 प्रतिशत कमी 100 प्रतिशत वृद्धि से पूरी होती है और 90 प्रतिशत गिरावट 900 प्रतिशत वृद्धि से पूरी होती है। इस प्रकार

$$\sqrt{66.7 \times 150} = 100,$$

$$\sqrt{50 \times 200} = 100,$$

$$\sqrt{10 \times 1000} = 100.$$

व्युत्क्रम दृष्टि से, मूल्य की 33.3 प्रतिशत कमी (मूल आधार की) 100 प्रतिशत वृद्धि से पूरी होती है, 50 प्रतिशत कमी ∞ तक वृद्धि से पूर्ण होती है और 50 प्रतिशत से अधिक कमी कितनी भी बड़ी वृद्धि से पूरी नहीं की जा सकती। इस प्रकार

$$\frac{2}{\frac{1}{66.7} + \frac{1}{200}} = 100$$

$$\frac{2}{\frac{1}{50} + \frac{1}{\infty}} = 100.$$

केन्द्रीय प्रवृत्ति के कई एक अन्य माप हैं जो गणितीय तथा सैद्धान्तिक महत्त्व के हैं न कि व्यावहारिक महत्त्व के। इनमें से एक द्विघातीय माध्य है :

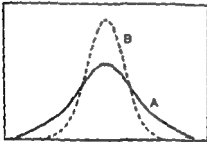
$$\sqrt{\frac{\sum X^2}{N}}$$

यह मूल्यों के वर्गों के समान्तर माध्य का वर्गमूल है। जब तक कि सभी मूल्य समान न हों द्विघातीय माध्य समान्तर माध्य से बड़ा होता है। द्विघातीय माध्य का यहाँ इसलिए जिक्र किया है क्योंकि यह प्रत्यय महत्त्वपूर्ण है। यद्यपि हम “द्विघातीय” अथवा ‘माध्य’ पद का प्रयोग नहीं करते, हम शीघ्र ही समान्तर माध्य में विचलनों के द्विघातीय माध्य का परिकलन करेंगे। यह केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप नहीं होगा, बल्कि प्रसार का माप होगा, हम इसे मानक विचलन, या s कहेंगे और इसकी अभिव्यक्ति है

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}.$$

विक्षपण, तिरछापन, तथा ककुदता

पिछले अध्याय में हमने कुछ मापों पर विचार किया है जिनमें बार-बारता बटन की केन्द्रीय प्रवृत्ति का वर्णन करने का प्रयत्न किया गया। बार-बारता बटनों के अ-प पहलू भी

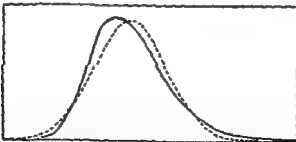


चार्ट 10.1 विभिन्न प्रसारों वाले दो बार-बारता वक्र।

है जो महत्वपूर्ण है। पहले हम प्रसार या आकड़ा के प्रसार पर विचार करेंगे। दो काउन्टियों में प्रत्येक में एक एकड़ में 15 बुशल गेहूँ की औसत उपज हो सकती है, परन्तु यदि आकड़ों पर चेत के अनुसार विचार किया जाए तो एक काउन्टी में प्रति एकड़ 10 से 20 बुशल के सीमा मूल्य दिखाई दे सकते हैं जबकि दूसरी में प्रति एकड़ 5 बुशल जितनी कम उपज तथा 25 बुशल जितनी ऊँची उपज दिखाई पड़ सकती है। यदि प्रसार का ऐसा अपरिष्कृत माप प्रयोग में लाया

जाए तो यह स्पष्ट है कि प्रथम काउन्टी में उपज की अधिक साम्यता है। चार्ट 10.1 में दो समान वक्र दिखाए गए हैं जिनका माध्य एक है परन्तु जिनमें प्रसार की भिन्नता है।

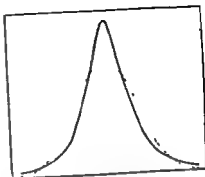
यदि एक बार-बारता वक्र या बार-बारता बटन सममित न हो तो इसे तिरछा या असममित कहा जाता है। अधिकतर बार-बारता बटन अधिक या कम तिरछे होते हैं।



चार्ट 10.2 दाईं ओर की तिरछा एक वक्र (गट्टी रेखा) तथा एक सममित वक्र (टूटी रेखा)।

चार्ट 10.2 में दो वक्र दिखाए गए हैं जिनमें से एक सममित है और एक तिरछा है। तिरछा वक्र दाईं ओर की तिरछा है—जिस दिशा में अधिक पूँछ दिखाई देती है।

वारवारता बटनो के वक्र सममित हो नकने हैं परन्तु वे विद्यमान ककुदता की मात्रा के सबध में एक दूसरे से भिन्न हो सकने हैं। सकेत का आधार अध्याय 23 में वर्णित सामान्य या मध्यककुदी वक्र है। एक तु गककुदी वक्र का केन्द्रीय भाग सामान्य वक्र की अपेक्षा अधिक तग और उमकी पूर्ण अधिक ऊँची होती हैं। इन दोनों की तुलना चार्ट 10 3 में दिखाई गई है। चार्ट 10 4 में एक चपटककुदी वक्र और एक सामान्य वक्र दिखाया है। जैसा कि स्पष्ट है, चपटककुदी वक्र का केन्द्रीय भाग अधिक चौड़ा और पूर्ण अधिक नीची है।

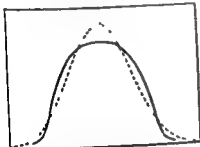


निरपेक्ष विक्षेपण के माप

लैक्सगटन, केन्टकी में माध्य वायविक तापमान 55 2 दर्जे है। सैनफ्रांसिस्को, कैलिफोर्निया में माध्य वायविक तापमान 55 7 दर्जे है जो लैक्सगटन के तापमान से बहुत कम भिन्न है। परन्तु दोनों नगरों की जलवायु सबधी स्थिति के इन पक्ष को दिखाने के लिए ये दो आंकड़े पर्याप्त नहीं हैं। यह विदित है कि लैक्सगटन में तापमान —20 दर्जे तक नीचे गिरता है और 108 दर्जे तक ऊँचा चढ़ता है। सैनफ्रांसिस्को में

चार्ट 10 3 एक तु गककुदी वक्र (घन रेखा) और एक सामान्य या मध्यककुदी वक्र (दूटी रेखा)।

अंकित किया गया कम से कम तापमान 20 दर्जे है और अधिकतम 104 दर्जे है। यह बिल्कुल स्पष्ट है कि सैनफ्रांसिस्को की अपेक्षा लैक्सगटन में तापमान की परिवर्तनशीलता अधिक है।



चार्ट 10 4 एक चपटककुदी वक्र (घन रेखा) तथा एक सामान्य या मध्यककुदी वक्र (दूटी रेखा)।

आइए, हम एक दूसरे उदाहरण पर विचार करें। एक बड़े विभागीय स्टोर के लिए एक क्रेता के सामने स्टोर में प्रयोग के लिए दो प्रकार के बल्ब प्रस्तुत किए जाते हैं। प्रत्येक विक्रेता अपने बल्बों के लिए समान औसत दाय-सबध का दावा करता है। क्रेता दोनों कम्पनियों के 40 वाट के लैम्पों के लिए एक परीक्षण प्रयोगशाला में आंकड़े

प्राप्त करता है और देखता है कि दोनों प्रकार के बल्बों में प्रत्येक की औसत आयु लगभग 1,000 घण्टे है। परन्तु और अधिक आंकड़ों के परीक्षण में पता चलता है कि बल्बों की एक श्रेणी में एक लैम्प 325 घण्टे जला जब कि एक 1,570 घण्टे ठहरा। दूसरी श्रेणी में एक लैम्प 105 घण्टे ठहरा जब कि एक 2 910 घण्टे बीतने पर बुझा। इस सीमित जानकारी से पहली श्रेणी के लैम्पों में समानता की अधिक मात्रा का भवेत मिलता है।

परिसर—विक्षेपण का माप मोटे तौर पर न्यूनतम और अधिकतम मूल्यों के सकेत से किया जा सकता है जैसा कि इसमें पूर्व के अनुच्छेदों में किया गया। यह एक अत्यन्त सरल और समझने के लिए आसान माप है। परिसर में आंकड़ों का विस्तृत मूल्य मिलता है क्योंकि इसमें वे सीमाएँ सम्मिलित हैं जिनके अन्दर सब भवेत आइए। तथापि परिसर की

कुछ हानिया हैं। यह दा चरम मूल्या¹ व बीच के मूल्या के प्रवृत्ति को महत्व दान में असफल है। साथ ही, यदि सीमा के मूल्या में स एक भी असाधारणता तो परिस्तर भ्रामक है।

सारणी 10.3 में उदाहरण का विचारविमर्श के अंश के संबंध में यह कहा गया है कि परिस्तर 74.95 (प्रथम श्रेणी की निचली सीमा) से 98.95 (अन्तिम श्रेणी की ऊपरी सीमा) तक है। यदि हम मर्गों की आगे मकेन वर मक्त हैं, जैसा कि सारणी 8.2 में है, तो परिस्तर को कुछ अधिक शुद्ध रूप में 76.5 से 98.3 तक कहा जा सकता है। बारवारता बढ़ने में परिस्तर हम केवल मात्र यह बताना है कि वर्ग में किसी को 74.95 से कम तथा 98.95 से अधिक अंश नहीं मिला। परिस्तर प्रायः दा चरम मूल्या के बीच का अन्तर कहलाता है। विचारविमर्श के लिए 98.95 - 74.95 = 24.00। परन्तु यदि केवल यह अकेला अंक दिया जाना है तो हम यह विदित नहीं होता कि परिस्तर 0 से 24 है, या 70 से 94 है, या सीमाएँ बराबरी।

10—90 शततमक परिस्तर—कभी-कभी हमारी उम परिस्तर को जानने की रुचि होती है जिसके नीचे मर्दा का निश्चय अनुपात आता है। एक ऐसा परिस्तर जो कभी-कभी शैक्षणिक माप में प्रयुक्त होता है 10—90 शततमक परिस्तर है। यह माप निम्नतम 10 प्रतिशत तथा उच्चतम 10 प्रतिशत छोड़ देता है और व दो मूल्य बताता है जिनके भीतर केन्द्र की 80 प्रतिशत मद आती है। हा 10वां शततमक प्रथम दशमक है और 90वां शततमक 9वां दशमक है। वा भी इस माप की ओर 10—90 शततमक परिस्तर के तौर पर मकेन किया जाता है न कि 1—9 दशमक परिस्तर के तौर पर, क्योंकि पहले से केन्द्रीय 80 प्रतिशत का विचार अधिक स्पष्ट है।

जैसा कि परिस्तर में है 10—90 शततमक परिस्तर सीमा के मूल्या से प्रभावित नहीं होता। परन्तु हम माप में एक बहुत गंभीर कमी है क्योंकि यह मर्दा के मूल्या का प्रयोग नहीं करता। परिणामस्वरूप 10वां शततमक के नीचे (या 90वां शततमक के ऊपर) के मूल्य साथ साथ निकट इकट्ठे हो सकते हैं या विस्तृत फैल सकते हैं, 10—90 शततमक परिस्तर पर एकसमान प्रभाव होगा। तथा 10वां शततमक और 90वां शततमक के बीच के मूल्या की किसी भी संभव दृष्टि से व्यवस्था की जा सकती है जब तक कि वे 10वां और 90वां शततमक के बीच में रहें।

चतुर्थक विचलन—अध्याय 9 में Q_1 तथा Q_3 निचले और ऊपरी चतुर्थक, का उल्लेख किया गया था। इन मूल्या पर आधारित विक्षेपण का एक माप चतुर्थक विक्षेपण अथवा अर्ध अन्त चतुर्थक परिस्तर कहलाता है। यह $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ द्वारा प्राप्त होता है।

यदि एक श्रेणी सममित है तो यह स्पष्ट है कि Q_1 और Q_3 माध्यिका से समान अन्तर पर हैं। अतः यदि हम माध्यिका में $\pm Q$ मापें तो हम श्रेणी की 50 प्रतिशत मदें सम्मिलित करते हैं क्योंकि हमने पीछे Q_1 और Q_3 की ओर मापा है। यदि एक श्रेणी तिरछी है, जैसा कि प्रायः मर्दा होता है, तो हम $\pm Q$ माध्यिका के इर्दगिर्द ले सकते हैं, और जबकि हम Q_1 या Q_3 किसी पर भी नहीं पहुँचें, हम लगभग 50 प्रतिशत मदों को सम्मिलित करने की आशा कर सकते हैं, यदि तिरछापन अधिक न हो।

1. यह स्पष्ट होना आवश्यक है कि जब $N=2$, तो यह कठिनाई नहीं आती। एक सामान्य जनसंख्या के छोटे प्रतिदर्शों के लिए यह कम महत्वपूर्ण है।

चतुर्थक विचलन, 10—90 शतनमक परिसर के समान, सीमा के मूल्यों से प्रभावित नहीं होता, और सब मदों के मूल्यों को विचाराधीन लाने में असफल है।

औसत विचलन—औसत विचलन अथवा माध्य विचलन, जैसा कि यह कभी-कभी कहलाता है, प्रायः समान्तर माध्य के सबध में मापा जाता है। समान्तर माध्य से मदों के विचलनों का, चिह्नों का ध्यान किए बिना, जोड़ लेकर और उसे मदों की सख्या से भाग करके औसत विचलन प्राप्त किया जाता है। आपको यह स्मरण होगा कि $\sum x = 0$ और यही कारण है कि विभिन्न १ मूल्यों के चिह्नों की ओर ध्यान नहीं दिया जाता। इस प्रकार,

$$AD = \frac{\sum x}{N},$$

अथवा, बारबारता बटन के लिए,

$$AD = \frac{\sum f |x|}{N},$$

जहाँ $| |$ का अर्थ यह है कि चिह्नों की ओर ध्यान नहीं दिया गया। क्योंकि विचलनों का जोड़ (चिह्न छोड़कर), जब उसे माध्यिका के इदगिदं लिया जाए, न्यूनतम है, इसलिए माध्य विचलन का परिकलन कभी कभी माध्यिका के सबध से किया जाता है। परन्तु व्यवहार में प्रायः माध्य का प्रयोग किया जाता है और यदि श्रेणी सममित है तो परिणाम-स्वरूप AD समान होता है। क्योंकि AD की उपयोगिता भागे वंशित प्रसार के माप की तुलना में सीमित है, इसलिए यहाँ AD का परिकलन नहीं दिखाया है। एक बारबारता बटन के लिए AD के निर्धारण का निदर्शन मूल अंग्रेजी पुस्तक के प्रथम संस्करण में पृष्ठ 236 और 239 पर किया गया है।

यदि बटन सामान्य है तो 57.5 प्रतिशत मदें $\pm AD$ के परिसर में सम्मिलित की जाती हैं। यदि बटन मामूली तिरछा है तो यह लगभग सत्य होगा।

मानक विचलन, असमूहित आंकड़ों—समान्तर माध्य में विचलनों के चिह्नों को केवल छोड़ देने के स्थान पर हम विचलनों के वर्ग बना सकते हैं और इस प्रकार उन सबको घनारमक बना सकते हैं। इस प्रकार, हमारे पास एक माप आ सकता है

$$s^2 = \frac{\sum x^2}{N},$$

विचरण या माध्य वर्ग विचलन। (बाद में $\sum x^2$ का संकेत करने के लिए हम विचरण पद का प्रयोग करेंगे।) s^2 बटन का दूसरा घूर्ण σ_2^2 , भी कहलाता है क्योंकि विचलनों को दूसरी शक्ति तक बढ़ा दिया गया है। हम पुस्तक के बाद के भागों में विचरण का प्रयोग करेंगे।

यहाँ हमारी रुचि इस माप के वर्गमूल में है,

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}},$$

जिसे मानक विचलन या कभी-कभी मूल-माध्य-वर्ग विचलन कहा जाता है। यह पहले संकेत किया जा चुका है कि जब समान्तर माध्य के इदगिदं लिया जाए तो $\sum x^2$ न्यूनतम

सारणी 10 1

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

व्यजक के प्रयोग मे विज्ञापित उत्पादनो के व्यापार नामो को स्मरण करने मे 15 व्यक्तियो के प्राप्ताकों क निम्न मानक विचलन का परिकलन

व्यक्ति	प्राप्ताक X	x	x^2
1	12	- 20 87	435 56
2	21	- 11 87	140 90
3	21	- 11 87	140 90
4	23	- 9 87	97 42
5	27	5 87	34 46
6	28	- 4 87	23 72
7	30	- 2 87	8 24
8	34	1 13	1 28
9	37	4 13	17 06
10	39	6 13	37 58
11	39	6 13	37 58
12	39	6 13	37 58
13	40	7 13	50 84
14	49	16 13	260 18
15	54	21 13	446 48
जोड़	493	---	1,769 78

एत० एन० ल्यूहल तथा एम० एच० हीम के नमरि वेब्यू आफ एम्पायूड साइड इन मेथरीज एडवोर्शिय । जर्मन साफप्लाईड साइकालोजी पृष्ठ 13 पृष्ठ 62-75 । ऊपर के मानक प्रति 150 वग इव फिकापको के निम्न ये और प्रत्येक का प्रमाण 5 सेकंड के लिए किया गया । अधिकतम समय प्राप्ताक 81 वा ।

$$\bar{x} = \frac{493}{15} = 32.87$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} = \sqrt{\frac{1,769.78}{15}} = \sqrt{117.98} = 10.9$$

है ।² प्रति मानक विचलन का मदा समानतर माध्य के सकेत से परिकलन किया जाता है । जैसा कि ऊपर के व्यजक मे सकेत है, s के परिकलन मे आने वाले पग हैं

- (1) \bar{x} से प्रत्येक मर का विचलन x निर्धारित कीजिए,
- (2) इन विचलना के वर्ग बनाइए,
- (3) उनका जोड़ कीजिए,

(4) इस योग को V से भाग कीजिए,

(5) वर्गमूल निकालिए।

अवर्गित आँकड़ों की एक श्रेणी के लिए s की परिकलन तालिका 10.1 में दिखाई है। इस प्रविधि में प्रत्येक पद के लिए x का परिकलन आता है और यदि मदे अधिक सख्या में हो तो यह कुछ परिश्रमपूर्ण प्रविधि होगी। s का मूल्य, प्रत्येक x का परिकलन किए बिना, निम्न व्यंजक³ के द्वारा प्राप्त किया जा सकता है

$$s = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2}$$

इस छोटी विधि से s के परिकलन का निरूपण मारगुी 10.2 में किया गया है।

ध्यान दीजिए, कि मशोधन $\left(\frac{\sum X}{N}\right)^2$ घटाया गया है। यह सर्वदा सत्य है। वर्गीकृत विचलनों का जोड़ उस समय न्यूनतम होता है जब वे X के इर्दगिर्द लिए गए हों। परन्तु हमने अपने विचलन कुछ अन्य मूल्यों के इर्दगिर्द लिए (इस उदाहरण में, 0) और ये वर्गित विचलन इसलिए बहुत बड़े हैं।

मारगुी 10.1 के संकेत से यह दिखाई देगा कि X का मूल्य दो दशमलव तक पूर्णांकित किया गया और इस प्रकार x तथा x^2 का प्रत्येक मूल्य एक सन्निकटन है। यदि \bar{X} तथा \bar{x} पर्याप्त अंको तक दिलाए गए हैं तो दोनों विधियों से परिणाम समान होगा। यहाँ दोनों विधियों में परिणाम 10.9 आता है।

यहाँ यह ध्यान करना अच्छा होगा कि s प्रतिवर्ग में प्रसार का माप करता है। अध्याय 24 में हम σ , जनसंख्या मानक विचलन, और एक प्रतिदर्श पर आधारित जनसंख्या मानक विचलन के एक अनुमान σ , का विवरण देंगे।

मानक विचलन, समूहित आँकड़ों— s की विशेषताओं पर विचार करने से पूर्व आइए हम देखें कि एक बारबारता बटन के लिए s का परिकलन कैसे किया जाए। क्योंकि बारबारताएँ उपस्थित हैं,

$$s = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N}}$$

जहाँ x माध्य से वर्ग मध्यमान के विचलन का प्रतिनिधित्व करता है। मारगुी 10.3 उदाहरण कला विद्यालयों के लिए s के परिकलन का निरूपण करती है। यह पर्याप्त स्पष्ट है कि यह विधि, जिसमें कई x मूल्यों का निर्धारण आता है, जटिल है।

s के लिए एक छोटी विधि प्राप्य है जिसमें किसी वर्ग का मध्य-मान कल्पित माध्य के रूप में लेने, इस मूल्य के इर्द-गिर्द विचलनों पर कार्य करने और आवश्यक शोधन करने की अनुमति है। व्यंजक है

$$s = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$$

सारणी 10 2

$$s = \sqrt{\frac{\sum Y^2}{N} - \left(\frac{\sum Y}{N}\right)^2}$$

व्यजक के प्रयोग से विश्लेषित उत्पादनों के व्यापार नामों को स्मरण करने से 15 व्यक्तियों के प्राप्तियों के लिए मानक विचलन का परिकलन

व्यक्ति	प्राप्तांक λ	λ
1	12	144
2	21	441
3	21	441
4	23	529
5	27	729
6	28	784
7	30	900
8	34	1 156
9	37	1 369
10	39	1,521
11	39	1,521
12	39	1 521
13	40	1,600
14	49	2,401
15	54	2,916
कुल	493	17 973

जोकि सारणी 10.1 वाले ताल में लिए गए ।

$$\begin{aligned}
 s &= \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{17,973}{15} - \left(\frac{493}{15}\right)^2} \\
 &= \sqrt{1\,198\,20 - 1,080\,22} = \sqrt{117\,98} \\
 &\approx 10\,9
 \end{aligned}$$

प्रक्रिया को और छोटा करने के लिए, विचलनों को वर्गों के रूप में लिया गया है जिससे आता

$$s = \sqrt{\frac{(\sum fd)^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$$

है,⁴ जिसमें d' कल्पित माध्य से वर्ग माध्य-मान के विचलन का वर्गों के रूप में संकेत करता

4 निरूपण के लिए, परिशिष्ट छ परिच्छेद 10 2 देखिए ।

है और 1 वगै-अन्तर्गत है। यह ध्यान करना रुचिकर है कि शोधन कारक $\left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2$ छोटी विधि से समान्तर माध्य के परिकलन म प्रयुक्त शोधन कारक का वग है। छोटी प्रविधि से s का परिकलन सारणी 10 4 मे दिवाया गया है।

मानक विचलन के गुणधर्म—निम्नलिखित विभिन्न वर्णित मापा म से मानक विचलन (और इसका वगै, प्रसरण) सर्वाधिक महत्वाग है। इसके बाद वर्णित विभिन्न सांख्यिकीय विधियों के सबध म इसका प्रयोग किया जाग्या। एक महत्त्वपूर्ण विचार यह है कि यह अध्याय 23 मे वर्णित सामा य त्र और विभिन्न निरन्तर वक्रों के लिए समीकरण मे आने वाले कारको म से एक है। इसका व्यापार चक्र का विक्षेपण के सबध मे और सहसबध मे विशिष्ट सांख्यिकीय मापो की विश्वस्तता का आकलन मे भी प्रयोग किया जाता है।

सारणी 10 3

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i}{N}}$$

व्यजक के प्रयोग द्वारा रूगस स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उदार कला स्नातको के प्रेडो के लिए मानक विचलन का परिकलन

श्रेड	विद्यार्थियों वर्गों के मध्य की सरासरी मान X	$x = X - 1$	x^2	fx^2	
75 0—76 9	3	75 95	— 9 22	85 0084	255 0252
77 0—78 9	23	77 95	— 7 22	52 1284	1,198 9532
79 0—80 9	52	79 95	— 5 22	27 2484	1 416 9163
81 0—82 9	61	81 95	— 3 22	10 3684	632 4724
83 0—84 9	74	83 95	— 1 22	1 4884	110 1416
85 0—86 9	61	85 95	+ 0 78	0 6034	37 1124
87 0—88 9	53	87 95	+ 2 78	7 7284	409 6052
89 0—90 9	35	89 95	+ 4 78	22 8484	799 6940
91 0—92 9	23	91 95	+ 6 78	45 9684	1,057 2732
93 0—94 9	15	93 95	+ 8 78	77 0884	1,156 3260
95 0—96 9	7	95 95	+ 10 78	116 2084	813 4588
97 0—98 9	2	97 95	+ 12 78	163 3284	326 6568
कुल	409				8 213 6356

$$s = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N}} = \sqrt{\frac{8\ 213\ 6356}{409}} = \sqrt{20\ 0522} = 4\ 46$$

$$s = 85\ 17$$

सारणी 10.4

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(d)^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2}$$

व्यजण के प्रयोग से हगर्स यूनिवर्सिटी के 1965 के व्यापारी उदार कता ग्रुडों के लिए मानक विचलन का परिकलन

ग्रुड	वित्ताधियों की मख्या f	d	fd	f(d) ²
75.0—76.9	3	-4	-12	48
77.0—78.9	23	-3	-69	207
79.0—80.9	52	-2	-104	208
81.0—82.9	61	-1	-61	61
83.0—84.9	74	0		
85.0—86.9	61	+1	+61	61
87.0—88.9	53	+2	+106	212
89.0—90.9	35	+3	+105	315
91.0—92.9	23	+4	+92	368
93.0—94.9	15	+5	+75	375
95.0—96.9	7	+6	+42	252
97.0—98.9	2	+7	+14	98
कुल	409		+249	2,205

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(d)^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{2,205}{409} - \left(\frac{249}{409}\right)^2}$$

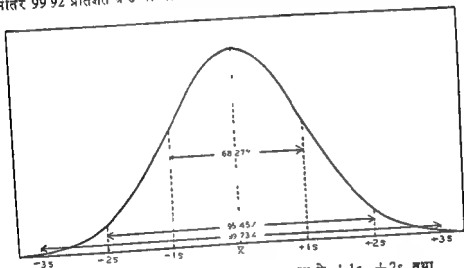
$$= 2\sqrt{5.020561 - 2(2.241)}$$

$$= 4.48$$

ग्रुडों की श्रेणी के प्रसार में से मानक विचलन सर्वाधिक बहुलता से प्रयुक्त होने वाला माप है। यदि $\pm s$ को एक सामान्य बटन के समान्तर माध्य से मापा जाए तो 68.27 प्रतिशत में सम्मिलित होती है, $\pm 2s$ के परिसर में 95.45 प्रतिशत सम्मिलित होती है, और $\pm 3s$ में 99.73 प्रतिशत⁵ या लगभग सभी में सम्मिलित होती है। चार्ट 10.5 में जो अभी-अभी कहा गया है उसका निरूपण है। अभी दो गई प्रतिशतताओं का सबसे एक सामान्य बक की ओर है। यदि बटन तिरछा हो तो ये प्रतिशतताएँ केवल लगभग ठीक होगी। विश्लेषणों के ग्रुडों के लिए (सारणी 10.4), $\pm s$ है 85.17 \pm

5 परिशिष्ट 2 वही जिसमें सामान्य बक के केन्द्रीय भाग के बाईं से संकलित दिए गए हैं। अधिक शृङ्ख से 68.27 दूना है 34.13447 का, 95.45 दूना है 47.72499 का, 99.73 दूना है 49.86501 का।

4.48 - 80.69 तथा 89.65। सारणी 10.4 में विद्यार्थियों का, जो 80.69 और 89.65 के बीच में आते हैं, अनुपात निर्गमन रूप से जानने के लिए हम पहले 80.69 और 80.95 के बीच में आने वाली संख्या (तीसरे वर्ग की ऊपरी सीमा) निर्धारित करते हैं जो 6.8 है; तब हम अगले चार वर्गों में सब बारबारनाएँ सम्मिलित करते हैं जिसके बाद हम 88.95 (आठवें वर्ग की निचली सीमा) और 89.65 के बीच की संख्या का परिकलन करते हैं जो 12.3 है। योग 268.1 या 65.6 प्रतिशत है। $\bar{X} \pm 2s$ के भीतर (अर्थात् 76.21 से 94.13 तक) हमें 392.0 या 95.8 प्रतिशत ग्रेड प्राप्त हैं। $\bar{X} \pm 3s$ (71.73 से 98.51 तक) के भीतर 99.92 प्रतिशत ग्रेड सम्मिलित हैं।



चार्ट 10.5 एक सामान्य वक्र में समान्तर माध्य के $\pm 1s$, $\pm 2s$, तथा $\pm 3s$ के भीतर सम्मिलित भवों का अनुपात।

बाद के अध्यायों में सामान्य वक्र पर विचार करने में हम माध्य के $\pm s$, $\pm 2s$, तथा $\pm 3s$ में सम्मिलित अनुपातिक क्षेत्रों तक अपने आपको सीमित नहीं रखेंगे, परन्तु s के किन्हीं वांछित गुणों पर विचार करेंगे। उदाहरणार्थ, बाद में हमारी यह जानने में सचि होगी कि 95 प्रतिशत भवें $\bar{X} \pm 1.96s$ के भीतर पाई जाएँ और 99 प्रतिशत $\bar{X} \pm 2.58s$ के भीतर हों। वास्तव में हमारी अधिक सचि वर्णित सीमाओं, अर्थात् 5 प्रतिशत और 1 प्रतिशत, के परे के अनुपातों में होगी।

निरपेक्ष विक्षेपण का विषय छोड़ने से पूर्व यह सकेत करना सचिकर हो सकता है कि मानों की किमी श्रेणी के लिए, फिर उनका बटन चाहे कैसे भी क्यों न हो, चेबीचेफ की असमता से यह दिखाया जा सकता है कि $\bar{X} \pm Ms$ की सीमाओं के भीतर आने वाले मानों का अनुपात (जहाँ M का मूल्य 1 से अधिक है) $1 - \frac{1}{M^2}$ से अधिक होगा, और $\bar{X} \pm Ms$ की सीमाओं के परे का अनुपात $\frac{1}{M^2}$ से कम होगा। यदि एक बटन एव-बहुलकी है और यदि बहुलक और माध्य के बीच का अन्तर s से अधिक नहीं है तो कैंप-मीडल असमता कहती है कि $1 - \frac{1}{2.25M^2}$

से अधिक मान $\bar{X} \pm Ms$ के भीतर है और $\frac{1}{2.25M^2}$ से कम मान $\bar{X} \pm Ms$ से परे पड़ते हैं।

जितना अधिक एक श्रेणी वा विक्षेपण होगा, उतना ही अधिक s का मूल्य होगा। मापी गई विवेकता की साम्यता के माप के तौर पर, जितना कम s का मूल्य होगा उतनी ही अधिक साम्यता होगी। यह प्रतिलोभ संबंध दूर रखने के लिए, कभी-कभी एक सुधार जिसे मृदयता का माप कहा जाता है, प्रयोग किया जाता है,

विशेषकर भौतिक मापों की श्रेणी की सूक्ष्मता के संबंध में। यह माप $1/s^2 = \frac{1}{2s^2}$

है। यह सामाजिक विज्ञानों में सत्यापन कार्य में प्रायः प्रयोग में नहीं आता।

सापेक्ष विक्षेपण के माप

पहले के अनुच्छेदों में हमने निरक्षेप विक्षेपण के मापों का विवेचन किया है जिनमें से प्रत्येक की समस्या की इकाइयों के रूप में व्यक्त किया गया है। ये इकाइयाँ डालर, पाउंड, इंच, प्रतिशतताएँ इत्यादि हो सकती हैं। जब हम दो या अधिक श्रेणियों के प्रकारों की तुलना करना चाहते हैं तो इस प्रकार के माप का प्रयोग हो सकता है, वांछनीय हो या न हो। दो या अधिक श्रेणियों के विक्षेपणों की तुलना का तात्पर्य तीन संभव स्थितियाँ हो सकती हैं

(1) तुलना की जाने वाली श्रेणियों को समान इकाइयों में व्यक्त किया जाए और माध्य आकार में समान, या लगभग समान, हो सकते हैं। उदाहरण के लिए विद्यार्थियों के प्रश्नों का माध्य 85.17 आया और मानक विचलन 4.48 हुआ। यदि एक अन्य स्नातक होने वाली कक्षा के लिए $\bar{x} = 85.05$ तथा $s = 4.25$ हुआ तो यह स्पष्ट है कि द्वितीय कक्षा कम विक्षेपण दर्शाएगी।

(2) तुलना की जाने वाली श्रेणियों को समान इकाइयों में व्यक्त किया जा सकता है परन्तु समानतर माध्य भिन्न हो सकते हैं। कुछ वर्ष पहले एक टायर कम्पनी ने मोटर गाड़ी के टायरों के लिए एक नए प्रकार की डोरी विकसित की। नई डोरी मापारण डोरी से हम दृष्टि में बढ़िया थी कि यह अधिक खिंच सकती थी और इसकी नति प्रायः अधिक लम्बी थी। कपाम की फैक्टरी में प्राप्त हुई डोरी पर टायरों में गढ़ाई से पूर्व किए गए परीक्षणों से नई डोरी की नति प्रायः के संबंध में पता चला

$$\bar{x} = 138.64 \text{ मिनट, तथा } s = 15.27 \text{ मिनट,}$$

जब कि सामान्य डोरी के आंकड़े थे

$$\bar{x} = 87.66 \text{ मिनट, तथा } s = 14.12 \text{ मिनट।}$$

यदि हम दोनों s मानों की तुलना करें तो यह प्रतीत होता है कि नति जीवन की दृष्टि से नई डोरी सामान्य डोरी की अपेक्षा अधिक परिवर्तनशील है। तो भी यह ध्यान देना आवश्यक है कि नई डोरी का औसत नति जीवन सामान्य डोरी की अपेक्षा कहीं अधिक है। इस बात पर विचार करते हुए हम सापेक्ष विक्षेपण का एक माप निकाल सकते हैं,

$$V = \frac{s}{\bar{x}}$$

यह विचरण गुणांक है और इसे प्रायः प्रतिशतता के तौर पर व्यक्त किया जाता है। नई डोरी के लिए

$$V = \frac{15 \cdot 27}{138 \cdot 64} = 0.1101 \text{ अथवा } 11.0 \text{ प्रतिशत,}$$

जबकि सामान्य डोरी के लिए

$$V = \frac{14 \cdot 12}{87 \cdot 66} = 0.1611 \text{ अथवा } 16.1 \text{ प्रतिशत।}$$

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि नति जीवन का मापन विचरण नई डोरी के लिए सामान्य डोरी की अपेक्षा कहीं कम है।

चार्ट 10.6 भी दो भिन्न माध्य मानों वाली श्रेणियों के विक्षेपणों की तुलना का निदर्शन करता है। परिच्छेद A में ममान निरपक्ष विक्षेपणा परन्तु भिन्न सापक्ष विक्षेपणों वाले दो बटनों के वक्र हैं। परिच्छेद B में निम्नान्न भिन्न निरपक्ष विक्षेपण किन्तु समान सापक्ष विक्षेपण वाले दो बटनों के वक्र हैं। यदि नृत्य का समतल पैमाने पर दिखाया जाता है जैसा कि चार्ट 10.6 में है तो एक श्रेणी के सापक्ष विक्षेपण का एक बहुत मोटा दृष्टि प्रभाव हो सकता है। इस कारण में कुछ माणविकीविदा का विचार है कि शून्य को समतल पैमाने पर दिखाना वाछनीय है। परन्तु यह बहुत महत्वपूर्ण बात प्रतीत नहीं होती, क्योंकि सापक्ष विक्षेपण को सर्वोत्तम ढंग से केवल लगभग रूप से ही देखा जा सकता है। कभी-कभी, मूल इकाइयों के रूप में नहीं बल्कि मा. य. की प्रतिशतताओं के तौर पर व्यक्त वगैरह अन्तरालों से बार-बार बटन बनाए जाते हैं जबकि अन्तर्गत के कुछ सुविधाजनक आँकड़े, जैसे कि माध्य का 10 प्रतिशत, होते हैं। यदि दो ऐसे बटन एक चार्ट पर अंकित किए जाएँ तो उनके सापक्ष विक्षेपणों की दृष्टिगत तुलना करना सरल है।

(3) तुलना की जाने वाली श्रेणी को विभिन्न इकाइयों में व्यक्त किया जा सकता है। ऐसी स्थिति में मानक विचलनों की सीध तुलना नहीं की जा सकती। पुरुष औद्योगिक श्रमिकों की एक सरया के अध्ययन से प्रति मिनट 81। स्पंदन औसत नाड़ी दर और प्रति मिनट लगभग 12.2 स्पंदन के मानक विचलन का पता चला। जैम्स के मापों में $\Delta = 66.9$ इंच और $s = 2.7$ इंच विदित हुए। जैम्स के मापों में छोटी संख्या में ऐसे व्यक्ति भी आए जिनकी नाड़ी दर नहीं मापी गई। अपने उदाहरण के प्रयोजन के लिए आइए हम इन कठिनाई को छोड़ दें। औद्योगिक श्रमिकों में नाड़ी दर की दृष्टि से अधिक भिन्नता है या जैम्स की दृष्टि से? स्पष्ट है कि भिन्न इकाइयों में होने के कारण दोनों मानक विचलनों की तुलना नहीं की जा सकती। विभिन्नता के दो गुणांकों का परिकलन करने से, नाड़ी दर के लिए

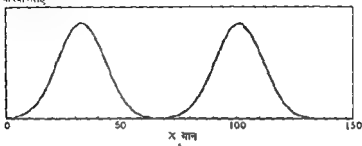
$$V = \frac{12.2}{81.1} = 0.149, \text{ अथवा } 14.9 \text{ प्रतिशत,}$$

तथा जैम्स के लिए

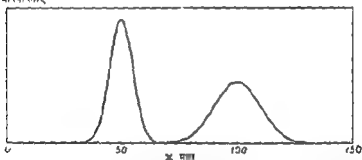
$$V = \frac{2.7}{66.9} = 0.040, \text{ अथवा } 4.0 \text{ प्रतिशत}$$

का पता चलता है। स्पष्ट है कि मनुष्यों के इस दल के लिए नाडी दर ऊँचाई की अपेक्षा अधिक विक्षेपणशील है।

सारसारताएँ



सारसारताएँ



चार्ट 10 6 भिन्न समान्तर माध्यों वाली श्रेणियों के वितरणों की तुलनाएँ। A समान विक्षेपण, भिन्न सापेक्ष प्रसार काय वक्र, $\bar{X}=33$, $s=10$, $V=30.3$ प्रतिशत, दक्षिण वक्र, $\bar{X}=101$, $s=10$, $V=9.9$ प्रतिशत। B भिन्न विक्षेपण, समान सापेक्ष विक्षेपण काय वक्र, $\bar{X}=50$, $s=5$, $V=10$ प्रतिशत, दक्षिण वक्र, $\bar{X}=100$, $s=10$, $V=10$, प्रतिशत। (परिच्छेद A और B के ऊर्ध्वोपर समाने भिन्न हैं क्योंकि इसकी तुलना अपेक्षित नहीं है। तथ्यादि यदि परिच्छेद B का ऊर्ध्वोपर समाना 50 प्रतिशत बढ़ा दिया जाए तो सब वक्रों का क्षेत्रफल समान हो जाएगा।)

सापेक्ष विक्षेपण के हमारे माप के कुछ-कुछ समान एक निश्चित मान को माध्य से उसके प्रसरण के रूप में तथा श्रेणियों के विक्षेपण के रूप में भी व्यक्त करने की संभावना है। जब हम केवल एक मान का विचार करते हैं अथवा एक ही श्रेणी के दो मानों की तुलना करते हैं तो इस प्रकार की विविध विशेष रूप से उपयोगी नहीं होती। इसकी उपयोगिता तब स्पष्ट हो जाती है जब हम भिन्न श्रेणियों के दो मानों की तुलना करना चाहते हैं और जब वे दो श्रेणियाँ (1) \bar{X} प्रथवा s अथवा दोनों की दृष्टि से भिन्न हों, प्रथवा (2) विभिन्न इकाइयों में व्यक्त की गई हों। कल्पना कीजिए कि एक विशेष विद्यार्थी ने बुद्धि-परीक्षण में 180 का स्तर प्राप्त किया और उसके वर्ग से $\bar{X}=160$ तथा $s=15$ प्राप्त हुए। इसी विद्यार्थी ने इतिहास में 86 का स्तर प्राप्त किया और वर्ग से $\bar{X}=70$ और $s=12$ प्राप्त हुए। हमारी यह जायने में रुचि है कि उसकी सापेक्ष स्थिति बुद्धि-परीक्षण में श्रेष्ठ है या इतिहास में। बुद्धि-परीक्षण में वह माध्य से 20 बिन्दु ऊपर था और इतिहास में वह

माध्य से 16 बिन्दु ऊपर था। तथापि ये विचलन तुलना योग्य नहीं है परन्तु इन्हें अपने-अपने मानक विचलनों से माप कर तुलना योग्य बनाया जा सकता है। इस प्रकार

$$\text{बुद्धि परीक्षण} \quad \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{180 - 160}{15} = \frac{+20}{15} = +1.33,$$

$$\text{इतिहास} \quad \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{86 - 70}{12} = \frac{+16}{12} = +1.33$$

स्पष्ट है कि वह विद्यार्थी इतिहास में और बुद्धि परीक्षण में समान मापदृश्य स्थिति अर्थात् प्रत्येक में माध्य से +1.33 अधिक दर्जा है। इस विधि की उपयोगिता किसी भी प्रकार से शिक्षा क्षेत्र तक ही सीमित नहीं है। परन्तु परीक्षण सामग्री में साथ-साथ इसका प्रयोग होता है और तब इसे 'मानक भ्रम' कहा जाता है।

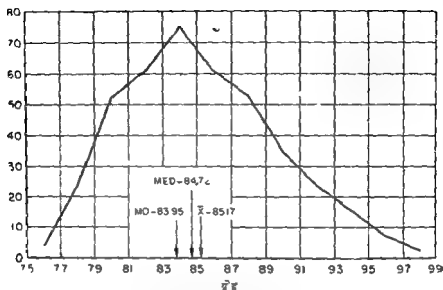
तिरछापन

जब एक श्रेणी सममित नहीं है तो इसे असममित अथवा तिरछी कहते हैं। चाट 10.2 में एक तिरछे वक्र को एक सममित वक्र के सदृश से दिखाया गया। उदार बना छात्रों के प्रश्नों का वक्र (चाट 10.7) तिरछा है। तिरछापन के माप में न केवल तिरछापन की मात्रा का बल्कि उसकी दिशा का भी संकेत मिलता है। एक श्रेणी चरम मूल्यों की दिशा में तिरछी कही जाती है अथवा, यदि वक्र के रूप में कहा जाय, तो अतिरिक्त सिंगे की दिशा में। इस प्रकार जिन दो वक्रों की ओर ऊपर सेकेन किया गया है वे दोनों निश्चिन्न रूप में अथवा दाहिनी ओर तिरछे हैं। सामाजिक विज्ञानों में आने वाले अधिकतर तिरछे वक्र दाहिनी ओर की तरफ ह्राते हैं। चाट 10.8 के समान, बाई ओर का तिरछे, वक्र कम ही होते हैं और विशेष रूप से बाई ओर की तिरछे झुकड़े और भी कम मिलते हैं।

परन्तु बहुत सी श्रेणियाँ विशेष रूप में दाई ओर की तिरछी होती हैं। उदाहरणार्थ मजदूरी या वेतनों के बारंबारता वक्र विजली का प्रयोग (चाट 22.13 देखिए), वयस्क पुण्या के लोल और अनेक चर अन्य। स्तरी के वक्र दाई ओर की साधारण तिरछे अथवा लगभग सममित हो सकते हैं। विद्यार्थियों के प्रश्नों की दिशा में तिरछापन अर्थात् इस तथ्य के कारण है क्योंकि हम केवल उन्हीं मूल्यों पर विचार कर रहे हैं जो कि पूर्व के तीन वर्षों में बच गए थे जब कि कुछ कम योग्य छोड़ दिए गए थे। चाट 10.8 में अमरीकी आविष्कारकों की मृत्यु के समय आयु का वक्र विशेष रूप से बाई ओर का तिरछा हो सकता है क्योंकि कम आयु वाले व्यक्तियों के नाश से प्रायः प्रयाप्त आविष्कार नहीं होते कि उनको "आविष्कारकों" की श्रेणी में लाया जाए अथवा तिरछापन इस तथ्य के कारण हो सकता है कि समय नस्व उपस्थित है—इस अध्याय में सममित आविष्कारकों में से लगभग पाँचवें भाग का जन्म 1800 से पूर्व हुआ था।

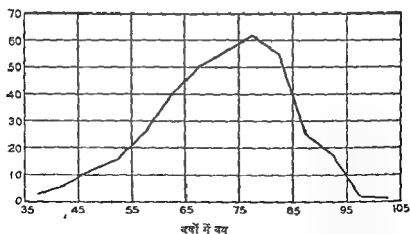
तिरछापन का पियर्सन का माप—इसमें पूर्व के अध्याय में यह संकेत किया गया था कि चरम मानों की उपस्थिति से बहुलक पर प्रभाव नहीं पड़ता, उनकी स्थिति में केवल माध्यिका पर प्रभाव पड़ता है, और समान्तर माध्य चरमताओं के आकार में प्रभावित होता है। परिणामस्वरूप तिरछापन को मापने के लिए हम बहुलक और माध्य का प्रयोग कर सकते हैं। तब हम कह सकते हैं कि तिरछापन = माध्य—बहुलक। परन्तु इस प्रकार के माप की कुछ कमियाँ हैं। प्रथम, निरपेक्ष तिरछापन का माप होने के कारण यह समस्या की

विद्यार्थी
संख्या



चार्ट 10.7. रागस स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उदार कला स्नातको के प्रेडों के समान्तर माध्य, माध्यिका, और बहुलक की स्थिति ।

आविष्कारता
संख्या



चार्ट 10.8. 371 अमरीकी आविष्कारक की मृत्यु के समय आयु ।
आंकड़े अमेरिकन सोस्योलॉजिकल रिव्यू, खण्ड 2, संख्या 6, पृष्ठ 837-849 के
सनफोर्ड विस्तन द्वारा लिखित "बायो-सोशल कॅरेक्टरिस्टिक्स ऑफ अमेरिकन इन्वेंटर्स"
से उद्धृत ।

सारणी 105

371 अमरीकी आविष्कारकों की मृत्यु के समय वय के लिए विभिन्न भागों का परिकलन

मृत्यु के समय आयु वर्षों में	f	d	fd	$f(d')^2$	$f(d)^2$
35 और 40 से कम	3	-6	-18	108	-648
40 और 45 से कम	6	-5	-30	150	-750
45 और 50 से कम	12	-4	-48	192	-768
50 और 55 से कम	16	-3	-48	144	-432
55 और 60 से कम	26	-2	-52	104	-208
60 और 65 से कम	40	-1	-40	40	-40
65 और 70 से कम	50	0	0	0	0
70 और 75 से कम	56	1	56	56	56
75 और 80 से कम	62	2	124	248	496
80 और 85 से कम	55	3	165	495	1,485
85 और 90 से कम	25	4	100	400	1,600
90 और 95 से कम	17	5	85	425	2,125
95 और 100 से कम	2	6	12	72	432
100 और ऊपर*	1	7	7	49	343
योग	371		+ 313	2,483	+ 3,691

* हम वय में अपना मध्य मान 102.5 होने को कल्पना की।

आकृति अमरीक सोशियोलॉजिकल रिव्यू, खण्ड 2 अंक 6 पृष्ठ 848 में प्रकाशित लनरोवें विस्टन के 'आपो सोशल कैरेक्टरिस्टिक्स ऑफ अमेरिकन इवेंट्स' तथा पत्र व्यवहार में प्राप्त।

$$\frac{N}{2} = 185.5$$

$$\text{Med} = 70 + \frac{32.5}{56} \times 5 = 72.90 \text{ वय} \quad \bar{x} = 67.5 + \frac{313}{371} \times 5 = 71.72 \text{ वर्ष}.$$

$$s = 5 \sqrt{\frac{2,483}{371} - \left(\frac{313}{371}\right)^2} = 12.23 \text{ वर्ष}.$$

$$v_1 = \frac{\sum fd}{N} = \frac{+313}{371} = 0.843666$$

$$v_2 = \frac{\sum f(d)^2}{N} = \frac{2,483}{371} = 6.692722$$

$$v_3 = \frac{\sum f(d)^3}{N} = \frac{+3,691}{371} = 9.948787$$

$$v_4 = 0$$

$$\pi_2 = v_2 - v_1^2 = 6.692722 - (0.843666)^2 = 5.980950$$

$$\pi_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3 = +9.948787 - 3(0.843666)(6.692722) + 2(0.843666)^3$$

$$= -5.789483$$

टकाइयो के रूप में होगा। साथ ही, इसका विस्तृत रूप में प्रसारित श्रेणी की तुलना में लघु प्रकार की श्रेणी के लिए काफी मिन्य होगा। सांख्यिकीविद प्रायः कभी कभी निरपेक्ष तिरछापन के माप का प्रयोग नहीं करते और सापेक्ष तिरछापन के माप को अधिक पसन्द करते हैं। अभी अभी बताए गए माप को सापेक्ष माप में रखा जा सकता है और s से भाग करके दोनो कठिताइयाँ दूर की जा सकती हैं। अब

$$\text{तिरछापन} = \frac{\bar{X} - Mo}{s}$$

इससे हम धनात्मक चिह्न वाला सापेक्ष माप प्राप्त होता है जब तिरछापन दाहिनी ओर को है और ऋणात्मक चिह्न वाला माप जब तिरछापन बाई ओर को है। परन्तु एक और महत्वपूर्ण कठिताई है जो इस तथ्य में उत्पन्न होती है कि अधिकतर बारबारता वक्रों के लिए बहुलक केवल एक मॉडल के माप है। माध्यिका की स्थिति अधिक संतोषजनक हो सकती है और इसलिए हम इस माप का प्रयोग करेंगे।⁷

$$Sk = \frac{3(Y - Med)}{s}$$

पुनर्गामी अध्याय में यह मान्य किया गया था कि उदार कला छात्रों के ग्रैडों के लिए $Y = 85.17$ तथा $Med = 84.72$ है। इस अध्याय में s का मान 4.48 निश्चित किया गया। तब तिरछापन है

$$Sk = \frac{3(85.17 - 84.72)}{4.48} = +0.301$$

इसे साधारण मात्रा का तिरछापन माना जा सकता है क्योंकि यह माप ± 3 की सीमाओं के बीच परिवर्तित होता है। यह आगे सकेत कर देना चाहिए कि ± 1 जैसे उच्च मान कुछ असामान्य होते हैं।

अमरीकी प्राविधकारकों की मृत्यु के समय आयु के आँकड़ों के लिए सारणी 10.5 में यह दिखाया गया है कि $\bar{X} = 71.72$ वर्ष, जब कि $Med = 72.90$ वर्ष तथा $s = 12.23$ वर्ष। तिरछापन का विवरण का माप है

$$Sk = \frac{3(71.72 - 72.90)}{12.23} = -0.29$$

7 व्यक्त में 3 की उपस्थिति की निम्न प्रकार से व्याख्या की गई है। काल विवरण में अनुभव के आधार पर दिखाया कि एक सतत चर के साधारण तौर पर निरक्ष विवरणों में माध्यिका में बहुलक से मध्य की ओर दूरी लगभग $2/3$ बिन्दु की प्रवृत्ति है। परिणामस्वरूप उसने सिद्धा $Mo = \bar{X} - 3(\bar{X} - Med)$ तथा तिरछापन के माप में बहुलक के लिए यह व्यक्त प्रतिस्थापित करके उसने प्राप्त किया

$$Sk = \frac{Y - [\bar{X} - 3(\bar{X} - Med)]}{s} = \frac{(3\bar{X} - Med)}{s}$$

8 हेरोल्ड होटलिंग तथा ज्योनाथन एम. सोनोमस (दि लिमिटेड आफ ए चेंडर आफ स्कूल, एनल्स ऑफ मैथमेटिकल स्टैटिस्टिक्स, वर्ष 1932 पृष्ठ 141-142) ने दिखाया है कि

$$\frac{\bar{X} - Med}{s} \pm 1 \text{ के बीच रहता है।}$$

चतुर्थको और शततमको पर आधारित तिरछापन के माप—तिरछापन को तिरछापन के चतुर्थको माप के माध्यम से भी मापा जा सकता है,

$$\frac{(Q_3 - Med) - (Med - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_1 + Q_3 - 2Med}{Q_3 - Q_1},$$

तथा एक ऐसे व्यंजक का प्रयोग करके जिसमें 10वें और 90वें शततमक प्रयुक्त हो,

$$\frac{(P_{90} - Med) - (Med - P_{10})}{P_{90} - P_{10}} = \frac{P_{10} + P_{90} - 2Med}{P_{90} - P_{10}}$$

क्योंकि इन मापों में वैसी ही कमियाँ हैं जैसी कि चतुर्थको और शततमको पर आधारित विक्षेपण के मापों के लिए पहले बनाई गई हैं, अतः वे तिरछापन के निरान्त सन्तोषजनक माप नहीं हैं और उन पर यहाँ और अधिक विचार नहीं किया जाएगा।

तृतीय घूर्ण पर आधारित तिरछापन का माप—हम देख चुके हैं कि विक्षेपण का सर्वाधिक सन्तोषजनक माप मानक विचलन है जोकि माध्य के इर्द-गिर्द द्वितीय घूर्ण पर आधारित है

$$\pi_2 = \frac{\sum x^2}{N}, \text{ तथा } s = \sqrt{\pi_2} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}.$$

तिरछापन का माप माध्य के इर्द-गिर्द तृतीय घूर्ण का प्रयोग करके प्राप्त किया जा सकता है,

$$\pi_3 = \frac{\sum x^3}{N}$$

स्मरण रहे कि माध्य के इर्द-गिर्द प्रथम घूर्ण

$$\pi_1 = \frac{\sum x}{N},$$

सदा शून्य होता है। परन्तु, माध्य के इर्द-गिर्द तृतीय घूर्ण शून्य नहीं होता जब तक कि बंटन माध्य के इर्द-गिर्द सममित न हो। विचलन के घन बनाने से इसका चिह्न नहीं बदलता। परन्तु इसका बड़े विचलनो पर असंगत रूप से अत्यधिक प्रभाव अवश्य पड़ता है। उदाहरणतः, सारणी 10 6 और 10 7 में दिए गए आँकड़ों के दो समुच्चयों पर विचार कीजिए। जिनमें से प्रथम, 6 के माध्य के इर्द-गिर्द सममित है जब कि द्वितीय, 6 के माध्य के इर्द-गिर्द सममित नहीं है। आँकड़ों के दोनों समुच्चयों में

$$\pi_1 = \frac{\sum x}{N} = 0,$$

और सारणी 10 6 के आँकड़ों में

$$\pi_3 = \frac{\sum x^3}{N} = 0$$

परन्तु सारणी 10 7 के आँकड़ों से प्रदर्शित है:

$$\pi_3 = \frac{\sum x^3}{N} = +6.$$

सारणी 10.6

एक सममित ध्रेणी के प्रथम तथा तृतीय
घूर्णों का परिकलन

X	x	x^2
2	-4	-64
4	-2	-8
6	0	0
8	+2	+8
10	+4	+64
	<u>0</u>	<u>0</u>

$$\pi_1 = \frac{\sum x}{N} = \frac{0}{5} = 0.$$

$$\pi_2 = \frac{\sum x^2}{N} = \frac{0}{5} = 0.$$

सारणी 10.7

एक असममित ध्रेणी के प्रथम तथा तृतीय
घूर्णों का परिकलन

X	x	x^2
3	-3	-27
4	-2	-8
6	0	0
7	+1	+1
10	+4	+64
	<u>0</u>	<u>+30</u>

$$\pi_1 = \frac{\sum x}{N} = \frac{0}{5} = 0.$$

$$\pi_2 = \frac{\sum x^2}{N} = \frac{+30}{5} = +6.$$

एक बारवारीता बटन के तृतीय घूर्णों का परिकलन करने से,

$$\pi_2 = \frac{\sum f x^2}{N},$$

ममान्तर माध्य से वास्तविक विचलनों को सेना, उनके घन बनाना, भावृत्तियों से गुणा करना, जोड़ना और N से भाग करना श्रमकारक होगा। जैसा कि परिशिष्ट घ के परिच्छेद 10.2 में दिखाया गया है, द्वितीय घूर्णों s^2 , अथवा π_2 , एक छोटी विधि से प्राप्त किया जा सकता है। वर्ग अन्तरालों के वर्गों के रूप में,

$$\pi_2 = \frac{\sum f (d')^2}{N} - \left(\frac{\sum f d'}{N} \right)^2.$$

तृतीय घूर्णों का मूल्य (वर्ग अन्तरालों को घन बना कर) प्राप्त होता है⁹

$$\pi_3 = \frac{\sum f (d')^3}{N} - 3 \frac{\sum f d'}{N} \frac{\sum f (d')^2}{N} + 2 \left(\frac{\sum f d'}{N} \right)^2$$

$$\text{अथवा, यदि } v_1 = \frac{\sum f d'}{N}, v_2 = \frac{\sum f (d')^2}{N}, \text{ तथा } v_3 = \frac{\sum f (d')^3}{N},$$

$$\text{तो } \pi_3 = v_3 - v_1^2,$$

$$\text{तथा } \pi_3 = v_3 - 3v_1 v_2 + 2v_1^3.$$

⁹ परिशिष्ट घ, परिच्छेद 10.3 देखिए।

स्पष्ट ही, π_2 निरपेक्ष तिरछेपन का एक माप है। सापेक्ष तिरछेपन का माप है

$$\beta_1 = \frac{\pi_2^2}{\pi_3^2},$$

सारणी 108

हमसं स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 उबार कला स्नातकों के ग्रेडों के लिए प्रथम तीन घूर्णों का परिकलन

ग्रेड	विद्यार्थियों की संख्या d	d	fd'	$f(d')^2$	$f(d')^3$
75 0—76 9	3	—4	— 12	48	—192
77 0—78 9	23	—3	— 69	207	— 621
79 0—80 9	52	—2	—104	208	— 416
81 0—82 9	61	—1	— 61	61	— 61
83 0—84 9	74	0			
85 0—86 9	61	+1	+ 61	61	61
87 0—88 9	53	+2	+106	212	424
89 0—90 9	35	+3	+105	315	945
91 0—92 9	23	+4	+ 92	368	1 472
93 0—94 9	15	+5	+ 75	375	1,875
95 0—96 9	7	+6	+ 42	252	1,512
97 0—98 9	2	7+	+ 14	98	686
योग	409		+ 249	2 205	+ 5 685

$$v_1 = \frac{\sum fd'}{N} = \frac{+249}{409} = +0.608802$$

$$v_2 = \frac{\sum f(d)^2}{N} = \frac{2\,205}{409} = 5.391198$$

$$v_3 = \frac{\sum f(d)^3}{N} = \frac{+5,685}{409} = +13.899756$$

$$\pi_1 = 0$$

$$r_2 = v_2 - v_1^2 = 5.391198 - (0.608802)^2 = 5.020558$$

$$\pi_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3$$

$$= 13.899756 - 3(0.608802)(5.391198) + 2(0.608802)^3$$

$$= 4.504532$$

जहाँ अश या आज्य तथा हर दोनों वर्ग अन्तरालों की छठी शक्ति के रूप में हो। तिरछापन कभी-कभी α_2 से भी मापा जाता है जहाँ¹⁰

$$\alpha_2 = \sqrt{\beta_1} = \frac{\pi_2}{\sqrt{\tau_2^2}}$$

α_2 को π_2 वाला चिह्न दिया जा सकता है। हम अध्याय 23 में एक तिरछे वक्र को फिट करने में α_2 का प्रयोग करेंगे।

उदार कला छात्रों के प्रोजेक्टों के आंकड़ों के लिए द्वितीय और तृतीय घूर्णों के मूल्य सारणी 10.8 के नीचे दिखाए गए हैं। इनसे हमें

$$\beta_2 = \frac{\pi_2^2}{\pi_2^2} = \frac{(4\ 504532)^2}{(5\ 020558)^2} = 0.16$$

प्राप्त होता है। इसी प्रकार अमरीकन आविष्कारकों की मृत्युकालीन आयु के लिए द्वितीय तथा तृतीय घूर्णों का परिकलन सारणी 10.5 में किया गया है। इनसे हम

$$\beta_2 = \frac{(-5\ 789483)^2}{(5\ 980950)^2} = 0.16.$$

प्राप्त करते हैं।

क्योंकि $\pi_2 = 0$, जब कोई तिरछापन उपस्थित न हो, तो यह निष्कर्ष निकलता है कि एक पूर्णरूपण सममित श्रेणी के लिए $\beta_2 = 0$ होना। जितना अधिक β_2 का मान होगा, उतना ही अधिक किसी श्रेणी में तिरछापन होगा। इस समय हम यह कहने की स्थिति में नहीं हैं कि β_2 के लिए अभी-अभी दिए गए दो मानों में से कोई शून्य से महत्वपूर्ण रूप से अधिक है या नहीं। इस समस्या पर हम अध्याय 26 में विचार करेंगे।

ककुदता

चार्ट 10.9 में तुल्यककुदी बटन दिखाया गया है। चर्पटककुदी बटन चार्ट 10.10 में दिखाया गया है। सामान्य वक्र को मध्यककुदी¹¹ कहा जाता है। किसी श्रेणी में उपस्थित ककुदता की मात्रा को चतुर्थ घूर्णों का प्रयोग करके मापा जा सकता है,

$$\pi_4 = \frac{\sum x^4}{N},$$

अथवा, एक बारबारता बटन के लिए,

$$\pi_4 = \frac{\sum f x^4}{N}$$

10. α_1 अथवा α_2 का पहले कही चिह्न नहीं आया। आंकड़ों की किसी भी श्रेणी के लिए,

$$\alpha_1 = \frac{\pi_1}{\sqrt{\pi_2}} = 0;$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi_2}{\sqrt{\pi_2^2}} = 1$$

11. ककुदी = उमरी पीठ वाला, अतः, कुदती या एक-बहुलक। तुल्य = पतला, मधीन। चर्पट = मड़ा, चौड़ा, चपटा। मध्य = बीच में, बीच का।

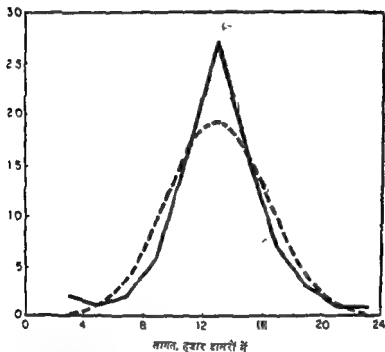
परिशिष्ट 3, अनुभाग 10.3, में दी गई विधि जैसी विधि से यह दिखाया जा सकता है कि

$$r_4 = 4 \frac{\sum f(d')^4}{N} - 4 \frac{\sum f d'}{N} \frac{\sum f(d')^3}{N} + 6 \left(\frac{\sum f d}{N} \right)^2 \frac{\sum f(d')^2}{N} - 3 \left(\frac{\sum f d'}{N} \right)^4$$

$$r_4 = \frac{\sum f(d')^4}{N}$$

$$^4 r_4 = v_4, 4v_3v_2 + 6v_3 - 2v_2^2 - 3v_1^4$$

चित्र 10.9



चार्ट 10.9 बनीवलेड में पाँच कमरों वाले तए घर की सागत और जेता का भाग (गहरी रेखा) तथा प्रसामान्य वक्र (दूरी रेखा) जिसके N , \bar{X} , तथा s समान हैं। सारणी 10.9 की सामग्री पर आधारित।

अब r_4 से ककुदता के लिए एक पूर्ण व्यंजक प्राप्त होता है। इसे सापेक्ष रूप में r_2^2 से भाग करके रखा जा सकता है। इस माप को β_2 या α_4 कहते हैं, तथा

$$\beta_2 = \alpha_4 = \frac{r_4}{r_2^2}$$

जिममें यश और हर दोनो वर्ग अन्तरालो की चतुर्थ शक्ति के रूप में है। इस व्यंजक का प्रसामान्य वक्र के लिए 3.0 मान है। चपंटककुदी वक्र के लिए $\beta_2 < 3.0$ कूटककुदी वक्र के लिए $\beta_2 > 3.0$

चार्ट 10.9 का तुल्यकुदी वक्र N , \bar{X} , तथा s वाले प्रसामान्य वक्र की तुलना में दिखाया गया है। सारणी 10.9 में इस वितरण के घूर्णों का परिकलन किया गया है, और $\beta_2 = 4.46$

सारणी 109

1967 में क्लीवलैंड में 5 कमरों वाले लकड़ी के नए घर और क्रेता को नोलान की लागत के लिए प्रथम भार धूर्णों और β_2 का परिकलन

लागत (माध्य मान)	f	d	fd'	$f(d)'$	$f(d')^2$	$f(d')^4$
\$ 3,000	2	-5	-10	50	-250	1,250
5,000	1	-4	-4	16	-64	256
7,000	2	-3	-6	18	-54	162
9,000	6	-2	-12	24	-48	96
11,000	6	-1	-6	16	-16	16
13,000	16	0	0	0	0	0
15,000	27	1	27	27	27	27
17,000	16	2	32	32	64	64
19,000	7	3	21	21	441	441
21,000	3	4	12	12	144	144
23,000	1	5	5	5	25	25
योग	82		0	216	-90	3,032

ग्रॉकड, जर्नेल ग्रॉफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, खण्ड 32, अंक 200 पृष्ठ 647 पर प्रकृति के क्रम में ग्राफोल्ड तथा विलियम एम० ह्यूड द्वारा लिखित 'कल्लुशान कौन्सिल एंड रोजन प्रार्थी के पृष्ठ से उद्धृत। लागतों प्रकृतित डालरो में व्यक्त हैं।

$$v_1 = \frac{\sum fd'}{N} = \frac{0}{82} = 0$$

$$v_2 = \frac{\sum f(d')^2}{N} = \frac{236}{82} = 2.878049$$

$$v_3 = \frac{\sum f(d')^3}{N} = \frac{-90}{82} = -1.097561$$

$$v_4 = \frac{\sum f(d')^4}{N} = \frac{3,032}{82} = 36.975601$$

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = v_2 - v_1^2 = 2.878049$$

$$r_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3 = -1.097561$$

$$r_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4 = 36.975601$$

$$\beta_2 = \frac{r_4}{r_2^2} = \frac{36.975601}{(2.878049)^2} = 4.46$$

नोट कल्पित माध्य (13,000 डॉलर) और माध्य का संगत होता है। जिसके परिणामस्वरूप v_1 का मूल 0 होता है। अब π वरग π मूलों में कोई भेद नहीं है, क्योंकि $v_1^2=0$, $v_1v_2=0$, $v_1^3=0$, $v_1v_3=0$, आदि।

सारणी 10 10

बिजली के लॅम्पो के एक वष की आयु के लिए प्रथम चार घूर्णों
तथा β_2 का परिकलन

घण्टो मे आयु (मध्य मान)	प्रतिशतता बारवारता f	d	fd	$f(d')^2$	$f(d)^3$	$f(d')^4$
50	10	-9	-90	810	-7290	65610
150	15	-8	-120	960	-7680	61440
250	31	-7	-217	1519	-10633	74431
350	44	-6	-264	1584	-9504	57024
450	50	-5	-250	1250	-6250	31250
550	57	-4	-228	912	-3648	14592
650	66	-3	-198	594	-1782	5346
750	73	-2	-146	292	-584	1168
850	76	-1	-76	76	-76	76
950	78	0	0	0	0	0
1050	78	1	78	78	78	78
1150	76	2	152	304	608	1216
1250	73	3	219	657	1971	5913
1350	66	4	264	1056	4224	19896
1450	57	5	285	1425	7125	35625
1550	50	6	300	1800	10800	64800
1650	44	7	308	2156	15092	105644
1750	31	8	248	1984	15872	126976
1850	15	9	135	1215	10935	98415
1950	10	10	100	1000	10000	100000
योग	1000		+500	19672	+29258	866500

आंकड़ आयोवा इन्जीनियरिंग एक्सपेरिमे = स्टेशन पृष्ठ 58 प्रापटी घृष 282 के वृत्तेदिन 203
मे रा.ने वि = तथा गड वन की कुन द्वारा लिख, लाइफ कॅरेक्टरिस्टिक्स थाफ फिजीकल प्रापटी से ।

$$y_1 = \frac{\sum fd'}{N} = \frac{+50}{1000} = +0.50$$

$$y_2 = \frac{\sum f(d')^2}{N} = \frac{1,9672}{1000} = 19.672$$

$$y_3 = \frac{\sum f(d)^3}{N} = \frac{+29258}{1000} = +29.258$$

$$y_4 = \frac{\sum f(d)^4}{N} = \frac{86,6500}{1000} = 86.6500$$

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = v_2 - v_1^2 = 19\,672 - (0\,50)^2 = 19\,422.$$

$$r_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3 = 29\,258 - 3(0\,50)(19\,672) + 2(0\,50)^3 = 0.$$

$$r_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4$$

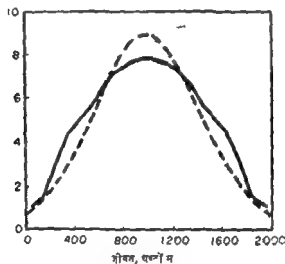
$$= 866\,500 - 4(0\,50)(29\,258) + 6(0\,50)^2(19\,672) - 3(0\,50)^4$$

$$= 837\,3045$$

$$\beta_2 = \frac{r_4}{r_2^2} = \frac{837\,3045}{(19\,422)^2} = 2.22$$

घाटं 10 10 मे चपेटककुदी वक्र को भी समान N , Y , तथा s वाले प्रसामान्य वक्र के सम्बन्ध में दिखाया गया है। चपेटककुदी श्रेणी के पूर्णों को सारणी 10 10 में दिखाया गया है और हमने β_2 मालूम किया गया है जो 2.22 है।

अ. विज्ञापन
द. न. व. र. व. व.



घाटं 10 10 बिजली के लैम्पों के एक वर्ग की भाव्य (गहरी रेखा) तथा प्रसामान्य वक्र (टूटी रेखा) जिसके N , Y तथा s समान हैं। श्रेणी 10 10 के बॉक्सों पर आधारित। प्रसामान्य वक्र के सिरे नहीं दिखाए गए। बायाँ सिरा y अक्ष के पार निकल जाएगा।

जब एक विचलन को चतुर्थ या द्वितीय शक्ति तक बढ़ाया जाए तो इसका चिह्न घन बन जाता है। चरम विचलनों को द्वितीय शक्ति से बढ़ाने की अपेक्षा चतुर्थ शक्ति से बढ़ाने पर वे अनुपात से कहीं अधिक बढ़ जाते हैं। परिणामस्वरूप, जितने अधिक सकीरा बटन के कथे हाने और जितने अधिक बड़े सिरे होंगे उतना ही अधिक β_2 के सम्बन्ध में -4 होगा।

अध्याय 26 में हम यह निश्चय करने की एक विधि पर विचार करेंगे कि क्या β_2 का मूल्य 3.0 से काफी कम या काफी अधिक है।

समूहन-त्रुटि के लिए धूर्णों का संशोधन

वारंवारता वटनों के लिए माध्य π_2 (या s), π_3 तथा π_4 का परिकलन करने में हमने वर्गों के मध्य-मानों का प्रतिनिधि मानों के तौर पर प्रयोग किया। हमने इससे पूर्व के अध्याय में देखा है कि मध्य-मानों की अशुद्ध कल्पनाएँ थी परन्तु जब हम समान्तर माध्य का परिकलन करते हैं तो उपस्थित अशुद्धियों की एक दूसरे को सन्तुलित करने की प्रवृत्ति है। यह सन्तुलन उम समय भी विद्यमान है जब तृतीय धूर्ण का परिकलन किया जाता है। यह स्मरण होगा कि बहुलकीय वर्ग में पूर्व के वर्गों के मध्य-मानों की प्रवृत्ति बहुत कम होने की है, जबकि बहुलकीय वर्ग में बाद के वर्गों के मध्य-मानों की प्रवृत्ति बहुत अधिक होने की है। परिणाम यह होता है कि भिन्न x मूल्यों में जितने वे हाने चाहिएँ उससे कुछ थोड़ा अधिक (निरपेक्ष मान में) होने की प्रवृत्ति है और जब उन्हें द्वितीय या चतुर्थ शक्ति तक बढ़ाया जाता है उस समय कोई सन्तुलन नहीं होता। परिणामस्वरूप π_2 (तथा s) और π_4 के मूल्य अवर्गीकृत उन्हीं आँकड़ों से परिकलित मानों की अपेक्षा कुछ थोड़े अधिक होने की सम्भावना है। शेपर्ड के सशोधन ऊपर की ओर इन भुकाव का सन्तुलन करने की चेष्टा करते हैं। सशोधित धूर्णों को μ में इंगित किया गया है और वे हैं:¹²

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \pi_1 = 0, \\ \mu_2 &= \pi_2 - \frac{1}{2}s, \\ \mu_3 &= \pi_3, \\ \mu_4 &= \pi_4 - \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{8}s^2,\end{aligned}$$

जहाँ सब परिकलन वर्ग अन्तरालों के रूप में है।

यदि हम वर्ग मध्य-मानों के स्थान पर वर्ग माध्यों का प्रयोग करते तो समान्तर माध्य का ठीक-ठीक परिकलन किया जा सकता था। परन्तु यदि वर्ग माध्यों का प्रयोग किया जाए तो उन्हीं अवर्गीकृत आँकड़ों से परिकलित की अपेक्षा π_2 (s^2) तथा π_4 के मूल्य और भी अधिक कम होंगे।

जब हम एक सतत चर पर विचार कर रहे हैं जो कि लेखाचित्र की दृष्टि से बटन के दोनों सिरों पर अनन्त स्पर्शत X -अक्ष के समीप पहुँचता है तो शेपर्ड के सशोधनों का प्रयोग किया जा सकता है। हम बाद की विशेषता को प्रायः “ X -अक्ष के साथ प्रत्यक्ष सम्पर्क” कह कर संकेत किया जाता है। यदि ये शर्तें पूरी नहीं उतरती तो शेपर्ड के सशोधनों का प्रयोग नहीं होना चाहिए क्योंकि सशोधनों से आवश्यकता से अधिक सशोधन हो सकता है।¹³ यदि मूल्य अवलोकन पर्याप्त यथार्थता से नहीं किए गए हैं तो शेपर्ड के सशोधन लागू करना तर्कसंगत नहीं है।

12 शेपर्ड के सशोधन को लागू करने के एक उदाहरण के लिए मूल अंग्रेजी पुस्तक के द्वितीय संस्करण में पृष्ठ 237—238 देखिए।

13 अध्याय 23 में पादटिप्पणी 8 देखिए। साथ ही डब्ल्यू. यू. एं. स्पूहार्ट द्वारा लिखित ईन्फॉर्मिक कन्ट्रोल बोर्ड वॉल्यूम “मैनुफैक्चर्ड प्रोडक्ट,” डी. वान नास्ट्रेट स्क्वोनी, प्रिन्टन, एन० जे०, 1931, पृष्ठ 78—79 भी देखिए।

जब छोड़ने के संशोधन समुचित हैं तो β तथा α का निम्न प्रकार से μ से परिकलन किया जा सकता है

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_2}} = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2}} = 1.0$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2} \quad \alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^2}} = \sqrt{\beta_1}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2} \quad \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sqrt{\mu_2^2}} = \frac{\mu_4}{\mu_2} = \beta_2$$

काल-श्रेणी का परिचय

काल-श्रेणियाँ पहले ही अध्याय 4, 5, और 6 में लेखाचित्रीय रूप में देखी जा चुकी हैं। उन अध्यायों में सम्मिलित कालानुक्रमिक आंकड़ों के विभिन्न चाटों में केवलमात्र श्रेणियों को प्रस्तुत किया गया न कि उनका विश्लेषण। इस अध्याय में तथा अगले पाँच अध्यायों में हम काल-श्रेणियों को उनके अधिक महत्वपूर्ण भागों में विघटित करने के उद्योग की जाँच करेंगे। काल-श्रेणियों के विश्लेषण में प्रयुक्त सांख्यिकीय विधियाँ बारंबारता घटन विश्लेषणों में प्रयुक्त विधियों से बिल्कुल भिन्न परन्तु निकट से संबंधित हैं। यद्यपि अर्थ-शास्त्री काल-श्रेणियों के विश्लेषण के तन्त्रों के विकास के लिए मुख्यतया उत्तरदायी हैं तथापि काल-श्रेणियों का अध्ययन अन्य बहुत से क्षेत्रों में काम करने वालों, जैसे व्यापारियों, समाज विज्ञानियों, जीवविज्ञानियों, भूविज्ञानियों जन-स्वास्थ्य कार्यकर्ताओं तथा अन्यो के लिये रुचिकर है।

काल-श्रेणी की गतियाँ

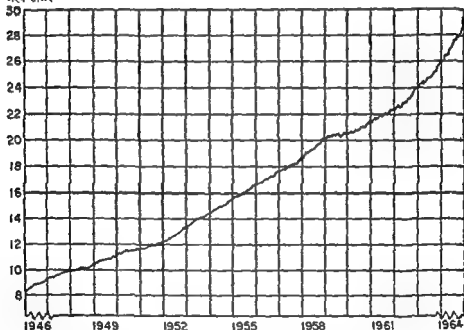
काल-श्रेणियों की गतियाँ, जो हमारा ध्यान ग्रहण करेंगी, चिरकालिक प्रवृत्ति, चक्रीय और अतिशयमिनी हैं। कुछ श्रेणियों में इन गतियों में से एक या दो अन्तों से अधिक महत्वपूर्ण हो सकती हैं। सामान्यतया ये चारों गतियाँ एक सामयिक काल-श्रेणी में विद्यमान होंगी और जब उपस्थित होंगी तो सहगामिनी होंगी। हम क्रमशः इन चारों गतियों में से प्रत्येक पर विचार करेंगे।

दीर्घकालिक उपनति—बागू अथवा इससे अधिक वर्षों की अवधि में काल-श्रेणी में बढ़ने अथवा घटने की उपनति को प्रदर्शित करने की बहुत संभावना है। चार्ट 11.1 में जो न्यूयार्क राज्य बचन बैंको के जनवरी 1946 से दिसम्बर 1964 तक के निक्षेप के आंकड़े उपस्थित करता है, एक उद्धोषित ऊर्ध्वमुखी उपनति दर्शाती है। यह श्रेणी हमें एक रोचक उदाहरण प्रदान करती है क्यों कि यह उपनति अनामान्य रूप से प्रबल है, वास्तव में कोई अन्य गतियाँ प्रत्यक्ष नहीं हैं।

ऊर्ध्वमुखी उपनति वाली एक अन्य श्रेणी 11.2 चार्ट में दृष्टिगत होती है जो समुक्त राज्य में 1945 से 1963 तक आयुन स्पिरिट का उपयोग (और प्रति व्यक्ति उपभोग) दिखाती है। इस तथा दूसरी बहुत सी श्रेणियों के लिए ऊर्ध्वमुखी उपनति के उत्तरदायी कारकों में से एक जनसंख्या की वृद्धि है और चार्ट 11.2 लघुगुणकीय ऊर्ध्वपर पैमाने से बनाया गया है ताकि प्रति व्यक्ति अवस्था अधिक भो दिसाए जा सकें। प्रति व्यक्ति उपनति 1952 के बाद कुछ उपभोग की उपनति के समान में कुछ गिरती है। अन्य कारणों में से द्वितीय महा-युद्ध के प्रभाव से समुक्त राज्य की अर्थव्यवस्था जनसंख्या को प्राप्त जन शक्ति में निरन्तर सुधार के कारण बहुत से उत्पादना और सेवाओं का प्रति व्यक्ति वितरण बढ़ गया है।

जैसा कि दिखाई दे सकता है काल-श्रेणी के विकास में बहुत से विशिष्ट कारक उत्तरदायी हो सकते हैं। प्राकृतिक विज्ञानों का उद्योग तथा कृषि में उनके उत्पादन को तीव्रता से बढ़ाने में प्रयोग किया गया है। सर्वदा इन तकनीकी परिवर्तनों के साथ-साथ चलकर नहीं, अपितु इनसे प्रेरित होकर, व्यापारिक सम्बन्धों और उनके ढंगों में परिवर्तन होते रहे हैं। निम्नो के विकास से विशेषज्ञता तथा अधिक मात्रा में उत्पादन के लिये पर्याप्त मात्रा में पूँजी का संचय संभव हो गया है। वैज्ञानिक प्रबन्ध, कार्मिक प्रबन्ध, तथा गुण नियन्त्रण में भी उद्योग की उत्पादितता बढ़ाने में महत्वपूर्ण भाग लिया है। निःसन्देह स्वचालन से औद्योगिक उत्पादकता बढ़नी ही जाएगी। मण्डी में बढ़िया ढंगों तथा अधिक अच्छी जलयान सुविधाओं में वस्तुओं को उन स्थानों तथा उन समयों पर जहाँ वे पहुँचने नहीं मिलती थी उपलब्ध बना दिया है।

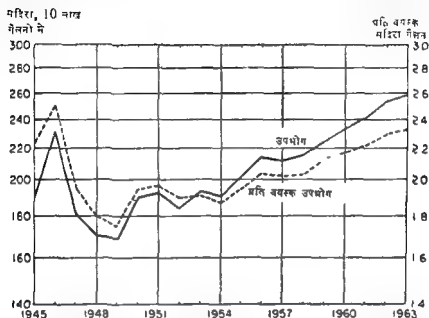
अरब डॉलर



चार्ट 11.1 : न्यूयार्क राज्य बचत बैंकों में निक्षेप, जनवरी 1946 से दिसम्बर 1964 तक। आकृति 'सर्वे ऑफ करेंट बिजनेस के विभिन्न अंकों से।

सभी कालिक-श्रेणियाँ ऊर्ध्वमुखी उपनति या नहीं दिखाती। कुछ जैसे कि अशोधित मृत्यु दर, जो कि चार्ट 11.3 में दिखाई गई है, प्रायः निम्नगामी उपनति प्रदर्शित करती है। यह विशेष निम्नगामी उपनति अधिक अच्छे तथा अधिक विस्तृत रूप में प्राप्त चिकित्सा ज्ञान के कारण है और मोटे तौर पर उच्चतर जीवन स्तर को पुनः प्रतिबिम्बित करती है। आर्थिक श्रेणी की निम्नगामी उपनति इसलिए हो सकती है क्योंकि थोड़ातर और अधिक मस्त विकास प्राप्त हो गए। इस प्रकार सश्लिष्ट तन्तुओं जैसे कि ओरलोन और नाइलोन ने कुछ उपयोगों में प्राकृतिक तन्तुओं को आंशिक रूप में विस्थापित कर दिया है और कई प्रकार के साधनों के स्थान पर सश्लिष्ट प्रक्षालकों का उपयोग किया जा रहा है। रेलमार्गों

का विकास अधिक आश्चर्यजनक था यद्यपि वह हमसे बहुतों की स्मृति से बहुत परे की बात है, जिसने इस देश में अधिकतर नहरों को नुप्तप्राय होने को बाधित कर दिया। अब ट्रकों, बसों, तथा वायुयानों की स्त्रियों से रेनमार्गों के रास्ते में बाधा उपस्थित हो गई है।

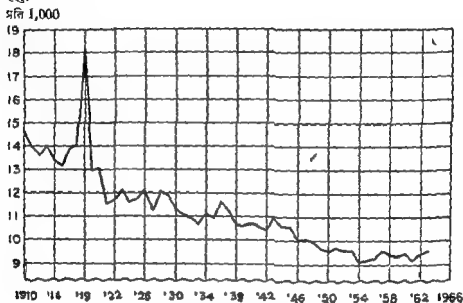


चार्ट 11.2 संयुक्त राज्य अमरीका में 1945—1963 में आसुत स्फिरिड का उपभोग तथा प्रति व्यक्ति उपभोग। बाकट तायमस प्राप्त पेय उद्योग की फेक्ट्स बुक, 1964 पृष्ठ 56 से।

उत्पादकीय ढग में सुधार प्रारम्भ में तीव्र होने उचित हैं और माँग तीव्र हो सकती है। तो भी जैसे-जैसे समय बीतता जाता है, यह प्रायः सत्य है कि, आगे तकनीकी तथा प्रबन्ध सम्बन्धी सुधारों का उत्पादन पर प्रभाव कम होता जाता है जबकि साथ ही बाजार पहले के समान तेजी से नहीं बढ़ता जाता। कच्चे माल जैसे कि खनिज पदार्थ, जिसका छोटी खानों और निम्न स्तर की कच्ची धातु से प्राप्त होना आवश्यक है, को प्राप्त करने की बढ़ती हुई कठिनाई के कारण भी विकास में बाधा पड़ सकती है। हम उन कारकों की जिनमें वित्तीय कारक भी सम्मिलित है, एक पूर्ण सूची नहीं बना सकते जो प्रायः मिलकर एक उद्योग में उत्पादन के विकास को घीसा कर देते हैं। किसी एक प्रदत्त उद्योग में कोई भी विशेष कारण क्यों न हो, बहुत से अधिकारियों का यह विश्वास है कि न केवल सापक्ष विकास की उपनति गिरने की होती है बल्कि अन्ततः आगे विस्तार प्राकृतिक नियम के अनुसार असम्भव हो जाएगा। एक लेखक न, जिस प्रवृत्ति का हम उल्लेख कर आए हैं, उस "विकास का नियम" कहकर संबोधित किया है, जो सभी उद्योगों पर लागू होता बताया जाता है। इस नियम के अन्तर्गत चार अवस्थाएँ आती हैं (1) प्रयोग का काल, जिसमें विज्ञान की मात्रा लघु है, (2) सामाजिक रचना में विकास का काल, (3) वह काल जिसमें सतुष्टि बिन्दु या जान के कारण विकास में बाधा पड़ती है, (4) स्थायित्व का काल। चार्ट

13.10 और 13.11 प्रकट करते हैं कि आइसकीम का स्वदेशीय उत्पादन इस ढंग से होता है। इन चार्टों में से पहले में यह दिखाई पड़ता है कि 1929—1961 के काल में विकास की वार्षिक मात्रा प्रारम्भ में कम थी, परन्तु धीरे-धीरे बढ़ी; दूसरे चार्ट से यह स्पष्ट है कि विकास की वार्षिक प्रतिशतता धीरे-धीरे गिरी है।

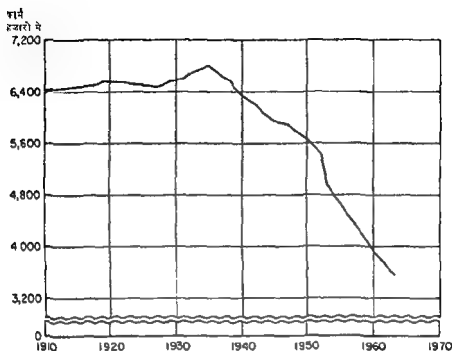
श्रृंखला, ' प्रति 1,000



चार्ट 11.3 सयुक्त राज्य अमरीका के पञ्जीकरण क्षेत्र में अक्षोभित भूभाग दर, 1900—1966 ब्रॉकडे स्टैटिस्टिकल ग्रेस्टरुंक्ट ग्रॉफ दि यूनाइटेड स्टेट्स के किंग्लम सर्वे में। 1963 का जंक अंतिम है।

जैसा कि पहले सुझाया गया है, कभी-कभी किसी एक उद्योग को इतनी घोर स्पर्धा का सामना करना पड़ता है, अथवा इसकी पूर्ति का स्रोत इतना सीमित होता है कि यह विकास से गिरावट की ओर संक्रमण का अनुभव करता है। इस प्रकार के उद्योग का एक उदाहरण एन्थ्रैसाइट कोयले की खान है। विकास और गिरावट का एक अन्य उदाहरण सयुक्त राज्य में 1790 से 1966 तक खेतों की संख्या का है जो अक्षत। चार्ट 11.4 में दिखाया है।

हम काल-श्रेणी की उपनति का अध्ययन करें, क्योंकि हम स्वयं उपनति में रुचि रखते हैं या हम श्रेणी की एक या अधिक अन्य गतियों को प्रकट करने के लिये उपनति को सांख्यिकीय रूप में समाप्त करने की इच्छा करें। सांख्यिकीय समस्या में पहले उस उपनतिके प्रकार का निर्णय करने की बात आती है जो आंकड़ों को उचित रूप से जोड़ेगी और जो आंकड़ों का तर्कपूर्ण विवरण है और दूसरे, तुल्य रूप प्रकार की उपनति को जोड़ने की बात आती है।



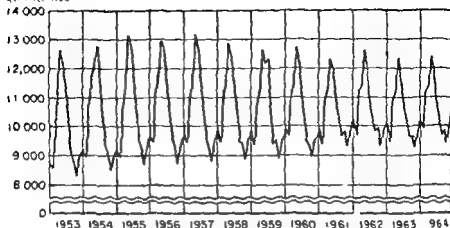
चार्ट 11.4 1910—1963 तक संयुक्त राज्य में कामों की संख्या।

बाईं तरफ संयुक्त राज्य कृषि विभाग हिस्टोरिकल स्टैटिस्टिक्स ऑफ़ दि यूनाइटेड स्टेट्स कालोनियल टाइम्स टु 1957, पृष्ठ 278, संयुक्त राज्य कृषि विभाग, एग्रिकल्चरल स्टैटिस्टिक्स, 1964 पृष्ठ 481 से।

आवर्ती गतियाँ—आवर्ती गति वह है जो, किसी निश्चित समय में, नियमितता की किसी मात्रा में घटती होती है। सबसे अधिक अध्ययन की जाने वाली आवर्ती गति वह है जो एक वर्ष के भीतर उत्पन्न होती है और जिसे ऋतुनिष्ठ परिवर्तन या केवल ऋतुनिष्ठ कहते हैं। चार्ट 11.5 में जनवरी 1953 से दिसम्बर 1964 तक का कामों के दूध का मासिक उत्पादन दिखाया गया है। इन चार्ट में ऋतुनिष्ठ गति दूसरी गतियों की तुलना में पर्याप्त स्पष्ट है। ध्यान दीजिए कि दूध के उत्पादन का ऋतुनिष्ठ परिवर्तन वर्षावर्षों का भी समान है। यह संयुक्त राज्य अमेरिका के प्रकाशकों द्वारा उपयोग में लाये गए समाचार पत्रों कागज के घाँकड़ों के लिए भी सत्य है जिसके लिये विशिष्ट ऋतुनिष्ठ चार्ट 11.6 में दिखाया गया है। अध्याय 14 में हम देखेंगे कि ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप को किस प्रकार निरूपित किया जाए जब कि वह प्रतिरूप सतत अथवा लगभग सतत हो। नो भी बहुत सी श्रेणियाँ उस ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप का प्रदर्शन करती हैं जो समय के साथ-साथ धीरे-धीरे परिवर्तित हो रहा है। पत्रिकाओं में विज्ञापन के लिए स्थान की मात्रा एक ऐसी श्रेणी है और हम संयुक्त राज्य अमेरिका की पत्रिकाओं में विज्ञापन आँकड़ों के लिए ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप का अध्याय 15 में निर्धारण करेंगे।

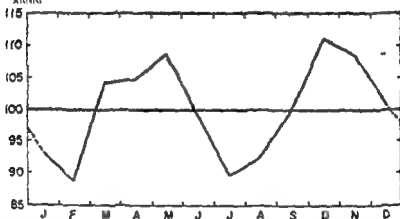
जलवायु सम्बन्धी वे अवस्थाएँ, जिनमें वर्षा, हिम, बर्फ, धूप, आर्द्रता, ताप और पवन में परिवर्तन सम्मिलित हैं, माँघ में परिवर्तन उत्पन्न करती हैं जो कि प्रायः, उपज के

दस लाख पाउंड



चार्ट 11.5 जनवरी 1953 से दिसम्बर 1964 तक समुदाय राज्य में फार्मों पर वृक्ष का उत्पादन। शीर्षक सर्वे ऑफ करेंट विज़नेस के विभिन्न जर्नी से।

प्रतिशत



चार्ट 11.6 1955—1963 तक समुदाय राज्य के प्रकाशकों द्वारा उपभोग में लाए गए समाचारपत्रीय कागज का ऋतुनिष्ठ सूचक। ऑफिस सारणी 14.7 से।

परिवर्तन में प्रत्यावर्तित होती हैं। जनवायु सम्बन्धी अवस्थाएँ कुछ उद्योगों, उदाहरणतः कृषि तथा बाहरी निर्माण के उत्पादन पर प्रत्यक्ष प्रभाव डालती हैं। यद्यपि काल-श्रेणी द्वारा प्रदर्शित अधिकतम ऋतुनिष्ठ परिवर्तनों के लिये प्रकृति मुख्यतया उत्तरदायी है तथापि अन्य कारण भी हैं। क्रिसमस के अवसर पर उपहार देने की प्रथा दिसम्बर में परचून (विशेष रूप में विभाग भण्डार) विक्रय में विशेष वृद्धि का कारण बनती है। दूसरे इस प्रकार के विक्रय शिखर के दृष्टिगोचर होने की आशा तब हो सकती है जबकि विनाश करने वाले ग्राउण्डहम दिवस या सैंडी हाकिन्स दिवस जैसे अवसरों पर उपहार देने की विस्तृत रूप

से प्रोत्साहित करने में सफल हो जाएं। ईस्टर और र्वमगिविंग से पूर्व परचून क्रिया में विक्रय-शिखर अप्रत्यक्ष रूप से ऋतुओं के कारण होता है, क्योंकि उन छुट्टियों के प्रारम्भ का आधार आंशिक रूप से ऋतुसम्बन्धी अवस्थाएँ हैं। तो भी बसन्त या पतझड़ में किसी के कपड़ों और मोटर गाड़ी के ढंग में परिवर्तन की इच्छा आंशिक रूप से आत्मप्रदर्शन का परिणाम है।

मोटर गाड़ी विक्रय में ऋतुनिष्ठ परिवर्तन (तथा मोटर गाड़ियों एवं उनके भागों का उत्पादन) न केवल ऋतुनिष्ठ परिवर्तनों के कारण है अपितु निश्चित मनुष्यकृत निर्णयों का परिणाम भी है। एक वर्ष में मितव्ययता की गति प्रदान करने के प्रयत्न के फलस्वरूप मोटर गाड़ी प्रदर्शनी, जो साधारण तौर पर जनवरी में हुई होती, सरका कर पहले ही तबम्बर में कर दी गई। पहले की अपेक्षा कई महीने पूर्व नए मॉडल आने के कारण वास्तव में ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप में सहसा परिवर्तन हो गया। विभिन्न मॉडलों की कारों के नए मॉडल आजकल बिल्कुल उसी समय प्रचलित नहीं किए जाते परन्तु लगभग सभी एक दूसरे से एक या दो महीने पश्चात् सामने आते हैं। नये मॉडलों का प्रचालन विशेषकर यदि उनमें आकृति सम्बन्धी अथवा यांत्रिक परिवर्तन भी सम्मिलित हों, मोटर गाड़ियों के विक्रय पर सुनिश्चित प्रभाव डालना जारी रखते हैं।

हम आदर्श परिवर्तन में या तो इसीलिए रुचि रखते हैं कि हम आदर्श परिवर्तन को समय-श्रेणी से हटाना चाहते हैं या हम स्वयं आदर्श परिवर्तन में रुचि रखने वाले हैं। दूसरी गतिविधियों (विशेषकर चक्रीय) को अधिक अनावर्ती करने के उद्देश्य में समय-श्रेणी के आकड़ों को प्रत्यक्ष करने के लिए अध्याय 16 में ध्यान दिया जाएगा।

स्वयं आदर्श गतिविधि में रुचि का कारण अनेक उद्देश्यों में से कोई एक हो सकता है। प्रथम यह हो सकता है कि हम आदर्श गतिविधियों को "सचिकनाता" चाहते हैं ताकि अर्थमूचक वर्ष में घटावही कम सुदृढ़ होगी। इसलिए विज्ञापनों द्वारा "आइसक्रीम आपके सर्वोत्तम भोजन में से एक है, प्रतिदिन एक प्लेट आइसक्रीम खाओ" कह कर सर्दियों में आइसक्रीम की माग को बढ़ाने के प्रयत्न किए गए। उत्पादन पक्ष में मुगियों को, कृत्रिम प्रकाश द्वारा दिन के समय को बढ़ाकर, बिना ऋतु के (सर्दियों में) अण्डे देने के लिए प्रेरित किया गया।

दूसरे, एक निर्माण प्रतिष्ठान अनुपूरक ऋतुनिष्ठ वस्तुओं के उत्पादन को बढ़ा कर इसकी गतिविधियों में ऋतुनिष्ठ प्रकृति को कम करने की इच्छा कर सकता है। इस प्रकार एक व्यवसाय सघ स्लैंड (बिना पहिये वर्क पर चलने वाली गाड़ी) तथा गार्डन कल्टीवेटर बनाता है। एक बहुत बड़े पैमाने पर उद्देश्य है ब्रिटेन से पास तक इन दोनों देशों में विद्युत् शक्ति का सम्बन्ध बनाने के लिए पानी में समुद्री तार बिछाना। फ्रांस की विद्युत् शक्ति का बहुत बड़ा अंश जल विद्युत् यंत्रों से आता है जो उत्तर ग्रीष्म काल में पानी की न्यूनता झेलते हैं जब कि ब्रिटेन के कोयले से चलने वाले जनित्र क्षमता से कम कार्य करते हैं। इनके विपरीत, अधिकतर शीत ऋतुओं में जब ब्रिटेन के जनित्रों पर क्षमता से अधिक दबाव डाला जाता है तो फ्रांस के पाम अपने जल विद्युत् यंत्रों को चलाने के लिये फालतू पानी पड़ा रहता है।

तीसरे, आदर्श गतिविधियों में कोई इसलिए रुचि लेता है जिससे वह इसका लाभ उठा सके। इसलिये गृहिणियों डिब्बाबन्दी तथा परिवर्तन के लिए उन दिनों में फलों का प्य करती हैं जब उनकी भरमार हो, मूल्य कम हो और वस्तु बढ़िया प्रकार की हो।

यद्यपि हम इन पुस्तक में उनका वर्णन करने का प्रयास नहीं करेंगे तथापि कुछ आवश्यक गतिविधियाँ हैं जो सामान्तर, सप्ताहान्तर और दिनान्तर के रूप में व्यक्त की जा सकती हैं। सामान्तर गतिविधि के उदाहरण के रूप में एक वाणिज्य बैंक के विषय में सोचिये जो महीने की पहली तथा पन्द्रहवीं तिथि के आम-पास चरम गतिविधि प्रदर्शित करे। यदि बैंक ऐम् क्षेत्र में है जहाँ कारखानों की माप्ताहिक वेतन-सूचिकाँ बनाई जाती हो तो उनका ध्यापार सप्ताहान्तर गतिविधि के गुण को भी प्रदर्शित कर सकता है जो इन बात पर निर्भर करेगा कि कारखानेदार अपने काम करने वाली की सप्ताह के कौनसे दिन (अथवा दिनों में) वेतन देने हैं। जब मासिक और माप्ताहिक चरमताएँ प्राप्त में मिलती हैं तो बैंक का कामचाली-वर्ग साम्बन्ध में व्यस्त हो सकता है। एक रविवार सप्ताहान्तर आवर्त का डाक के प्रति पाउंड नकद बिजय के अर्थों में मौखिक रॉयल्टी एंज कम्पनी द्वारा परीक्षण किया गया है। सामान्य सप्ताह के मध्य भाँकड़े इस प्रकार हैं : सोमवार 30, मंगलवार 37 बुधवार 35, बृहस्पतिवार 32, शुक्रवार 31। एक रेस्तराँ का व्यापार दिनान्तर गति का निरूपण प्रस्तुत करना है। प्रति सप्ताह दिवस की तीन चरमताओं के साथ प्रदग्धक की आगे की याजना बनानी चाहिए और पर्याप्त भोजन तथा इन अपेक्षतया अल्प किन्तु ध्यस्त समयों के लिए पर्याप्त महायत्ना रखनी चाहिए। ब्रिटेन से फ्रान तक विद्युत् समुद्री तार, जिनका अग्नी-प्रग्नी वर्गण किया गया था, दोनों देशों में विद्युत् की असमान अन्तर्दिन माँगों का मनुष्य कर्त्ता है। यद्यपि किसी ने अभी तक विद्युत्-शक्ति को संचय करने का सक्षम साधन नहीं बनाया है, तथापि पानी का बाँध के पीछे संचित किया जाना सम्भव है। यदि सूखे के मौसम में या किसी और मौसम में जबकि बाँध भरे हुए हों, फ्रांस कीवरीन थण्डा में से किसी भी समय ब्रिटेन की विद्युत् का प्रयोग करता है, तो कुछ फ्रांसीसी पानी फ्रांस में बाँधों के पीछे दोनों में से किसी भी देश की चरम माँगों को पूर्ण करने के लिये रूकड़ा किया जा रहा है।

वर्षीय गतिविधि — वर्षीय गतिविधि के उतार चढ़ाव हैं जो कालिक गतिविधियों में इन प्रकार निम्न हैं कि वे एक वर्ष में अधिक अन्तर की होती हैं और इस प्रकार भी कि वे साधारणतया नियमित कालक्रम का प्रदर्शन नहीं करती। व्यापार चक्र में प्राकृतिक गतिविधि नहीं है क्योंकि किसी एक व्यापार चक्र में किसी दिने गए बिन्दु पर व्यापार की अवस्था पहल मशीना की गति से प्रभावित की जाती है और कृषि निकट भविष्य में व्यापार पर प्रभाव डालती है। हमारे शब्दों में निम्न बिन्दु से उच्च बिन्दु पर सक्रमण एक प्रगतिशील विकास है, तथा इसी प्रकार इनके विपरीत। चक्र कुछ पैन्डुलम के सिद्धान्त पर कार्य करते हुए दीखते हैं। जिस प्रकार पैन्डुलम ऊर्ध्वाधर स्थिति की ओर गुरुत्वाकर्षण द्वारा खींचा जाता है परन्तु वह मन्द अग्नी मनुलन की स्थिति को पार करने की प्रवृत्ति में लगा रहता है, अथवा ऐसा कहा जाता है कि व्यापार माँग और पूर्ति की शक्तियों के द्वारा सन्तुलन की ओर खींचा जाता है तथा इसी प्रकार एक ओर की वृद्धियाँ विपरीत दिशा की वृद्धियों में आधिक्य करने की प्रवृत्ति रखती हैं। व्यापार चक्रों की इस प्रकार की परिभाषा “क्षय-उत्थापक मिडाल्स” के नाम से जानी जाती है। जो प्रायः वैसले सी० मिचल के नाम से सम्बन्धित है। परन्तु जिस प्रकार पैन्डुलम की यांत्रिक क्रिया को प्रेरित करने के लिये समय पर चाबी देनी पड़ती है, इसी प्रकार यह सम्भव है कि आर्थिक सक्रियता सन्तुलन प्राप्त कर लेगी, जबकि हमारे नोदनों के लिये प्रवृत्तता की विभिन्न मात्राएँ न हो, चक्रों का साधारण व्यापार में या चक्रों का विशेष उद्योगों में जैसे कि आवाय निर्माण

पशुपालन या कपड़ा उत्पादन में जिक्र करना सम्भव है। मुश्किल से चक्र एक विशेष उद्योग में अथवा व्यवसाय में परम्परागत दिखाई दे सकते हैं, अपितु वे, किसी भी क्षण, साधारण व्यापार में चक्र की अवस्था के द्वारा ढाल लिए जाते हैं। इसके अतिरिक्त, क्योंकि सभी उद्योग इतने अधिक अन्योन्याश्रित हैं। अतः एक मूल उद्योग या उद्योगों के समूह में पुनरुज्जीवन अथवा सुस्ती अपने प्रभाव को गतिविधि की दूसरी शाखाओं में संचारित करती है।

ऐसा हो सकता है कि अनेक महत्वपूर्ण उद्योगों की गतिविधि के उसी चक्रीय पक्ष के सगमन से साधारण गतिविधि के चक्रीय उतार-चढ़ाव उत्पन्न किये जाते हैं; या वे व्यापार के बाहर की घटनाओं से उत्पन्न किये जाते हैं। ये घटनाएँ बहुत बड़े परिमाण में कभी-कभी होने वाली घटनाएँ जैसे कि युद्ध, खोज, साधारण मौसम, या कोई राजनैतिक घटना हो सकती हैं, या वे कुछ छोटी-छोटी घटनाओं के युगपत् सगम हो सकते हैं जो एक दूसरे के प्रभाव पर पुनः दबाव डालते हैं।

जब चक्रों में स्थूल नियमितता दिखाई देती है, तो यह नियमितता कुछ बाहरी घटनाओं के कालक्रम द्वारा वर्णित की जा सकती है। हम विषय में कुछ विशेषज्ञों का विचार है कि वे भ्रष्ट, उत्तरदायी हैं। ऋतु में चक्रों का सुझाव दिया गया है। तथापि, इनकी अधिक सम्भावना है कि जिन नियमितता की ओर ध्यान देना है वह समय की उचित सतत अवधि के कारण है, जो कि व्यापार को उद्योगों के प्रति अनुक्रिया करने में लगता है। उदाहरणार्थ, भवन बनवाने या गिरवी चीज को छुड़वाने या दिवाला निकालने का निर्णय करने में लगाने वाला समय एकदम अनियमित नहीं होता। यदि यह आकस्मिक घटनाओं की अनियमितता के कारण न हो तो कदाचित् अधिक नियमितता दिखाई देगी।

कुछ और लोग हैं जो चक्रों के स्वयं-उत्पत्ति के सिद्धान्त को अस्वीकार करते हैं, और यह विश्वास करते हैं कि चक्र अधिकतर बाह्य प्रभावों के कारण आते हैं। ये प्रेक्षक भी उत्पादन और उपभोग बढ़ रहे हैं या गिर रहे हैं और विशेष रूप से स्थिरता के लिये व्यावहारिक साधनों की खोज में ध्यान देने की ओर रुचि रखते हैं। चार्ट 16.6 से, चाहे वे स्वयं उत्पन्न अथवा बाह्य कारणों से उद्भूत हों, यह स्पष्ट है कि संयुक्त राज्य संचारपथ विज्ञान में चक्रीय उतार-चढ़ाव रहे हैं, और चक्र एक ही लम्बाई के नहीं रहे हैं। चार्ट 16.6 भी समय श्रेणी के अध्ययन में प्रायशः आने वाली कठिनाई का चित्रण करता है। यह हम निर्णय से कि चक्र क्या है सम्बन्धित है। क्या चार्ट 16.6 का चक्र बड़े-बड़े दो चक्रों के विषय में प्रदर्शित करता है अथवा कुछ छोटे चक्रों के? श्रेणी के लिये प्रयुक्त उपनति के द्वारा निर्णय को प्रभावित किया जा सकता है। जैसा कि बाद में दिखाई देगा, प्रयुक्त उपनति एक सरल रेखा थी जिसे 1932—1960 के वर्षों से जोड़ा हुआ था तथा उसे 1964 में से बढ़ाया गया था। यदि हम एक बहुत छोटे समय, उदाहरणार्थ 1946—1964, से सम्बन्धित होते और केवल उन्हीं वर्षों के लिए उपनति का उपयोग किया होता, तो 19 वर्षों के काल में चक्रों की एक बड़ी संख्या प्रकट हुई होती।

अनियमित विचरण—एक समय-श्रेणी में अनियमित विचरणों को दो वर्गों में विभक्त किया जाता है प्रासंगिक तथा आकस्मिक। समय-श्रेणी में जब प्रासंगिक गतियाँ उत्पन्न होती हैं तो उन्हें श्रेणी के चार्ट में एकदम पहचाना जा सकता है, यदि वे विशिष्ट घटनाएँ हैं, जैसे भूचाल, प्रचण्ड भाग, हड़तालें, महान् भीषणों में पहले तथा देर से वर्षों का पिघलना, भस्कर तूफान या अन्य घटनाएँ। एक प्रासंगिक गति जोकि वापिक आँकड़ों में प्रतिबिम्बित होने के लिये महत्वपूर्ण है, चार्ट 11.3 में दिखाई देती है। 1918 में बहुत ऊँची

मृत्यु दर इन्फ्लूएन्जा महामारी के परिणामस्वरूप थी जिनसे सैनिक तथा असैनिक व्यक्तियों का बहुत मोतें हुई ।

जैसा कि पहले कहा गया है, एक घटना श्रेणी चत्रीय उत्तर-चढ़ाव उत्पन्न करने में या उत्पन्न करने में सहायक होने के लिये पर्याप्त महत्वपूर्ण हो सकती है । कभी-कभी एक प्रासंगिक गति तथा एक चक्र में अन्तर करना कठिन हो सकता है ।

आकस्मिक गतियाँ छोटे उत्तर-चढ़ाव होते हैं जो निदिष्ट प्रसंगों के कारण नहीं होती और इनकी अधिक छोटी हैं कि इन पर अलग-अलग विचार की आवश्यकता नहीं । कई बार ये आकस्मिक उत्तर-चढ़ाव यादृच्छिक प्रकृति वाले होते हैं । सयुक्त राज्य के समाचार-पत्र विज्ञापन की इन अनियमित घटनाओं (प्रासंगिक तथा आकस्मिक मिला कर) को चार्ट 16.7 तथा 16.8 में दिखाया गया है ।

अन्य गतियाँ—समय-श्रेणी में सामान्यतः पाई जाने वाली चार गतियाँ जिनका वर्णन किया जा चुका है, सबसे अधिक महत्वपूर्ण हैं । कभी-कभी अन्येषको को “लम्बे चक्र” मिलते हैं जिनकी अवधि सामान्य व्यापार चक्रों की अवधि से बहुत लम्बी होती है और जो लगभग 50 वर्ष के होत हैं । दोनों प्रकार के चक्र इकट्ठे विद्यमान हो सकते हैं और एक-दूसरे पर अध्यारोपित किए जा सकते हैं । कई बार समय-श्रेणी के विद्यार्थी एक समय-श्रेणी में दो से अधिक चत्रीय घटकों की विद्यमानता का दावा करते हैं । कई बार लम्बे चक्र तथा व्यापार चक्र के बीच मध्यस्थ जिस गति को “गौण उपनति” के नाम से पुकारते हैं, मिलती है । उस पुस्तक में हम लम्बे चक्रों या गौण उपनतियों की ओर आगे ध्यान नहीं देंगे अपितु उन चार गतियों पर अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे जिनका पहले वर्णन किया जा चुका है ।

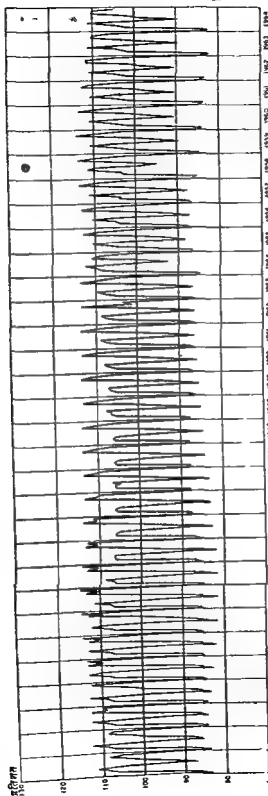
लंबाचित्रीय पूर्वदर्शन

यदि हम सयुक्त राज्य समाचारपत्र विज्ञापन के आँकड़ों के चार्ट को ध्यान से देखें, जिनका विस्तार से वर्णन बाद में किया जाएगा, तो समय-श्रेणी में चार प्रमुख गतियों की उपनति को अधिक स्पष्टतया समझा जा सकता है । चार्ट 16.4 की हल्की टूटी हुई रेखा लाली रेखाओं के रूप में मूलभूत आँकड़ों को दिखाती है । इस चक्र में सबकी सब गतियाँ - उपनति ऋतुनिष्ठ, चत्रीय तथा अनियमित आती है । चार्ट 11.7 श्रेणी में विद्यमान ऋतु-निष्ठ विचरण दिखाता है, और चार्ट 16.4 में ठोस रेखा ऋतुनिष्ठ विचरण के लिये समजित किये जाने के बाद के आँकड़ों को प्रदर्शित करती है । चत्रीय गतियों को चार्ट 16.6 में दिखाया गया है । यहाँ पर अनियमित गतियाँ का कोई भी चार्ट नहीं दिखाया गया है, परन्तु जैसे-जैसे हमें देखा गया है, उन्हें चार्ट 16.7 तथा 16.8 में देखा जा सकता है ।

आँकड़ों का प्रारंभिक प्रतिपादन

समय-श्रेणी में कुछ विचरण उन शब्दों के कारण है जिनमें आँकड़ों को व्यक्त किया गया है और कई बार समय-श्रेणी का विश्लेषण प्रारम्भ करने के पहले कुछ समझन करना उपयोगी हो सकता है ।

कैलेंडर भिन्नता—प्रायः, यद्यपि सन्देह नहीं, एक वर्ष में 365 दिन होते हैं । यद्यपि प्रत्येक वर्ष में 12 मास होते हैं तथापि महीनों की अवधि 28 से 31 दिन तक भिन्न-भिन्न होती है । स्थिति को और भी जटिल बनाने के लिये, विभिन्न मास न तो सप्ताह के उसी दिन प्रारम्भ होते हैं और न ही वही महीना अगले वर्षों में उस दिन प्रारम्भ होता



चार्ट 11.7. संयुक्त राज्य में समापारपत्र विज्ञापन की अनुनिष्ठ गतिपदा, 1933-1964। आंकड़ों के स्रोतों के सिधे सारको 163 की टिपणी देखिये।

है। एक और कठिनाई महीने में काम के दिनों की संख्या के बारे में आती है। महीने में न केवल शनिवारों और रविवारों की संख्या बदलती रहती है अपितु फरवरी में जिसके 28 या 29 दिन होते हैं वारिशमन तथा निकन के जन्म दिवस आते हैं, जबकि मार्च 31 दिन का होता है परन्तु हो सकता है, उसमें कोई छुट्टी न आए। फरवरी में काम करने के दिन कम से कम 18 हो सकते हैं जबकि मार्च में अधिक से अधिक 23 हो सकते हैं। ईस्टर के मार्च और अप्रैल में दोहन भी भ्रम के तत्त्व का परिचायक है।

यद्यपि एक वर्ष के पूर्ण सप्ताहों को बराबर संख्या में तिमाहियों में विभक्त करना असम्भव दिखाई देता है तो भी कुछ व्यापारिक फर्मों ने इस कठिनाई को न्यूनतम करने का प्रयास किया है। कुछ फर्मों 4 सप्ताह के अन्तरो का लेखा रखती हैं। इस प्रकार के 13 अन्तर एक वर्ष में आते हैं परन्तु इस ढंग से त्रैमासिक आंकड़ों को नहीं रखा जा सकता। कुछ और फर्म तिमाहियों के अनुसार वृत्त रखती हैं, प्रत्येक तिमाही तीन मास की होती है, पहले दो मास चार-चार सप्ताह के और तीसरा मास पाँच सप्ताह का। वास्तव में इन दोनों योजनाओं में से कोई भी सन्तोषजनक नहीं जबकि दोनों कृत्रिम महीनों में से किसी एक में प्रदत्त कैलेंडर का महीना आ जाए। और किसी भी योजना के अन्तर्गत छुट्टियों के अनुप-मुक्त ढंग से आने से परिणाम यह होता है कि आने वाले कृत्रिम मासों में काम करने के दिनों की संख्या बदल जाती है। कैलेंडर के इन दोषों को दूर करने के लिये कई आन्दोलन हुए। एक योजना समरूप तिमाहियों का सुझाव देती है, प्रत्येक में तीन मास होंगे, मास समरूप नहीं, अपितु प्रत्येक मासिक प्रतिरूप तीन अथवा इकतीस दिनों का होगा, इन तीनों प्रतिरूपों को दोहराया जाएगा ताकि एक वर्ष में ये चार बार आएँ। तथापि एक फालतू दिन जो साल का दिन के नाम से जाना जाएगा वर्ष के मध्य में आएगा।

मानविकी-विद् के सामने कई बार या तो महीने में कैलेंडर दिवसों की संख्या या एक मास में कार्य-दिवसों की संख्या के लिये काल-श्रेणी की व्यवस्था करने की कठिनाई आती है। यदि घरो में पानी के उपभोग के मासिक आंकड़े कैलेंडर भिन्नता के लिये समजित किये जाते हैं, तो समुचित समजन कार्य-दिवसों की अपेक्षा कैलेंडर-दिवसों का आधार पर होगा। प्रत्येक मासिक आंकड़े को दिनों की संख्या से भाग करके, प्रतिदिन का उपभोग बताते हुए यह समजन पूर्ण किया जाता है। यदि अकों को उनके मूल विस्तार में रखना वांछित हो तो प्रतिदिन के उपभोग को प्रति मास के दिनों की औसत संख्या से गुणा किया जा सकता है, जोकि 365 दिनों के वर्ष के लिये $365 - 12 = 30.4167$ है। मासिक उत्पादन आंकड़ों के लिये कैलेंडर भिन्नता के समजन में प्रत्येक मास में कैलेंडर के दिनों की अपेक्षा कार्य-दिवसों की संख्या का विचार आएगा।¹

कुछ काल-श्रेणियों का कैलेंडर भिन्नता के लिये समजन करना पूर्णतया अनुचित होगा। बहुत से निगमों के कार्यकारी प्रशासकीय तथा पर्यवेक्षण सम्बन्धी वेतन व्यय के लिये ऐसा करना स्पष्टतया भ्रामक होगा क्योंकि इस प्रकार के वेतन मास के दिनों अथवा मास के कार्य-दिवसों की संख्या पर विचार किए बिना प्रायः मासिक आधार पर दिए जाते हैं। समजन चाहने वाले आंकड़ों के लिए यह प्रायः कठिन सांख्यिकीय समस्या है कि काम करने वाले दिनों की व्यवस्था की जाए अथवा केवल कैलेंडर-दिनों को कुछ वस्तुओं के बारे

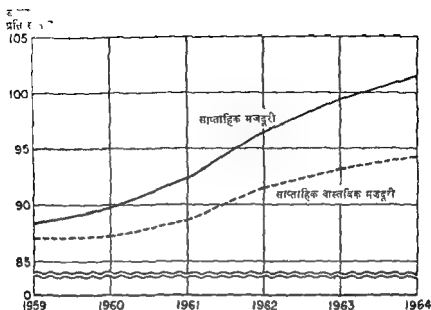
¹ प्रक्रिया के सम्बन्ध में विस्तृत अनुदेशों के लिए इस पुस्तक का द्वितीय संस्करण, पृष्ठ 255—256 देखिए।

मे तर्क की दृष्टि से यह कहा जा सकता है कि महीने के भीतर छुट्टियाँ, उस मास में उपभोक्ता क्रयो में कमी लाने की अपेक्षा, वास्तव में उन्हें बढ़ा सकती है। यदि अवकाश मास के अन्तिम दिन हो और भण्डार बन्द हो तो भी इससे विक्रय घट सकते हैं। उन सस्याओं का, जोकि डाक द्वारा बहुत दूर से आदेश प्राप्त करती हैं, पहले मास के अन्तिम कुछ दिनों में होने वाले अवकाशों द्वारा विक्रय घट सकता है। ताकिक समजन का निर्धारण करना प्रायः बहुत कठिन है और सम्बन्धित व्यापार या उद्योग की जानकारी आवश्यक है। सन्देह के मामले में प्रयोग द्वारा ऐसे नियम का निर्धारण करना सर्वदा सम्भव है जो समजन किये जाने के बाद सर्वथा निर्विघ्न परिणाम देता है। इस प्रकार का परीक्षण कोई निश्चयात्मक प्रमाण नहीं देता अपितु केवल कालान्तरिक होता है।

जनसंख्या-परिवर्तन—यह पहले ही देखा जा चुका है कि ऊर्ध्वमुखी उपनति में एक तत्त्व जनसंख्या में वृद्धि हो सकता है। मूलभूत अंकों को जनसंख्या के अंकों से विभक्त करके जनसंख्या परिवर्तन के लिये अंकितों का समजन किया जा सकता है, इस प्रकार प्रति व्यक्ति आधार पर अंकितों की अभिव्यक्ति होती है। यह बँसा ही है जैसा कि चार्ट 11.2 में किया गया था। वैकल्पिक रूप में, चुने गए जनगणना वर्ष जैसे कि 1960, को जनगणना अंकों के सापेक्ष सम्बन्ध में रखा जा सकता है जो 1.00 या 100 प्रतिशत के बराबर है। यदि मूलभूत अंकितों को जनसंख्या सापेक्षों से भाग दिया जाता है तो परिणामतः प्राप्त अंक निश्चित (1960 की) जनसंख्या में सम्बन्धित होंगे।

मूल्य परिवर्तन—व्याज प्रायः भौतिकीय मात्रा परिवर्तनों में केन्द्रित होता है न कि उन परिवर्तनों में जो डालरों की मदों में हुए हैं। उन श्रेणियों का जैसे कि विक्रय, आय, पदार्थों का मूल्य तथा अन्य जिन्हें मूलभूत रूप में डालरों में व्यक्त किया जाता है, उन शब्दों में व्यक्त किये जाने के लिये जो कि कीमत परिवर्तनों से स्वतन्त्र हैं अवश्यमेव अपस्फीतीकरण किया जाना चाहिए। डालर श्रेणी को एक उचित मूल्य सूचकांक श्रेणी से भाग करके अपस्फीतीकरण को पूर्ण किया जाता है। मारणी 11.1, 1959 से 1964 तक प्रतिवर्ष निर्माण उद्योगों में उत्पादन कर्मचारियों को दी जाने वाली माप्ताहिक औसत मजदूरी को दिखाती है। माप्ताहिक मजदूरी के स्तम्भ की दाईं ओर वही वर्ष के लिये उपभोक्ता मूल्य सूचकांक दिया गया है। अब यदि डालरों में प्रतिवर्ष माप्ताहिक मजदूरी को अनुरूपी मूल्य सूचकांक (दशमलव में अभिव्यक्त) में विभक्त किया जाता है तो परिणाम है साप्ताहिक मजदूरी अंकों की श्रेणी जो मूल्यों में परिवर्तनों के लिये समजित है। इनको स्तम्भ (4) में दिखाया गया है और वास्तविक-मजदूरी या विशेषतया 1957—1959 डालरों की मजदूरी की शब्दावली में संकेत किया गया है। चार्ट 11.1 साप्ताहिक डालर मजदूरी तथा साप्ताहिक वास्तविक मजदूरी के वक्र दिखाता है। यद्यपि 1959—1964 के बीच कीमतें बढ़ी, तो भी साप्ताहिक वास्तविक मजदूरी ने सतत वृद्धि दिखाई। ध्यान दीजिये, सारणी 11.1 तथा चार्ट 11.8 में प्रदर्शित, अंकों का औसत साप्ताहिक मजदूरी से सम्बन्ध है और उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का अपस्फीतिकारक के रूप में उपयोग किया गया। उदाहरण के लिए वस्तुओं के धोक मूल्यों का सूचकांक सर्वथा अनुपयोगी रहता। जब तक अपस्फीति किये जाने वाले अंकितों के सम्बन्ध में अपस्फीतिकारक का प्रयोग नहीं किया जाता तब तक मूल्य परिवर्तनों का एक सन्तोषजनक समजन प्राप्त नहीं किया जा सकता।

तुलनात्मकता प्राप्त करना—सांख्यिकीविदों को व्यापार मण्डलों के लिये सभी सदस्यों से शीघ्र विवरण प्राप्त करने में बहुत बड़ी कठिनाई प्रस्तुत होती है। उदाहरण के लिये,



चार्ट 11.8 निर्माण उद्योगों में उत्पादन कर्मचारियों की 1959—1964 की औसत कुल साप्ताहिक आय। सारणी 11.1 के पीछे। वास्तविक मजदूरी उपभोगता मूल्य-सूचकांक के रूप में है, जिसमें 1957—1959 = 100।

सारणी 11.1

निर्माण उद्योगों में उत्पादन कर्मचारियों की औसत कुल साप्ताहिक आय तथा उपभोगता मूल्य सूचकांक, 1959—1964

वर्ष (1)	साप्ताहिक आय (2)	मूल्य सूचकांक (1957—59=100) (3)	साप्ताहिक मजदूरी वास्तविक [स्तम्भ (2) — स्तम्भ (3)] (4)
1959	\$ 88.26	101.5	\$87.0
1960	89.72	103.1	87.1
1961	92.34	104.2	88.6
1962	96.56	105.4	91.6
1963	99.38	106.7	93.1
1964	101.40	107.8	94.1

क्रोकर स्टैटिस्टिकल ऐन्सर्टेक्ट ऑफ दि यूनाइटेड स्टेट्स, 1964,
पृष्ठ 236, 356 से।

93 फर्मों एक महीने के भीतर सूचना दे सकती है और 96 बाद में, तो भी बाद की फर्मों में आवश्यक रूप से सारी 93 फर्मों सम्मिलित नहीं है। पूर्णतया उचित होने के लिए प्रति मास सारे काल की एक नई काल-श्रेणी बनाई जानी चाहिये जिसमें सभी और केवल वे सभी फर्मों सम्मिलित हों जिन्होंने विचाराधीन वर्ष में शोधता से सूचना दी हो। इस प्रकार पूर्ण काल-श्रेणी में एक मास 93 फर्मों के लिये मापा जाएगा, और दूसरा महीना 96 के लिये। यह एक बहुत श्रमसाध्य ढंग है। केवल उन फर्मों के लिये, जिन्होंने चालू महीने के लिये शोधता से सूची दी हो, उनके पहले काल की प्रतिशतता को परिकलित कर और पहले महीने (जिसमें अब सारी फर्मों सम्मिलित हैं) के अको को इस प्रतिशतता से गुणा करके प्रारम्भिक अनुमान लगाना अधिक सुगम ढंग है। जब सारी सूचनाएँ मिल आयें तो सशोधित अको को परिकलित किया जा सकता है। यदि एक उद्योग का विस्तार हो रहा है और नई फर्में खुल रही हैं तो वास्तव में उन सबको सम्मिलित कर लेना उचित है। वर्तमान फर्मों की बढ़ी हुई गतिविधि या नई फर्मों के खुलने का परिणाम रोजगार तथा उत्पादन में वृद्धि हो सकता है। इसी प्रकार फर्मों का अस्तित्व समाप्त हो सकता है और इन्हें सूचना सूची से अवश्य ही समाप्त कर दिया जाना चाहिये।

अनुसूचीयता का दूसरा मोत यह तथ्य हो सकता है कि सूचना देने की इकाई बदल गई है। यदि यह केवल पाउंड आधार से टन आधार में परिवर्तन का प्रश्न है तो यह बात साधारण है। जहाँ पर उत्पादन प्रकार में बदला है, वहाँ भी सन्तोषजनक हल प्राप्त करना कठिन है। उदाहरणार्थ, हम 1935 तथा 1967 के मध्य रेडियो सेटों के भौतिक उत्पादन की तुलना कैसे कर सकते हैं? न केवल दो वर्षों में बेंचे गए रेडियो सेटों के विभिन्न स्तरों की मात्राओं में ही भिन्नता थी अपितु उन रेडियो सेटों की, जों कीमत, भार, दूरियों की सख्या अथवा अन्य शोधता से मापे जाने वाले गुणों की दृष्टि से समान थे, उपभोक्ता को उपयोगिता देने की अपनी क्षमता में भी विशाल अन्तर था।

काल-श्रेणी का विश्लेषण:

दीर्घकालिक उपनिषद्—ऋग्वेद रेखा

एक श्रेणी की उपनिषद् को वक्र के माध्यम से वर्णित करने के प्रयास के दो महत्वपूर्ण कारण हैं। प्रथम, उपनिषद् से विचलनों के माप की इच्छा की जा सकती है। इन विचलनों में चक्रीय, ऋतुनिष्ठ, तथा अनियमित गतिया आती हैं। बहुधा चक्रों का अध्ययन करने के लिये, चक्रों के अलग-अलग के प्रयास में इन विचलनों की प्राप्ति केवल एक पथ है। दूसरे, उन कारणों के प्रभाव को ध्यान से देखने के लिये जो उपनिषद् पर पड़ते हैं, एक उपनिषद् की दूसरी के साथ तुलना करने के लिये, उपनिषद् गतिया चक्रीय उतार-चढ़ावों पर क्या प्रभाव रखती हैं, इसकी खोज करने के लिये, अथवा उपनिषद् के भावी व्यवहार का पूर्वानुमान करने के प्रयास में स्वयं उपनिषद् का अध्ययन करने की इच्छा की जा सकती है।

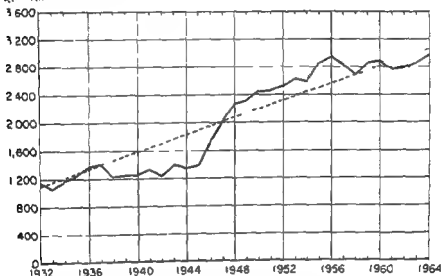
जिस उद्देश्य के लिये माप लिए गए हैं वह अपनाए गए ढंगों का प्रशस्त निर्धारण करता है। यदि उद्देश्य केवल मात्र चक्रों को अलग करना हो, तो यह कल्पना करना तर्कसंगत है कि चुनी हुई उपनिषद् रेखा चक्रों में से इस प्रकार गुजरे कि प्रत्येक चक्र के अन्तर्गत तथा ऋणात्मक खण्डों के मध्य निकटतम सन्तुलन होने दे। वास्तव में, वक्र द्वारा इस उद्देश्य की पूर्ति हो गई है, ऐसा समझना हमारी इस धारणा पर निर्भर करता है कि प्रत्येक दशा में एक किससे बनता है। यदि, इसके विपरीत, उद्देश्य तुलनाएँ करना, सामान्य निष्कर्ष निकालना, तथा भविष्यवाणी करना हो, तो वक्र केवल तर्कसंगत ही नहीं अपितु इस प्रकार के स्वभाव वाला भी होना चाहिए कि उसे भीन्नता से गणितीय सूत्र के द्वारा व्यक्त किया जा सके। उदाहरणार्थ, ऐसे सूत्र के माध्यम से एक व्यक्ति कह सकता है कि किसी निश्चित समय पर एक श्रेणी प्रति वर्ष विकास का एक निश्चित अनुपात, या एक निश्चित मात्रा प्रदर्शित करती है, और यदि यह प्रवृत्ति बनी रहे तो भविष्य में किसी विशिष्ट समय पर उपनिषद् किसी निश्चित मूल्य पर पहुँच जाएगी। तो भी उपनिषद् को गणितीय सूत्र द्वारा जोड़ने से उपनिषद् योग से मानसिक तत्त्व को नहीं हटाती। सांख्यिकीविद् सूत्र के उस ढंग के चयन से जिसका वह प्रयोग करता है, या उन वर्षों द्वारा जिनको वह वक्र में जोड़ता है, वक्र के व्यवहार को बदल सकता है। अतः यह स्पष्ट बना रहता है कि सांख्यिकी-विद् इस आधार पर कि निष्पन्न एवं तर्कसंगत आधार सम्भव है, पहले ही ऐसा निर्णय करता है जिसे वह सोचता है कि उपनिषद् को अवश्यमेव उसी प्रकार का दीखना चाहिये, और फिर वह ऐसे गणितीय सूत्र को चुनता है जिससे परिणाम लगभग निकटतम होगा।

निरीक्षण द्वारा आसजित उपनति

उपनति को लेखाचित्र द्वारा वर्णित करने का सबसे सरल ढंग निरीक्षण द्वारा है। यदि उपनति सरल रेखा हो तो उसे पारदर्शक पैमाने द्वारा या पर्याप्त खिंची हुई डोरी के टुकड़े द्वारा अंकित किया जा सकता है। यदि उपनति अरेखिक है, तो उसे स्वतन्त्रहस्त से खींचा जा सकता है अथवा कील का, समजनीय वक्र पैमाने का अथवा फ्रेंच वक्र का उपयोग किया जा सकता है।¹

वर्तमान

दस सालों में



चार्ट 12.1 संयुक्त राज्य अमरीका में, 1932—1964 में, समाचार-पत्र विज्ञापन और सीधी रेखा वाली उपनति को निरीक्षण द्वारा 1932—1960 के वर्षों से जोड़ना। विज्ञापन-वशावली के बाकड़ सारणी 12.2 में। चार्ट 12.3 के जीपक के बाद टिप्पणियाँ देखिये।

चार्ट 12.1 संयुक्त राज्य अमरीका में 1932—1960 के विये निरीक्षण द्वारा सीधी रेखा उपनति के समाचार-पत्र विज्ञापन के साथ मेलनता को दिखाता है। जब भी आंकड़ों के समूह के साथ एक वक्र को आसजित कर दिया जाता है तो आसजन की एक कसौटी की आवश्यकता पड़ती है। चार्ट 12.1 की उपनति को वक्र के द्वारा उम प्रकार अंकित किया गया था कि निरीक्षण के द्वारा निर्णित उपनति रेखा के ऊपर और नीचे के चक्रीय भाग लगभग बराबर थे। उपनति रेखा 1946 के मध्य विज्ञापन वशावली आंकड़ों की लगभग मोसत (निरीक्षण द्वारा निर्धारित) में से भी होकर गुजरती है। इस अत्यधिक व्यक्तिनिष्ठ विधि पर आपत्ति की जा सकती है जैसा कि सभी व्यक्तिनिष्ठ विधियों पर किया जा सकता है। व्यक्ति यह निश्चय करता है कि उसे क्या उत्तर चाहिये और फिर इसके निर्धारण

1. ये तीन व्यक्तिगत उन पद्धतियों से प्राप्त हैं जो रचनाकारों अथवा वक्ताओं की उपयोग की वस्तुएं देखती हैं।

करने को चलता है। तथापि, जैसा कि पहले बताया जा चुका है, प्राप्य बहुसंख्यक गणितीय प्रविधियों में से किसी को ध्यानपूर्वक चुनने से लगभग बहुत अधिक समान परिणाम प्राप्त किया जा सकता है।

ऋजु रेखा का न्यूनतम-वर्ग आसजन

एक गणितीय समीकरण न केवल हमें काल-श्रेणी में उपनति रेखा खींचने की अनुमति देता है अपितु उपनति समीकरण में, उस उपनति की एक सक्षिप्त परिभाषा भी प्रदान करता है। यदि स्वयं उपनति का अध्ययन करना हो या उसे प्रेक्षित प्रांकड़ों से परे बढ़ाया जाना हो तो यह विशेष रूप से आवश्यक है कि उपनति की एक वस्तुनिष्ठ रूप से निर्धारित समीकरण द्वारा व्याख्या की जाए।

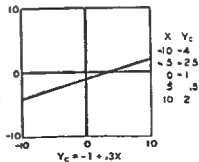
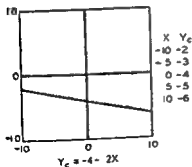
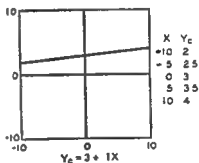
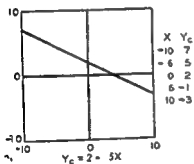
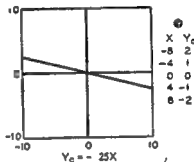
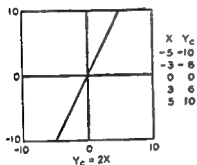
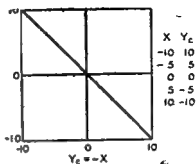
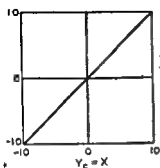
ऋजु रेखा—वक्र का सरलतम ढग ऋजु रेखा है जिसकी $Y_c = a + bX$ प्रकार के समीकरण द्वारा व्याख्या की गई है, जिसमें X स्वतन्त्र चर है तथा Y_c आश्रित चर का उपनति मान है।¹ क्योंकि विश्लेषणीय प्रत्येक श्रेणी के लिए उनके मूल्यों का निर्धारण अवश्य किया जाना चाहिये, अतः a तथा b का अज्ञातों के रूप में संकेत किया गया है। उन्हें स्थिरांक भी कहा जाता है क्योंकि एक बार उनके मूल्यों का निर्धारण हो जाने पर वे परिवर्तित नहीं होते।

एक सबसे सरल उदाहरण नेने के लिए, मान लीजिए कि $a=0$ तथा $b=1$; तब समीकरण $Y_c=X$ बनता है, इसका अर्थ यह है कि स्वतन्त्र चर की इकाई की प्रत्येक वृद्धि के साथ आश्रित चर भी एक इकाई बढ़ जाता है। इस समीकरण को चार्ट 12.2 के बाईं ओर के ऊपरी खण्ड में अंकित किया गया है। सयोगवश, यह ध्यान देना चाहिये कि चारों चतुर्थांश इस अध्याय में दिखाए गए हैं। वक्र बनाने का प्रयत्न करने से पूर्व, X तथा Y_c मानों की सारणी बनाना अच्छा है, जैसा कि चार्ट पर दिखाया गया है, जिसमें Y के परिकल्पित मूल्यों का अवन किया गया है, जो चुने हुए X मानों के अनुरूप हैं। वस्तुतः इसे या किसी भी ऋजु रेखा के बनाने के लिए केवल दो बिंदुओं के आवश्यकता पड़ती है, और दो X मानों को परस्पर एक दूसरे से पर्याप्त अन्तर के सम्मिलित प्रयोग करने से सबसे अधिक शुद्ध परिणाम प्राप्त होते हैं।

अन्य ऋजु-रेखा समीकरण तथा उनके वक्र, चार्ट 12.2 के दूसरे अनुभागों में दिखाए गए हैं, जिनका निरीक्षण निम्नलिखित जानकारी प्रदान करता है Y का मान a है जब कि X शून्य है (X मूलबिन्दु पर Y मूल्य), अथवा जैसा कि इसे प्रायः कहा जाता है, X घनत खण्डित करती है, जबकि b पक्ति के खड़ेपन अथवा ढाल का संकेत करती है। जब b घनात्मक हो तो ढाल ऊपर की ओर होता है, जब b ऋणात्मक हो तो ढाल नीचे की ओर होता है।

यद्यपि चार्ट 12.1 की ऋजु रेखा उपनति को निरीक्षण द्वारा प्राप्त किया गया था, प्रांकड़ों को गणितीय विधि से आसजित कर नहीं, तो भी हम इसके निकटतम समीकरण का निर्धारण कर सकते हैं। यदि मूलबिन्दु 1932 पर लिया जाए, तो यह देखा जाएगा कि वक्र का Y_c मान 1,100 है, अतः $a=1,100$ है। b का निर्धारण करने के लिए, हमें केवल 1960 के लिए केवल उपनति के मान को जानना आवश्यक है, जो कि 2,800 है, उस मान

2. Y चिह्न का आश्रित चर के प्रेक्षित मान को निरूपित करने के लिये प्रयोग किया जाएगा, जब कि Y_c प्रायः गणितीय समीकरण से परिकल्पित किये गए मान का संकेत करता है।



चार्ट 12.2 ऋजु रेखा समीकरण तथा ऋजु ।

तथा 1932 के लिए उपनि मान के मध्य के अन्तर को लो, और विगत वर्षों के अंक 28 के द्वारा विभक्त करो। यह हम

$$\frac{2,800 - 1,100}{28} = 60.71,$$

प्रदान करना है जब कि b का मान अर्थात् प्रत्येक वर्ष उपनि में वृद्धि की मात्रा है। तब समीकरण है—

$$Y_e = 1,100 + 60.71 X$$

मूलविन्दु 1932। Y इकाइयाँ, एक वर्ष।

काल-श्रेणी उपनि समीकरण अवलम्बित सर्वदा मूलविन्दु तथा X इकाइयों से संबंधित व्याख्या के साथ होना चाहिये। हम अवश्य ही इकाइयों का निर्देश करना चाहिये, क्योंकि जैसा कि हम बाद में देखेंगे, वह एक वर्ष छत्र मान, या एक मान हो सकता है। मूलविन्दु का अवलम्बित मूल बिन्दु माना चाहिये, क्योंकि आकृति की श्रेणी जोड़ के उद्देश्य के लिए वर्षों महीनों या अन्य कालानुक्रमिक इकाइयों द्वारा मूल्य उपयोग नहीं रखती। फलतः मार्गशीर्षक इकाइयाँ मूलविन्दु चुन सकता है, और हम बाद में देखेंगे कि जब भी सम्भव हो कालानुक्रमिक श्रेणी के मध्य पर वह मूलविन्दु चुनना लाभदायक रहेगा।

यदि हम चार्ट 12.1 की उपनि के समीकरण का, 1946 को मूल रूप में रखकर, पुनः लिखें, तो हमारा मान

$$Y_e = 1,949.9 + 60.71 X$$

मूलविन्दु, 1946, Y इकाइयाँ, एक वर्ष।

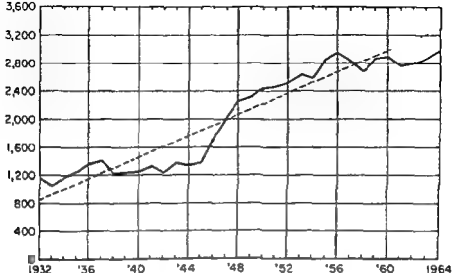
ध्यान दीजिए कि b का मान पहले जैसा है। a के नए मान को, या तो 1946 के उपनि मान का अध्ययन करके या a के पहले मान में b मान का 14 गुणा जोड़ कर, प्राप्त किया जा सकता है। b का मान को 14 में गुणा किया जाना है क्योंकि 1946, 1932 में 14 वर्ष पर है।

न्यूनतम वर्गों की विधि—न्यूनतम वर्गों का ढग आंकड़ों की श्रेणी के साथ ऋजु रेखा उपनि रेखा का वस्तुनिष्ठ आसन्न प्राप्त करने की सुविधाजनक युक्ति प्रदान करता है। इनका प्रयोग कई और अधिक जटिल उपनि-प्रकारों में भी किया जा सकता है जिनमें से कुछ का वर्णन अध्याय 13 में किया जाएगा। न्यूनतम वर्ग विधि के दो उद्देश्य हैं:

1 आसन्न ऋजु रेखा में प्रक्षिप्त मानों के ऊर्ध्वाधर विचलनों का योग शून्य के बराबर है। चार्ट 12.3 में 1932—1960 की उपनि रेखा से प्रत्येक X मान में यदि एक ऊर्ध्वाधर रेखा खींची जाए तो उपनि रेखा के ऊपर की ओर बटन वाली ऊर्ध्वाधर रेखाएँ उन रेखाओं का समर्थन मनुष्य कर देंगी जो नीचे की ओर बट रही हैं। यह उपनि केवल मात्र ऋजु रेखा नहीं है जिससे विचलनों का वीजगणित योग शून्य के बराबर हो, वस्तुतः कोई भी ऋजु रेखा (ऊर्ध्वाधर के अतिरिक्त) जो X में से गुजरती है, Y इस आवश्यकता की पूर्ति करती है।

2 इन सभी विचलनों के वर्गों का योग किसी अन्य ऋजु रेखा से वर्णित ऊर्ध्वाधर विचलनों के योग में कम है। इस दूसरी विशेषता के कारण ही आसन्न के ढग को न्यूनतम

पनिर्वा
10 लाख में
3,600



चार्ट 1.23. संयुक्त राज्य अमरीका में 1932—1964 में समाचारपत्र विज्ञापन तथा उपनति जैसा कि न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा एक ऋजु रेखा को 1932—1960 के वर्षों के साथ आसन्नित दिखाया गया है। सारणी 12.2 के अंक 3। ध्यान दीजिये कि हो सकता है दो उपनतियाँ प्रयुक्त की गई हों, एक श्रेणी के प्रथम भाग के लिये और दूसरी श्रेणी के बाद (देखें पृष्ठ 251—252 के भाग के लिये)।

वर्षों का ढग भी कहते हैं।³ जब इस दूसरी आवश्यकता को पूर्ण करने के लिये एक वक्र को आसन्नित किया जाता है तो प्रथम आवश्यकता की स्वतः पूर्ति हो जाती है।⁴

3 यह दिखाया जा सकता है कि उन विचलनों को शान्त करने की अधिकतम सम्भावना, जो किसी परिकल्पित मान अथवा मानों की श्रेणी के निर्दे प्रमाणान्वय रूप से वदित हों, तब प्राप्त होती है, जब वर्गित विचलनों का योग न्यूनतम हो (देखिए परिच्छेद 8, परिच्छेद 12.1)। यदि यह विश्राम हो कि समुचित प्रमाणान्वय से विचलन आरम्भिक भ्रष्टियाँ हैं, तो हमारा अभिप्राय यह है कि न्यूनतम वर्गों की विधि आसन्नन की समुचित विधि है। बीजगणितीय रूप से भी यह विधि सुविधाजनक है जिसमें विद्यार्थी महम्मद विनयेण तथा प्रवरण के विश्लेषण के सम्बन्ध में देख सकता है। उपनति रेखा के निर्दे तान-श्रेणी के उतार-चढ़ाव, फिर भी, स्वतन्त्र आरम्भिक घटनाएँ रही होने तथा यह वास्तविक है कि उपनति आसन्नन में न्यूनतम वर्गों की विधि के प्रयोग का मुक्ति के अतिरिक्त कोई अन्य विशेष कारण है। हम अन्य धेरणित उपनतियों से से कुछ, वास्तव में, अन्य विधियाँ से कामचिन् हैं। कुछ सांख्यिकीविद् तो यहाँ तक कहते हैं कि तान-श्रेणी उपनतियों के लिए न्यूनतम वर्गों की कभी-कभी समुचित नहीं है क्योंकि तान-श्रेणियाँ कभी-कभी चरम विचलनों का रूप ग्रहण कर लेती हैं जो प्रमाणान्वय मिष्ठान के अनुकूल नहीं होता। हाँ, न्यूनतम वर्गों की विधि वर्ग बनाने की प्रक्रिया के कारण, चरम विचलनों से विशेष रूप से प्रभावित होती है।

4. \bar{Y}_c मानों का माध्य \bar{Y} मानों के माध्य के समान हो होता है। यह परिच्छेद 8, परिच्छेद 19.1 में दिखाया गया है। फिर भी, उस ध्याना को पढ़ने से पूर्व पाठक को इस अध्याय के अन्तर्गत अध्याय को ध्यानपूर्वक देख लेना चाहिए।

एक प्रकार से न्यूनतम वग द्वारा विधि उपनति आसजित रेखा समान्तर माध्य के समान है, क्योंकि समान्तर माध्य माना की श्रेणी की अपेक्षा एक अकेला मान है जो आँकड़ों के समुच्चय को संक्षिप्त करता है और जिसमें सभी सभी वर्णन दो विग्रहताएँ हैं।

प्रसामान्य समीकरण—यह पहले ही विचार किया जा चुका है कि ऋजु रेखा समीकरण के अन्तगत दो स्थिर a तथा b मान है। आसजित ऋजु रेखा के लिये a तथा b के मान प्रेक्षित आँकड़ों से निर्धारित किये जाने चाहिये, फलतः दो प्रसामान्य समीकरण प्राप्त किए जाने चाहिये और युग्मत हल किए जाने चाहिये। ये प्रसामान्य समीकरण हैं

$$I \quad \Sigma Y = Na + b \Sigma X,$$

$$II \quad \Sigma \lambda I = a \Sigma \lambda + b \Sigma \lambda^2$$

इस बिंदु पर इन प्रसामान्य समीकरणों की प्राप्ति के प्रयत्न के बिना यह देखने के लिये कि ये दोनों समीकरण किस प्रकार प्राप्त होते हैं, हम मूल निदर्शों आँकड़ों के समुच्चय

सारणी 12.1

न्यूनतम वग की विधि द्वारा ऋजु रेखा के निदर्शों आँकड़ों X तथा Y के साथ आसजन के योगों तथा प्रसामान्य समीकरणों का निर्धारण।

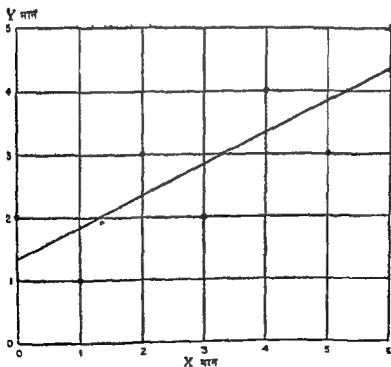
X	Y	प्रेक्षित समीकरण $Y = a + b\lambda$	प्रथम प्रसामान्य समीकरण का निर्धारण		द्वितीय प्रसामान्य समीकरण का निर्धारण		X	λ^2
			a का गुणांक	a के गुणांक से गुणा किया गया प्रेक्षित समीकरण स्तम्भ (3) \times स्तम्भ (4)	b का गुणांक	b के गुणांक से गुणा किया गया प्रेक्षित समीकरण स्तम्भ (3) \times स्तम्भ (6)		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	1	$2 = a$	1	$2 = a$	0	...	0	0
1	1	$1 = a + b$	1	$1 = a + b$	1	$1 = a + b$	1	1
2	3	$3 = a + 2b$	1	$3 = a + 2b$	2	$6 = 2a + 4b$	6	4
3	2	$2 = a + 3b$	1	$2 = a + 3b$	3	$6 = 3a + 9b$	6	9
4	4	$4 = a + 4b$	1	$4 = a + 4b$	4	$16 = 4a + 16b$	16	16
5	3	$3 = a + 5b$	1	$3 = a + 5b$	5	$15 = 5a + 25b$	15	25
6	5	$5 = a + 6b$	1	$5 = a + 6b$	6	$30 = 6a + 36b$	30	36
21	20	$20 = 7a + 21b$...	$72 = 21a + 91b$	74	91

5, दो प्रसामान्य समीकरणों की प्राप्ति के लिये परिशिष्ट घ, परिच्छेद 12.2 देखिये।

का प्रयोग करेंगे। आंकड़े सारणी 12.1 के स्तम्भ 1 तथा 2 एवं चार्ट 12.4 में दिखाए गए हैं, जहाँ यह देखा जा सकता है कि X तथा Y मानों के 7 जोड़े हैं। प्रत्येक पहले हम सात प्रेक्षण समीकरणों को लिखेंगे और फिर उनसे दो प्रसामान्य समीकरण प्राप्त करेंगे। सारणी 12.1 के स्तम्भ 3 में सात प्रेक्षण समीकरण दिखाए गए हैं। क्योंकि प्रेक्षित आंकड़े ऋजु रेखा पर नहीं पड़ते, अतः सात प्रेक्षण समीकरण सभी एक दूसरे के अनुरूप नहीं हैं। दो प्रसामान्य समीकरणों का यह उद्देश्य है कि वे हम इन प्रेक्षण समीकरणों के औसत हल के एक बग पर पहुँचा दें।

प्रथम प्रसामान्य समीकरण, प्रत्येक प्रेक्षण समीकरण को उस समीकरण में 1 के गुणांक से गुणा करके तथा जोड़ कर प्राप्त किया जाता है। a के गुणांक जा 1 हैं, सारणी 12.1 के स्तम्भ 4 में दिखाए गए हैं। स्तम्भ 5, पुनः प्रेक्षण समीकरण (अपरिवर्तित क्योंकि a के सभी गुणांक 1 थे) तथा उनके योग प्रदर्शित करता है, जो प्रथम प्रसामान्य समीकरण है।

द्वितीय प्रसामान्य समीकरण प्राप्त करने के लिये प्रत्येक प्रेक्षण समीकरण को उस समीकरण में b के गुणांक से गुणा किया जाता है और योग प्राप्त कर लिया जाता है। b के गुणांक सारणी 12.1 के स्तम्भ 6 में दिखाए गए हैं और गुणनों के परिणाम स्तम्भ 7 में दिये गए हैं। स्तम्भ 7 का योग द्वितीय प्रसामान्य समीकरण है।



चार्ट 12.4 एक ऋजु रेखा, न्यूनतम वर्गों की विधि द्वारा, निम्नलिखित मानों के एक समुच्चय में धातनित कर दी गई है। सारणी 12.1 के आंकड़े।

अब दो प्रसामान्य समीकरण स्थापित किये जा सकते हैं :

$$I. 20 = 7a + 21b,$$

$$II. 74 = 21a + 91b$$

इनको युगपत् रूप से हल करने के लिये हम प्रसामान्य समीकरण I को 3 से गुणा करते हैं और इसे प्रसामान्य समीकरण II में से घटाते हैं, इस प्रकार a का उन्मूलन किया जाता है और एक प्रज्ञात b के द्वारा एक समीकरण प्राप्त किया जाता है :

$$II. 74 = 21a + 91b,$$

$$(I \times 3). \quad \begin{array}{r} 60 = 21a + 63b, \\ \hline 14 = 28b, \end{array}$$

$$b = 0.5.$$

■ का मान प्राप्त करने के लिये हम b के मान का I या II किसी एक समीकरण में प्रतिस्थापन कर देते हैं। प्रसामान्य समीकरण I का प्रयोग करते हुए :

$$20 = 7a + 21(0.5),$$

$$= 7a + 10.5$$

$$7a = 9.5,$$

$$a = 1.357$$

परिणत के रूप में, a तथा b के मान का प्रसामान्य समीकरण II में निम्न प्रकार प्रतिस्थापन कर सकते हैं

$$74 = 21(1.357) + 91(0.5),$$

$$= 28.5 + 45.5,$$

$$= 74.0.$$

मासजित श्रृंखला (चित्र चार्ट 12.4 पर दिखाया गया है) को अब लिखा जा सकता है

$$Y_t = 1.36 + 0.5X.$$

ध्यान दीजिये कि हम प्रसंग में मूलबिन्दु या X इकाइयों का वर्णन करता आवश्यक नहीं था, क्योंकि X मान तिवर्या बही थी।

पूर्वगामी उदाहरण एक विशेष दृष्टान्त था जिसके अन्तर्गत मानों के केवल 7 जोड़े होते हैं। अधिक सामान्य होने के लिये, बाकी हम मानों के N जोड़ों के लिये प्रेषण समीकरण की निम्नलिखित प्रकार से लिखें :

$$Y_1 = a + bX_1$$

$$Y_2 = a + bX_2$$

$$Y_3 = a + bX_3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$Y_N = a + bX_N$$

अब यदि हम इन प्रेक्षण समीकरणों में से प्रत्येक को a के गुणांक (जो 1 है) से गुणा करें, तो वे अपरिवर्तित रहते हैं और उनका योग है

$$I \quad \sum Y = Na + b\sum X$$

यह प्रथम प्रसामान्य समीकरण है। द्वितीय प्रसामान्य समीकरण प्राप्त करने के लिये हम प्रत्येक प्रेक्षण समीकरण को उस समीकरण में b के गुणांक से गुणा करते हैं, तथा जोड़कर, प्राप्त करते हैं

$$X_1Y_1 = aX_1 + bX_1^2,$$

$$X_2Y_2 = aX_2 + bX_2^2,$$

$$X_3Y_3 = aX_3 + bX_3^2,$$

$$II \quad \frac{X_N Y_N = aX_N + bX_N^2}{\sum XY = a\sum X + b\sum X^2}$$

ध्यान दीजिये, हम $\sum aX$ तथा $\sum bX^2$ की अपेक्षा $a\sum X$ तथा $b\sum X^2$ लिखते हैं क्योंकि a और b स्थिर हैं।

अब हम एक श्रुजु रेखा उपनति के लिये दो प्रसामान्य समीकरणों का प्रयोग करने की स्थिति में हैं। हमें और प्रेक्षण समीकरण स्थापित करने की आवश्यकता नहीं पड़ेगी, केवल प्रसामान्य समीकरणों की आवश्यकता होगी। सारणी 12.1 के निदर्शी आँकड़ों के लिये केवल स्तम्भ 1, 2, 8, और 9 के योग तथा N मान का प्रयोग होता है, दो प्रसामान्य समीकरणों के लिए प्रदान करते हुए

$$I \quad 20 = 7a + 21b,$$

$$II \quad 74 = 21a + 91b,$$

जो कि वैसे ही है, जैसा कि सारणी के स्तम्भ 5 तथा 7 में दिखाए गए दो समीकरण हैं।

हम इस तथा अध्याय 13 में न्यूनतम वर्ग के सिद्धान्त द्वारा न केवल उपनति रेखाओं को जोड़ने के लिये दो या अधिक प्रसामान्य समीकरणों का प्रयोग करेंगे, अपितु हम उनका प्रयोग अध्याय 19, 20, तथा 21 में भी करेंगे जब हम रेखिक, भरेखिक तथा बहुविध सहसंबंधों का वर्णन करेंगे और इसका प्रयोग अध्याय 22 में भी किया जाएगा जहाँ हम काल-प्रेणी का सहसम्बन्ध बताएँगे।

वर्षों की विषम सत्या—सारणी 12.2 के आँकड़े तथा चार्ट 12.3 का ठोस वक्र समुक्त राज्य अमरीका में 1932—1964 के समाचारपत्रों में विज्ञापन की मात्रा को पवित्रों (दस लाख) में प्रदर्शित करते हैं। हम 1932—1964 के आँकड़ों में एक श्रुजु रेखा जोड़ देंगे और उस उपनति रेखा का 1964 में से विस्तार करेंगे। दो प्रसामान्य समीकरणों .

$$I \quad \sum Y = Na + b\sum X,$$

$$II \quad \sum XY = a\sum X + b\sum X^2,$$

का उपयोग, श्रुजु रेखा उपनति के लिए a तथा b के मानों का निर्धारण करने के लिये किया जाएगा। तो भी, उन्हें इस ढंग से सरस करना सम्भव है कि दोनों समीकरणों का

सारणी 12 2

1932—1960 में संयुक्त राज्य में श्रृंखला रेखा को समाधारण वित्तापन के
घाँकड़ों के साथ जोड़ने के लिये मानों की समझना
(पवित्तवाँ, दस-वाँच में)

वय	X	Y	XY	उपनति मान Y_n
1932	-14	1,164 8	-16 307 2	857 4
1933	-13	1,063 5	-13,851 5	933 7
1934	-12	1,178 9	-14,146 8	1,010 0
1935	-11	1,246 0	-13,706 0	1,086 2
1936	-10	1 380 0	-13,800 0	1,162 5
1937	-9	1 409 8	-12,688 2	1,238 8
1938	-8	1 225 4	- 9,803 2	1,315 0
1939	-7	1 243 6	- 8 705 2	1,391 3
1940	-6	1,268 6	- 7,611 6	1,467 1
1941	-5	1 313 2	- 6,566 0	1,543 9
1942	-4	1,241 8	- 4,967 2	1,620 1
1943	-3	1,396 4	- 4,189 2	1,696 4
1944	-2	1,361 3	- 2 722 6	1,772 7
1945	-1	1,391 6	- 1,391 6	1,848 9
1946	0	1 729 7	0	1,925 2
1947	1	2,008 6	2 008 6	2,001 5
1948	2	2,263 3	4,526 6	2,077 7
1949	3	2 302 1	6 906 3	2,154 0
1950	4	2,440 2	9,760 8	2 230 3
1951	5	2,478 3	12,391 5	2,306 1
1952	6	2,505 4	15,032 4	2,382 8
1953	7	2 610 5	18,273 5	2,459 1
1954	8	2,581 3	20,650 4	2 535 4
1955	9	2,843 5	25,591 5	2,611 6
1956	10	2,911 0	29,110 0	2,687 9
1957	11	2,829 1	31,120 1	2,764 2
1958	12	2,685 6	32,227 2	2,840 4
1959	13	2,865 3	37,248 9	2,916 7
1960	14	2,888 6	40,440 4	2,993 0
1961	15*	2,777 0*	.	3,069 3
1962	16*	2,798 3*	---	3,145 5
1963	17*	2,858 6*	.	3,221 8
1964	18*	2,973 4*	.	3,298 1
योग	0	55,829 4	154,831 9	

*उपनति का परिकल्पन करते क लिये अप्रयुक्त ।

झाँकड़ें सचें ग्राफ करेंट बिस्मैस के विभिन्न बको से ।

युग्मत् हल आवश्यक नहीं होगा। इस मध्य के कारण कि वर्ष X चर को बनाते हैं, हमें उस चर के लिये एक मूलबिन्दु को चुनना चाहिये। अब, हम जो वर्ष चाहे चुन सकते हैं तथा सारणी 12.2 में यह देखा जा सकता है कि 1946 में X मूलबिन्दु लिया गया था। मूलबिन्दु को मध्य वर्ष 1946 पर लेकर हमने X मानों के योग को शून्य के बराबर बनाया, इस परिणाम के साथ कि प्रसामान्य समीकरणों को अब इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\text{I. } \sum Y = Na,$$

$$\text{II. } \sum XY = b \sum X^2.$$

अब प्रसामान्य समीकरण I, a का मान देता है और प्रसामान्य समीकरण II, b का मान देता है। सारणी 12.2, $\sum Y$ तथा $\sum XY$ का परिकलन प्रदर्शित करती है। वर्षों की सख्या को गिन कर या अन्तिम में से पहले वर्ष को घटाकर तथा एक जोड़ कर N प्राप्त किया जाता है। $\sum X^2$ के मान का परिकलन सारणी 12.2 में किया जा सकता था। तथापि, काल-श्रेणी समस्या के लिये यह कदापि आवश्यक नहीं है, क्योंकि प्राकृतिक सख्याओं (1, 2, 3, ...) की श्रेणी के वर्गों के योगों को परिशिष्ट ख से पढ़ा जा सकता है या उस परिशिष्ट में दिये गए सूत्र द्वारा परिकलन किया जा सकता है। प्रथम 14 प्राकृतिक प्रकी के वर्गों का योग परिशिष्ट ख में 1,015 दोलता है, अतः समाधारण विज्ञापन आंकड़ों के लिए, $\sum X^2 = 2(1,015) = 2,030$ । अब हम दो प्रसामान्य समीकरणों में प्रतिस्थापन करके प्राप्त करेंगे :

$$\text{I. } a = \frac{\sum Y}{N} = \frac{55,829.4}{29} = 1,925.2 \text{ तथा}$$

$$\text{II. } b = \frac{\sum XY}{\sum X^2} = \frac{154,831.9}{2,030} = 76.2719.$$

उपनति समीकरण है

$$Y_0 = 1,925.2 + 76.27X.$$

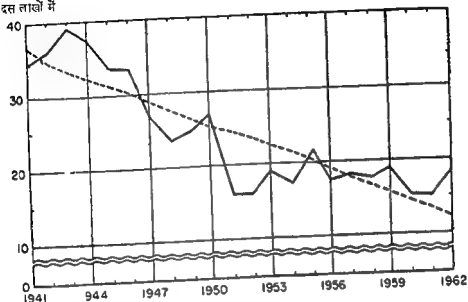
मूलबिन्दु, 1946, X इकाईयाँ, 1 वर्ष।

प्रत्येक वर्ष के लिये उपनति मान सारणी 12.2 के अन्तिम स्तम्भ में दिखाए गए हैं। उपनति समीकरण में उचित X मान (निम्न के साथ) की प्रतिस्थापना द्वारा एक उपनति मान प्राप्त किया जाता है। जब सभी वर्षों के लिये उपनति मानों की आवश्यकता पड़ती है, तो 1,925.2 लाख पक्षियों के a मान को 1946 के विपरीत रखकर तथा बार-बार b मान को 1947—1964 के वर्षों के लिए जोड़ कर उनको बड़ी शीघ्रता से प्राप्त किया जा सकता है। 1945 से 1932 तक के लिये b के मान को बार-बार 1946 के उपनति मान^१ में से घटाया जाता है। श्रेणी की उपनति को चार्ट 12.3 में दिखाया गया है। क्योंकि दो बिन्दु एक ऋजु रेखा का निर्धारण करते हैं, अतः इसे 1932 तथा 1960 के उपनति मानों में

6. बारम्बार जोड़ परिकलन यद्यपि किया जा सकते हैं या योग करने वाले यंत्र पर प्रत्येक बार जोड़ कर और अग्र योग करके किये जा सकते हैं। बारम्बार घटाव भी इसी प्रकार में किए जा सकते हैं। यदि ऐसे जोड़ करने वाले यंत्र का प्रयोग किया जाना है जिसमें घटाव कुंजी नहीं है तो सर्वोत्तम यह है कि पहले प्रथम वर्ष के उपनति मान का परिकलन करो और फिर बारम्बार जोड़ से अन्यो को प्राप्त करो।

परिकलन किया जा सकता है। प्रथम 11 विपम प्राकृतिक अकों के वर्गों के योग को परिशिष्ट ग से 1,771 देखा जाता है, अतः $\sum X^2 = 2(1,771) = 3,542$ अब हम a तथा b

हडबेट
दस लाखों में



चार्ट 12.5 संयुक्त राज्य अमरीका में 1941—1962 में शकरकन्द का उत्पादन, तथा उपनति जो न्यूनतम वर्गों की विधि द्वारा ऋजु रेखा के साथ प्राप्त किया गया है। सारणी 12.3 के बाँकड़।

के लिए दो प्रसामान्य समीकरणों का हल कर सकते हैं

$$I \quad a - \frac{\sum Y}{N} = \frac{528.2}{22} = 24.0.$$

$$II \quad b = \frac{\sum XY}{\sum X} = \frac{-1,956.4}{3,542} = -0.55$$

तथा उपनति समीकरण है

$$Y_c = 24.0 - 0.55X$$

मूलबिन्दु 1951—1952

X इकाइयाँ, $\frac{1}{2}$ वर्ष।

इस उपनति को चार्ट 12.5 में एक खण्डित रेखा द्वारा दिखाया गया है।

ध्यान दीजिये कि शकरकन्द के उत्पादन की उपनति का प्रयोगात्मक ढाल है। उपनति समीकरण में चिन्ह b , $\sum XY$ के परिवर्तन के फलस्वरूप प्राप्त हुआ है। जब योग ऋणात्मक हो तो यह ऋणात्मक होता है और योग धनात्मक हो तो यह धनात्मक होता है।

सारणी 12 3

1941—1962 में सयुक्त राज्य अमरीका में शकरकंद की उपज के आंकड़ों के साथ ऋजु रेखा को जोड़ने के लिए भागों का परिकलन
(दस लाख हट्टरेक्ट में)

वर्ष	X	Y	XY	उपनति मान
1941	-21	34 4	-722 4	35 6
1942	-19	36 0	-684 0	34 5
1943	-17	39 1	-664 7	33 4
1944	15	37 5	-562 5	32 3
1945	13	33 7	-438 1	31 2
1946	-11	33 5	-368 5	30 1
1947	-9	27 3	-245 7	29 0
1948	-7	23 7	-165 9	27 9
1949	-5	24 8	-124 0	26 8
1950	3	27 3	-81 9	25 7
1951	-1	16 0	-16 0	24 6
1952	1	16 0	16 0	23 5
1953	3	19 0	57 0	22 4
1954	5	17 2	86 0	21 3
1955	7	21 6	151 2	20 2
1956	9	17 4	156 6	19 1
1957	11	18 1	199 1	18 0
1958	13	17 6	228 8	16 9
1959	15	18 9	283 5	15 8
1960	17	15 4	261 8	14 7
1961	19	15 2	288 8	13 6
1962	21	18 5	388 5	12 5
योग	0	528 2	-1 956 4	

अंकित सयुक्त रा. अ. क. कृषि विभाग की एग्रिकल्चर स्टैटिस्टिक्स 1963 पृष्ठ 248 तथा हिस्टोरिकल स्टैटिस्टिक्स आफ दि यूनाइटेड स्टेट्स पृष्ठ 303 से

समीकरणों का मासिक आधार पर अनुकूलन

पूर्वोक्त उदाहरणों में उपनति रेखाएँ मासिक की अपेक्षा वार्षिक आंकड़ों के साथ आसजित की गई थी। मासिक आंकड़ों में ऋजु रेखा उपनति को जोड़ने की प्रक्रिया वार्षिक आंकड़ों में आसजन की प्रक्रिया से भिन्न नहीं होती परन्तु 12 बार उन प्रसिद्ध मानों पर विचार किया जाता है और क्योंकि X मान बृहत्तर हो जाते हैं तो अक्ष को 12 से अधिक से गुण कर दिया जाता है। इसीसे यह उचित है कि पहले उपनति रेखा को वार्षिक आंकड़ों से

से प्राप्त किया जाये और फिर उपनति को मासिक आधार पर वृद्धि दिया जाये। परिणाम सामान्यतया वही होता है जो उम समय आता यदि उपनति को मासिक आधार से प्राप्त किया जाय। कुछ परिस्थितियों में वार्षिक आंकड़ों से उपनति को प्राप्त करना अधिक पसंद किया जाता है क्योंकि एक तीव्र ऋतुनिष्ठ गति की विद्यमानता मासिक आंकड़ा से प्राप्त उपनति को विकृत कर सकती है।

वार्षिक योग- X इकाइयाँ एक वर्ष—1932—1960 के समाचारपत्र विज्ञापन के वार्षिक आंकड़ों के लिए उपनति को, 1946 के मूलबिन्दु तथा एक वर्ष की X इकाइयों के साथ $Y_c = 1,925.2 + 76.27X$ पाया गया। आधारभूत आंकड़े प्रति वर्ष विज्ञापन की पत्रिकाओं के प्रति दस लाख में थे, अतः प्रत्येक अंक उस वर्ष का योग था जिसका वह संकेत करता था।

a के लिए प्राप्त मूल्य (चार अंकों तक) 1,925.2 मिलियन पत्रिकाएँ, और $a = \frac{\Sigma Y}{N} = 1,925.2$, 1932—1960 के वर्षों के लिए 29 अंकों का समान्तर माध्य था। क्योंकि अंक 1,925.2 वार्षिक योगों का a मान था, अतः मासिक रूपों में a मान इसके बारहवें भाग के बराबर होगा, या 160 433.3 मिलियन पत्रिकाएँ होगा।

वार्षिक आंकड़ों से, b को 762.7 मिलियन पत्रिकाएँ पाया गया। अब संपूर्ण वर्ष के लिए समाचारपत्र विज्ञापन की मात्रा में यह वार्षिक वृद्धि है। यदि हम वार्षिक योगों को 12 से विभाजन कर दें तो हमें मासिक उपनति वृद्धि प्राप्त होती है। क्योंकि अब भी हमारे पास वार्षिक योग हैं, इसलिए हमें अंकों को घटाकर प्रति मास पत्रिकाओं को लाखों में लाने के लिए पुनः 12 से भाग करना पड़ेगा। हम एक ही समय में, 144 से भाग देकर, $76.27 - 144 = 0.5297$ मिलियन पत्रिकाओं का मासिक b मान प्रदान करते हुए, इन दोनों कार्यों को द्रुत पूर्ण करते हैं। मासिक रूपों में समीकरण है

$$Y_c = 160 433.3 + 0.5297X$$

मूलबिन्दु, जून—जुलाई 1946 X इकाइयाँ, 1 मास।

हमारा समझन एकदम पूर्ण नहीं हुआ है। इस कारण कि एक वर्ष में मासों की संख्या सम होती है अभी अभी प्राप्त समीकरण का एक मूलबिन्दु है जो दो मध्य मासों के बीच में पड़ता है और इसलिए मौलिक मासिक आंकड़ों से आधा भाग पीछे है। अतः दो मासों के मध्य स्थित मूलबिन्दु को किन्हीं सुविधाजनक मास तक सरका देना चाहिए। आधे हम इसे जुलाई 1946 तक सरका दें। यह केवल मात्र a के मान का मासिक b मान के आधे द्वारा बढ़ाने का संकेत करता है या $(0.5 \times 0.5297) = 0.2649 b$ । मान अपरिवर्तित रहना है। तब नया समीकरण है

$$Y_c = 160 698.2 + 0.5297X$$

मूलबिन्दु जुलाई 1946, X इकाइयाँ, 1 मास।

हम केवल पाँच अंकों का अभिनव रखेंगे जब हम मारणी 16.3 में इस समीकरण का प्रयोग मासिक उपनति मानों को प्राप्त करने के लिए करेंगे।

7 यह हमेशा सच रहेगा चाहे मौलिक आंकड़ा महीने के प्रारम्भ के हों, महीने के मध्य के हों, महीने के अन्त के हों या किन्हीं अन्य प्रकार के हों। यह उचित नहीं होगा जब कि 13 मास के वर्ष का प्रयोग किया जाता है।

वार्षिक योग— X इकाइयाँ एक छमाही—जब 1941—1962 के शकरकंद उत्पादन में ऋजु रेखा उपनति आसजित की गई थी तो फलतः समीकरण की X इकाइयाँ छमाही में थी क्योंकि आँकड़ों वर्षों की सम समस्या पर लागू होते थे।⁸ शकरकंद उत्पादन की वार्षिक उपनति समीकरण को एक मासिक आधार में बदलना विशेष रूप से सार्थक नहीं होगा क्योंकि शकरकंद का उत्पादन वर्ष में प्रति मास नहीं होता। न ही निदर्शन यहाँ पर आवश्यक है क्योंकि प्रविधि पूर्णतया वंसी ही है जैसा कि अभी-अभी वर्णित की गई है, सिवाय इस बात के कि b मान को 144 की अपेक्षा $6 \times 12 = 72$ से भाग दिया जाता है। यह इस कारण से है क्योंकि b मान वार्षिक उपनति समीकरण में उस वृद्धि का संकेत करता है जो उपनति में प्रत्येक छ मास के काल में होती है।

मासिक श्रौसतेँ— X इकाइयाँ, एक वर्ष—यदि एक ऋजु रेखा उपनति को वार्षिक आँकड़ों से आसजित कर दिया गया है जो कि वर्षों की प्रत्येक विषम समस्या के लिए मासिक श्रौसतेँ हैं तो केवल मान वार्षिक b को 12 से भाग देने की और मूलबिन्दु को सरकाने की आवश्यकता पड़ती है ताकि यह मासिक आँकड़ों के अनुरूप हो जाए। कल्पना कीजिये कि निम्न वस्तु के उत्पादन की 1942—1966 वर्षों के लिए उपनति को प्राप्त कर लिया गया है जिसकी वार्षिक उपनति निम्नलिखित समीकरण है :

$$Y_c = 2,430 + 24.0X.$$

मूलबिन्दु, 1954, X इकाइयाँ, 1 वर्ष।

मूल आँकड़े क्योंकि प्रत्येक वर्ष के लिए मासिक श्रौसतेँ हैं, अतः a के मान के समजन की आवश्यकता नहीं है। b का मान वार्षिक वृद्धि को व्यक्त करता है और मासिक उपनति वृद्धि ज्ञान करने के लिए उसे 12 से भाग देना आवश्यक है। तब मासिक उपनति समीकरण होगी

$$Y_c = 2,430 + 2.0X$$

मूलबिन्दु, जून —जुलाई 1940, X इकाइयाँ, 1 मास।

समजन का पूर्ण करने के लिए, हमें समीकरण के मूलबिन्दु को आवश्यक सरका देना चाहिए ताकि दो मासों के मध्य पड़ने की अपेक्षा इसका संयोग एक मास पर पड़े। यदि मूलबिन्दु को जून 1954 तक सरका दिया जाए, तो केवल मात्र यह आवश्यक है कि a के मान का मासिक b मान के आधे के बराबर कम कर दिया जाए, जिससे प्राप्त होगा

$$Y_c = 2,429 + 2.0X$$

मूलबिन्दु, जून 1954, X इकाइयाँ, 1 मास।

मासिक श्रौसतेँ— X इकाइयाँ, एक छमाही—प्रविधि वंसी ही है जैसी अभी वर्णित की गई है सिवाय इसके कि अर्ध-वार्षिक b को 6 से भाग किया जाता है।

8 एक वार्षिक उपनति समीकरण को, शकरकंद उत्पादन के समान सरकाया जा सकता था ताकि X इकाइयाँ छमाही के स्थान पर एक वर्ष हो जाती। इसके लिए केवल b के मान को दुपटा करने की आवश्यकता होती है। फिर भी मूलबिन्दु को सरकाना भी आवश्यक होगा ताकि वह दो वर्षों के मध्य न पड़ कर एक वर्ष पर पड़े।

वार्षिक ऋजु रेखा उपनति समीकरणों को मासिक आधार पर सरकाने की प्रविधि की पूर्ववर्ती व्याख्या का सदर्थ के उद्देश्यो से, निम्न प्रकार से सार-निरूपण किया जा सकता है :

वार्षिक समीकरण में X इकाई	श्रांकडों का प्रकार			
	मासिक श्रौमत्त		वार्षिक योग	
	a	b	a	b
एक वर्ष	कोई परिवर्तन नहीं	12 से भाग करो	12 में भाग करो	144 से भाग करो
छ मास	कोई परिवर्तन नहीं	6 से भाग करो	6 में भाग करो	72 से भाग करो

सभी परिस्थितियों में, मूलविन्दु अवश्य सरका दिया जाना चाहिये ताकि वह दो मासों के मध्य पड़ने की अपेक्षा एक मास पर पड़े ।

उपनति विश्लेषण के लिये काल-चयन

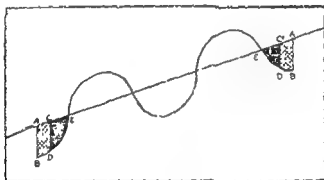
सामान्यतः जब उपनति का निर्धारण किया जाता हो तो यथासम्भव अधिक से अधिक लम्बा काल ग्रहण करना उचित है । यह अभ्यास उपनति की अधिक विश्वस्त व्याख्या को जन्म देता है और एक ऐसी व्याख्या को जो एक या दो विस्तृत चक्रीय गतियों से कम प्रभावित होती है ।

यदि श्रेणी की उपनति की प्रकृति बदल चुकी है तो दो उपनतियों का प्रयोग करना आवश्यक हो सकता है । दो उपनतियों को एक साथ गूँथ कर जोड़ना सम्भव हो सकता है भयवा नहीं भी हो सकता । 1930 की मदी इतनी भयंकर थी कि कुछ श्रेणियों के लिए अब यह दिखाई देता है कि इसकी प्रकृति पुनः समजन की अधिक रही है । फलतः यदा कदा पुनः समजन से पहले वर्षों के लिये एक उपनति का प्रयोग किया जा सकता है, परन्तु पुनः समजन के पश्चात् आने वाले वर्षों के लिये उससे भिन्न उपनति का । चार्ट 12.3 में दिखाए गए, मनाचारपर विज्ञापन के श्रांकडों के साथ दो उपनतियों को आसजित करना सम्भव था परन्तु हमने एक अधिक लम्बे समय पर लागू होने वाली केवल एक उपनति को दिखाने के लिए उन श्रांकडों को चुना था ।

कौनसा काल प्रयोग में लाया जाए इस सम्बन्ध में निर्णय करने में पूर्व यह महत्वपूर्ण है, कि श्रेणी के पहले कुछ वर्षों तथा बाद के कुछ वर्षों की ओर विशेष रूप से ध्यान दिया जाए । यदि श्रांकडे केवल दस या पन्द्रह वर्षों को आवृत्त करते हैं तो यह विशेष महत्त्व की बात है अधिक लम्बे कालों के लिये यह कम महत्वपूर्ण है । प्रथम वर्ष मन्दी वाला और अन्तिम वर्ष सम्पन्नता वाला नहीं होना चाहिये, क्योंकि यह उन्नत उपनति को बहुत अधिक सीधी या खड़ी बना देगा बहुत अधिक बड़ा हो जाएगा । इसके विपरीत, यदि प्रथम वर्ष सम्पन्नता का होना जबकि अन्तिम वर्ष मन्दी का था तो ढाल, यदि ऊर्ध्वगामी होना, तो पर्याप्त खड़ा न होना b बहुत छोटा होना । ढाल में इस प्रकार के निरर्थक कारणों के प्रवेश को रोकने के लिये प्रथम तथा अन्तिम वर्ष, चक्र की विपरीत दिशाओं

पर होने चाहियें (उपनति की विपरीत दिशाओं पर नहीं) और उपनति के ऊपर या नीचे लगभग समान अन्तर पर होने चाहिये। इस प्रकार चाटें 12.6 में $CD = C'D'$ तथा D से D' तक बढ़ाए गए झकड़ों से आसजित उपनति का एक ढाल सही होगा।

न केवल ढाल ही सही होना चाहिए, बल्कि उपनति का स्तर भी उपयुक्त होना चाहिए। यदि चाटें 12.6 के D से D' तक जाते हुए झकड़ों के साथ उपनति जोड़ी हुई हो तो उपनति का स्तर बहुत अधिक ऊँचा होगा। उपनति को B से B' तक जाने वाले काल से जोड़ दिया जाना चाहिये। इसका परिणाम उपनति के लिये एक उचित स्तर होगा, क्योंकि क्षेत्र ABE तथा $A'B'E$ में प्रत्येक एक चक्र के एक-चौथाई के बराबर है—पहले तथा अन्तिम वर्ष दोनों विशेष रूप से महामन्दियों के निम्न बिन्दु नहीं हो सकने, क्योंकि तब उपनति के स्तर को नीचा कर देंगे, a बहुत छोटा हो जाएगा। इसके विपरीत, अन्तिम वर्ष विशिष्ट सम्पन्नता के दोनों उच्च बिन्दु नहीं होने चाहियें। क्योंकि तब वे अनुचित रूप से उपनति के स्तर को बढ़ा देंगे।



चाटें 12.6 चक्र तथा उचित उपनति।

समाचारपत्र विज्ञापन के लिये उपनति को 1932—1960 के वर्षों के साथ जोड़ दिया गया था। यद्यपि, जैसा कि चाटें 12.3 में देखा जा सकता है, श्रेणी, चक्र की समान स्थिति में प्रारंभ तथा समाप्त नहीं होगी तो भी उपनति सन्तोषजनक है क्योंकि प्रावृत्त काल अपेक्षतया लम्बा है। यदि पूर्ववर्ती कुछ वर्षों को हटा दिया जाता अथवा बाद के कुछ वर्षों को सम्मिलित कर लिया जाता तो उपनति समीकरण में कौनसे परिवर्तन हुए होते? 1932—1960 के काल के लिये पहले प्राप्त समीकरण 1946 पर मूलबिन्दु तथा X इकाइयाँ 1 वर्ष के साथ था

$$Y_c = 1,925.2 + 76.27X$$

उसी मूलबिन्दु तथा X इकाइयों का प्रयोग निरन्तर करते रहने से पाठक सारणी 12.2 पर आधारित परिकलनों द्वारा पढ़ना कर सकता है कि यदि प्रथम चार वर्षों को हटा दिया जाय तो 1936—1960 के लिए उपनति समीकरण

$$Y_c = 1,877.0 + 85.00X$$

होगा। पिछले अनुच्छेदों में दिए गए नियमों को ध्यान में रखते हुए, 1936—1960 के वर्ष उपनति निर्धारण के लिए 1932—1960 वर्षों की अपेक्षा अधिक उचित है। तथापि, श्रेणी की लम्बाई के कारण परिणामों में थोड़ा सा अन्तर है, 1936—1960 समीकरण को, यदि

चाटें 12.3 पर खींचा जाता तो 1932—1960 उपनति से अन्तर केवल अन्त में मालूम किया जा सकता था ।

यदि अन्तिम चार वर्षों को जोड़ दिया जाता तो 1932—1964 के लिये उपनति समीकरण निम्नलिखित होता :

$$Y_e = 1897.8 + 69.82X$$

इस समीकरण का भी, यदि चाटें 12.3 पर खींचा जाए, केवल अन्त में 1932—1960 उपनति से अन्तर मालूम किया जा सकता था ।

उपनति के प्रकार का चयन

क्योंकि अब तक की चर्चा निरीक्षण द्वारा उपनतियों को जोड़ने, और न्यूनतम वर्गों की विधि द्वारा ऋजु रेखाओं को जोड़ने तक सीमित रही है, अतः यहाँ पर उपनति के प्रकार के सम्बन्ध में अधिक कहने को नहीं है । आगामी अध्याय में वर्णित कुछ अतिशक्ति प्रकारों पर विचार करने के बाद हम यह विचार करने के लिये अधिक अच्छी अवस्था में होंगे कि बहुत से सम्भव उपनति प्रकारों में से कौनसा सबसे अधिक उचित है ।

प्रथम पग के रूप में, मौलिक ढाँचों को हमेशा आरेखित करना चाहिये और उनका परीक्षण करना चाहिये । निरीक्षण द्वारा एक प्रायोगिक उपनति बनाना भी उपयोगी हो सकता है । कई बार निरीक्षण द्वारा जोड़ी हुई उपनति पर्याप्त हो सकती है, परन्तु जब स्वयं उपनतिका ही अध्ययन किया जाना हो, या उसे बढ़ाना हो, तो एक गणितीय समीकरण का उपयोग किया जाना चाहिये । यदि चाटें के ढाँचों का परीक्षण दर्शाता है कि उपनति रेखिक नहीं है तो अध्याय 13 में वर्णित उपनति के प्रकारों में से एक उचित हो सकता है । चुनी हुई उपनति का प्रकार ऐसा होना चाहिये जो उस श्रेणी के सदस्य में जिसका वह वर्णन करता है तथा उस श्रेणी पर प्रभाव डालने वाली शक्तियों के सदस्य में तर्कसंगत होना चाहिए । यही कारण है कि एक ऋजु रेखा से जो वृद्धि तथा कमी की स्थिर मात्रा दर्शाती है, विवर्धित काल के लिये एक श्रेणी की उचित उपनति बनाने की भाशा नहीं की जा सकती ।

काल-श्रेणी का विश्लेषण :

दीर्घकालिक उपनति II—अरेखिक उपनतियाँ

अध्याय 12 में केवल सरलतम प्रकार के उपनति समीकरण, ऋजु रेखा, का वर्णन किया गया। यह देखा गया था कि एक ऋजु रेखा श्रेणी की उपनति के लिए पर्याप्त मज्जा विवरण प्रदान कर सकती है, परन्तु कालों के लिए किसी प्रकार की वक्र रेखा की आवश्यकता पड़ सकती है। यह अध्याय कुछ अरेखिक समीकरण के प्रकारों की विशेषताओं का वर्णन करेगा, यह वर्णन करेगा कि उन्हें कैसे आसजित किया जाए, और कुछ संकेत देगा कि विभिन्न उपनति प्रकारों में क्या किस प्रकार प्रारम्भ करें।

साधारण बहुपद

वक्रों के इस परिवार में अपने अधिक प्राथमिक प्रतिनिधि के रूप में सरल रेखा आती है, जिसके यह समरूप होगा, दो दिशाएँ हैं। ऋजु रेखा तथा चार भाग बहुपदों को नीचे दिखाया गया है।

प्रथम अंश (ऋजु रेखा)..... $Y_t = a + bX$.

द्वितीय अंश..... $Y_t = a + bX + cX^2$.

तृतीय अंश..... $Y_t = a + bX + cX^2 + dX^3$.

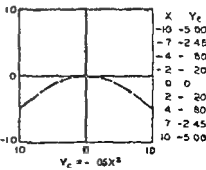
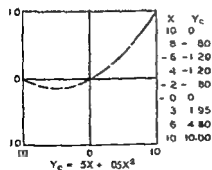
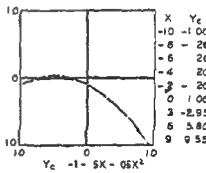
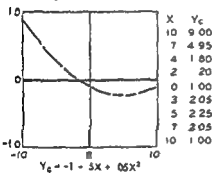
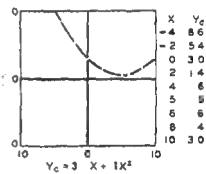
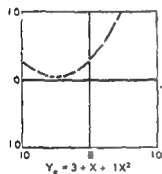
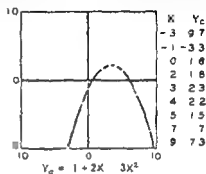
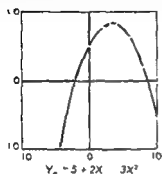
चतुर्थ अंश... $Y_t = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$.

पञ्चम अंश . . $Y_t = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 + fX^5$.

जब सीधी रेखा के समीकरण में एक तृतीय स्थिरांक को जोड़ दिया जाता है तो द्वितीयांश वक्र, जिसका एक मोड़ है, प्राप्त हो जाता है। द्वितीयांश वक्र में मोड़ होने के कारण वक्र का ढाल सतत परिवर्तित हो रहा है। यदि X मूल्यों की पर्याप्त सराया की सम्मिलित कर लिया जाता है, तो द्वितीयांश वक्र के एक भाग का ढाल घनात्मक तथा दूसरे भाग का ऋणात्मक होगा। इसका अवलोकन चार्ट 13.1 में किया जा सकता है जिसमें आठ द्वितीयांश वक्रों को दिखाया गया है।

द्वितीयांश समीकरण में जुड़ा हुआ प्रत्येक स्थिरांक वक्र में एक अतिरिक्त मोड़ उत्पन्न कर सकता है। इस प्रकार, एक तृतीयांश वक्र के दो मोड़ हो सकते हैं, जैसा कि चार्ट 13.2 में दिखाया गया है। चार्ट 13.2 में दो वक्रों में से नीचे वाला इस बात को प्रदर्शित करता है कि तृतीयांश वक्र का ढाल घनात्मक से ऋणात्मक या ऋणात्मक से घनात्मक दो बार बदल सकता है। क्योंकि ढाल की दिशा में इस प्रकार का परिवर्तन चतुर्थांश वक्र में तीन बार और पंचमांश वक्र में चार बार हो सकता है, अतः इससे परिणाम निकलता है कि चतुर्थांश तथा पंचमांश वक्रों का संपाद, दीर्घकालीन उपनति की धारणा से, जिसमें हमें

रुचि है, कठिनाई से होगा। परिसामत, हम आगे चतुर्थीय तथा पचमाश वक्र की ओर कोई ध्यान नहीं देंगे अपितु द्वितीयीय वक्र के आसन्न की प्रक्रिया का कुछ विस्तार से वर्णन करेंगे और तृतीयीय वक्र के विषय में संक्षेप से विचार करेंगे।



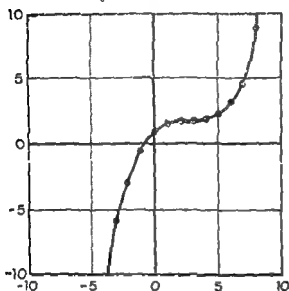
चार्ट 13.1 द्वितीयीय समीकरण तथा वक्र।

द्वितीयांश वक्र—द्वितीयांश वक्र ऋरेखा से थोड़ा-सा जटिल है क्योंकि इसके अन्तर्गत ऋजु रेखा के लिए समीकरण में cX^2 का जोड़ आता है, जिससे निम्नलिखित प्राप्त होता है :

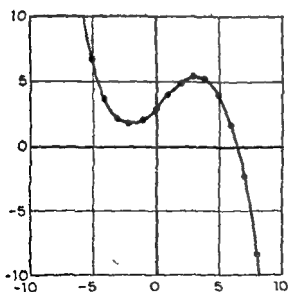
$$Y_c = a + bX + cX^2$$

ग्राह द्वितीयांश समीकरण, जो चार्ट 13.1 में सारित किए गए हैं, समीकरण के इस प्रकार के लचीलेपन का कुछ आभास प्रदान करते हैं। इस प्रकार काल-श्रेणी से प्रभावित

$$Y_c = 1 + X - 4X^2 + 0.5X^3$$



X	Y_c
-3	-6.95
-2	-3.00
-1	-0.45
0	1.00
1	1.65
2	1.80
3	1.75
4	1.80
5	2.25
6	3.40
7	5.55
8	9.00



X	Y_c
-5	6.75
-4	3.80
-3	2.25
-2	1.80
-1	2.15
0	3.00
1	4.05
2	5.00
3	5.55
4	5.40
5	4.25
6	1.80
7	-2.25
8	-8.20

$$Y_c = 3 + X + 1X^2 - 0.5X^3$$

चार्ट 13.2 द्वितीयांश समीकरण तथा वक्र।

इस प्रकार के वक्रांशों का ढाल ऊर्ध्वगामी या अधोगामी हो सकता है (या एक अंश में ऊर्ध्वगामी और दूसरे में अधोगामी) और ऊपर की ओर घवतल या नीचे की ओर घवतल हो सकता है। जब कि एक ऋजुरेखा वृद्धि या कमी की एक स्थिर मात्रा का संकेत करती है, वहाँ एक द्वितीयांश वक्र के अन्तर्गत वृद्धि या कमी की बढ़ती हुई या घटती हुई मात्राएँ आती हैं। अधिक विशेष रूप से व्यंजक $Y_c = a + bX + cX^2$ से प्राप्त मूल्यों के दूसरे अन्तर स्थिर हैं।¹

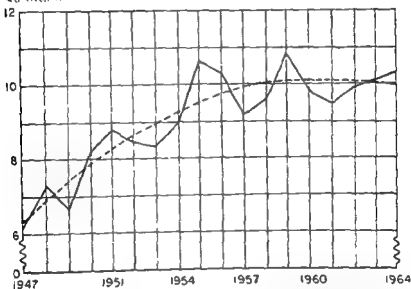
द्वितीयांश वक्र का आगमन—क्योंकि द्वितीयांश वक्र में तीन स्थिरांक या घनांशक हैं, अतः निम्नलिखित तीन प्रामाण्य समीकरणों की आवश्यकता पड़ती है।

$$\text{I} \quad \Sigma Y = Na + b\Sigma X + c\Sigma X^2$$

$$\text{II} \quad \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3$$

$$\text{III} \quad \Sigma X^2 Y = a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4$$

श्रद्धेय
दस लाखों में



चार्ट 13.3 संयुक्त राज्य में 1947—1964 में प्रदर्शित निम्न
उत्पादन, तथा उपनति जैसी एक द्वितीयांश वक्र से दिखाई गई है। सारणी
13.1 के पक्षक।

1 चार्ट 13.1 के परिच्छेद 2 के लिए Y_c मूल्यों का विचार करने पर यह देखा जा सकता है, जिसके लिये समीकरण $Y_c = -1 + 2X - 0.3X^2$ है

X	Y_c	प्रथम अन्तर	द्वितीय अन्तर	X	Y_c	प्रथम अन्तर	द्वितीय अन्तर
-3	-9.7			2	1.8	-1.1	-0.6
-2	-6.2	-3.5		3	2.3	-0.5	-0.6
-1	-3.3	-2.9	-0.6	4	2.2	0.1	-0.6
0	-1.0	-2.3	-0.6	5	1.5	0.7	-0.6
1	0.7	-1.7	-0.6	6	0.2	1.3	-0.6

तथापि, हम इन परिणामों के साथ कि X की सभी विषम घातों का योग शून्य है, एक काल-श्रेणी का वर्णन कर रहे हैं, और मूल बिन्दु पहले की भाँति वर्ष (या किसी अन्य इकाई) के मध्य में या दो मध्य वर्षों के बीच में लिया जा सकता है। अतः तीन प्रसामान्य समीकरण निम्नलिखित बन जाते हैं

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \Sigma Y &= Na + c \Sigma X^2, \\ \text{II} \quad \Sigma XY &= b \Sigma X^2 \\ \text{III} \quad \Sigma X^2 Y &= a \Sigma X^2 + c \Sigma X^4. \end{aligned}$$

ध्यान दीजिये, कि तीन समीकरणों को सम्मिलित रूप में हल किए जाने के पूर्व समीकरण II से b का मान प्राप्त किया जाता है जब कि a तथा c के मान समीकरण I तथा III को एक साथ हल करने से प्राप्त होते हैं। मध्य वर्ष का मूल बिन्दु के रूप में प्रयोग करने से हम श्रम में बहुत बचत कर सकते हैं।

सारणी 13.1 और चार्ट 13.3, 1947 से 1964 तक के वर्षों के लिए संयुक्त राज्य अमरीका में अशोधित जिप्सम के उत्पादन को प्रदर्शित करते हैं। श्रेणी की उपनति रेखिक नहीं है और ये झँकड़े द्वितीयान्न चक्र के जोड़ के हमारे उदाहरण का आधार बनेंगे। तीन प्रसामान्य समीकरणों को $N \Sigma Y \Sigma XY$, तथा $\Sigma X^2 Y$ के सांख्यिकीय मानों की, जिन्हें सारणी 13.1 में से प्राप्त किया जा सकता है तथा ΣX^2 और ΣX^4 (प्रथम तीन विषम प्राकृतिक संख्या के लिए) मानों की, जिन्हें परिशिष्ट 5 से पढ़ा जा सकता है, आवश्यकता पड़ती है। तीन प्रसामान्य समीकरणों में प्रतिस्थापन से निम्नलिखित प्राप्त होते हैं।

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad 163,178 &= 18a + 1,938c. \\ \text{II.} \quad 207,396 &= 1,938b. \\ \text{III} \quad 16,734.682 &= 1,938a + 374,034c \end{aligned}$$

b का मान द्वितीय प्रसामान्य समीकरण से दिया जाता है।

$$\begin{aligned} 1,938b &= 207,396, \\ b &= 107,015. \end{aligned}$$

तत्पश्चात्, a तथा c का मान प्रसामान्य समीकरण I तथा III को एक साथ हल करके प्राप्त किया जाता है। यह ये हैं :

1 प्रसामान्य समीकरण I को 193 से गुणा करो और इस नए प्रकार के प्रसामान्य समीकरण I में से प्रसामान्य समीकरण III को घटाओ और इस प्रकार a का मान प्राप्त होगा।²

$$(1 \times 193). \quad 31,493,354 = 3,474a + 374,034c.$$

$$\text{III} \quad 16,734,682 = 1,938a + 374,034c.$$

$$14,758,672 = 1,536a$$

$$a = 9,608.51041.$$

2. गुणा करने वाला गुणनखण्ड 193, प्रसामान्य समीकरण III में c के गुणांक को प्रसामान्य समीकरण I में c गुणांक से भाग करके प्राप्त होता है। अर्थात्, $\Sigma X^4 - \Sigma X^2 = 374,034 - 1,938 = 193$ । जब दोनों समीकरणों को एक साथ हल कर रहे हों तो अज्ञात के गुणांकों के अवनफल से समीकरणों में से एक को गुणा करके और एक समीकरण में से दूसरे समीकरण को घटा कर उस अज्ञात का निरसन किया जा सकता है, जिसे हदया है।

संयुक्त राज्य अमरीका में 1947—1964 में, प्रक्षोभित निम्नम उत्पादन के द्वितीयांश वक्र के साथ जोड़ के मानों का परिकलन
(प्रति हजार छोटे ह्य मे)

वर्ष	X	उत्पादन Y	XY	X ² Y	उपनति मानों की संगणना		
					X ²	a + bX	cX ²
1947	-17	6,208	-105,536	1,794,112	289	7,789 3	-1,457 7
1948	-15	7,255	-108,825	1,632,375	225	8,003 3	-1 134 9
1949	-13	6,608	-85,904	1,116,752	169	8,217 3	-852 4
1950	-11	8,193	-90,123	991,353	121	8,431 4	-610 3
1951	-9	8,666	-77,994	701,946	81	8,645 4	-408 6
1952	-7	8,415	-58,905	412,335	49	8,859 4	-247 2
1953	-5	8,293	-41,465	207,325	25	9,073 4	-126 1
1954	-3	8,996	-26,988	80,964	9	9,287 5	-45 4
1955	-1	10,684	-10,684	10,684	1	9,501 5	-50
1956	1	10,316	10,316	10,316	1	9,715 5	-50
1957	3	9,195	27,585	82,755	9	9,929 6	-45 4
1958	5	9,600	48,000	240,000	25	10,143 6	-126 1
1959	7	10,900	76,300	534,100	49	10,357 6	-247 2
1960	9	9,825	88,425	795,825	81	10,571 7	-408 6
1961	11	9,500	104,500	1,149,500	121	10,785 7	-610 3
1962	13	9,969	129,597	1,684,761	169	10,999 7	-852 4
1963	15	10,169	152,535	2,288,025	225	11,213 7	-1,134 9
1964	17	10,386	176,562	3,001,554	289	11,427 8	-1,457 7
योग	0	163,178	+207,396	16,734,682	1,938

द्वितीयोक्तल स्टैटिस्टिक्स ग्रॉफ दि युनाइटेड स्टेट्स, पृष्ठ 361, स्टैटिस्टिकल एंसेट्र वट ऑफ दि यूनाइटेड स्टेट्स 1964, पृष्ठ 727, 1962 पृष्ठ 712, तथा सर्वे ग्रॉफ करेन्ट बिजनेस के विचित्र अंको हे।

2. c का मान प्राप्त करने के लिए प्रसामान्य समीकरण I में a का मान प्रतिस्थापित करो।

$$\begin{aligned} \text{I } 163,178 &= 18(9,608\ 51014) + 1,938c \\ 1\ 938c &= -9,775\ 1874 \\ c &= -5\ 04395634. \end{aligned}$$

3. a तथा c के लिए प्राप्त मानों को प्रसामान्य समीकरण III में प्रतिस्थापित करो।

यह पग 1 तथा 2 में परिकलनों की जाँच के रूप में कार्य करता है।

$$\begin{aligned} \text{III } 16\ 734\ 682 &= 1\ 938(9\ 608\ 51041) + 374\ 034(-5\ 04395634), \\ &= 16\ 734\ 682 \end{aligned}$$

द्वितीयांश उपनति समीकरण को अब इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\begin{aligned} Y_c &= 9\ 608\ 51 + 107\ 015X - 5\ 0440X^2 \\ \text{मूलबिन्दु } 1955-1956, \quad X &\text{ इकाइयाँ, } \frac{1}{5} \text{ वर्ष।} \end{aligned}$$

उपनति मानों का परिकलन सारणी 13.1 के अन्तिम बार स्तम्भों में दिखाया गया है। चार्ट 13.3 में दिखाई गई उपनति इन उपनति मानों को आरेखित करने का परिणाम है। ध्यान दीजिये अग्रोघात जिप्सम का उत्पादन संबंधित वर्षों में साढ़े चार चक्रों को प्रदर्शित करता हुआ प्रतीत होता है।

तृतीयांश वक्र

द्वितीयांश वक्र के समीकरण में एक और स्थिरांक को जोड़ कर हम वक्र में एक और मोड़ डालने के योग्य हो जाते हैं। जब ऋजु रेखा का केवल एक ही ढाल होता है, वहाँ द्वितीयांश वक्र (चार्ट 13.1) एक स्थल पर घनात्मक दिशा की ओर जाता है तथा अन्य स्थल पर ऋणात्मक दिशा की ओर जाता है और तृतीयांश वक्र (चार्ट 13.2) में ढाल की तीन दिशाएँ हो सकती हैं।

एक तृतीयांश वक्र के लिए चार प्रसामान्य समीकरण आवश्यक हैं

$$\begin{aligned} \text{I } \Sigma Y &= Na + b\Sigma X + c\Sigma X^2 + d\Sigma X^3, \\ \text{II } \Sigma XY &= a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3 + d\Sigma X^4 \\ \text{III } \Sigma X^2 Y &= a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4 + d\Sigma X^5, \\ \text{IV } \Sigma Y^2 Y &= a\Sigma X^3 + b\Sigma X^4 + c\Sigma X^5 + d\Sigma X^6 \end{aligned}$$

पुनः यदि X मूलबिन्दु की काल के मध्य में लिया जाता है तो निम्नलिखित समीकरणों को छोड़ने हुए X की विषम घाता का योग शून्य होता है

$$\begin{aligned} \text{I } \Sigma Y &= Na + c\Sigma X^2 \\ \text{II } \Sigma XY &= b\Sigma X^2 + d\Sigma X^4 \\ \text{III } \Sigma X^2 Y &= a\Sigma X^3 + c\Sigma X^5 \\ \text{IV } \Sigma X^3 Y &= b\Sigma X^4 + d\Sigma X^6 \end{aligned}$$

इस अवस्था में समीकरणों के साथ हमें चार युग्मपत् समीकरणों का हल नहीं करना पड़ता, यद्यपि वह आवश्यक होता यदि मूलबिन्दु काल के मध्य की अपेक्षा कहीं और लिया जाता। समीकरण I तथा III को एक साथ हल करके a तथा c के मानों को प्राप्त कर लिया

जाता है, समीकरण II तथा IV का युगपत् हन b तथा d के मान देता है। श्रको के केवल एक स्तम्भ का, उनके अतिरिक्त जो माग्णी 13 I में दिखाए गए हैं, परिकलन किया जाना चाहिए, इस स्तम्भ का शीर्षक X^2Y है जिसका योग ΣX^2Y प्रदान करता है। ध्यान दीजिए समीकरण I तथा III बिल्कुल वैसे हैं जैसे कि द्वितीयांश वक्र के लिए थे। परिणामतः, श्रांकडों के एक प्रदत्त समुच्चय के लिए a तथा c के मान द्वितीयांश वक्र तथा तृतीयांश वक्र के लिए समान होंगे।³

लघुगणकों का प्रयोग

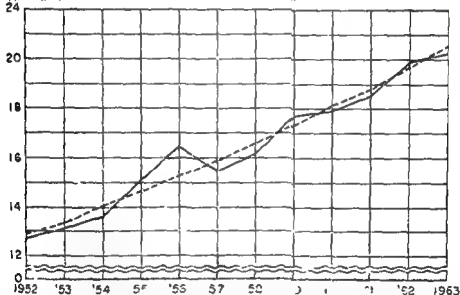
लघुगणकों से प्राप्त जित श्रजु रेखा —चार्ट 13 4 पर डानी गई एक दृष्टि यह पर्याप्त स्पष्ट कर देती है कि $Y_t = a + bX$ प्रकार का वक्र दिखाए गए समय के लिये एस्काट के उत्पादन की उपनति का सन्तोषजनक विवरण नहीं होगा। एक द्वितीयांश वक्र प्रयोग में लाया जा सकता है, परन्तु एक अग्रिम तर्क-समर्थ उपनति समीकरण प्राप्य है। इस ध्येयी

छोटे ढल

दस लाखों में

24

अर्कागितीय ऊर्ध्वाधर पैमाना



चार्ट 13.4 1952—1963 में संयुक्त राज्य अमेरिका में पैटोलियम से एस्काट का उत्पादन तथा उपनति जैसा कि श्रजु रेखा को श्रांकडों के लघुगणकों से प्राप्त कर दिखाया गया है। ध्यान दीजिये कि इस चार्ट का अर्कागितीय ऊर्ध्वाधर पैमाना है और उपनति रेखा थोड़ी सी मुड़ी हुई है। माग्णी 13.2 के अंकडे।

3 देखें, आर० ए० फिशर द्वारा लिखित स्टैटिस्टिकल मॅथड्स फॉर रिसर्च वनर्स तेरहवाँ संस्करण, हाफनर पब्लिशिंग कम्पनी, न्यूयार्क, 1958, अध्याय V और VI. आर० ए० फिशर तथा एफ० वेम् द्वारा लिखित स्टैटिस्टिकल टेबल्स फॉर बायताॅजिकल, ऐग्रीकल्चरल एण्ड मॅडिकल रिसर्च, तृतीय संस्करण, हाफनर पब्लिशिंग कम्पनी, न्यूयार्क, 1949, पृष्ठ 23—25 तथा 70—80 भी देखिए। साम्बिक बटुपदों के विवरण के लिए, इस पुस्तक का दूसरा संस्करण, पृष्ठ 289—290 देखिए।

से आसजित द्वितीयांश वक्र इस प्रकार से व्यवहार करेगा कि प्रति वर्ष वृद्धि की मात्रा समान दर से बढ़ती जाएगी, यह वही बात है जैसे कि यह कहना कि उपनति मानो का दूसरा अन्तर एक स्थिरांक है, परन्तु इन अतिरिक्त शर्तों के साथ कि (1) उपनति ऊर्ध्व-गामी है तथा (2) दूसरे अन्तर घनात्मक है। अब $Y_t = ab^X$ प्रकार का वक्र परिवर्तन के स्थिर अनुपात का संकेत करता है, और यदि इस प्रकार का वक्र चार्ट 13.4 के आंकड़ों में जोड़ना होता तो यह स्पष्ट है कि अनुपात 1.0 से कम होने की अपेक्षा 1.0 से बड़ा होता। कहने का आशय यह है कि श्रेणी बढ रही है। एस्फाल्ट उत्पादन के आंकड़ों को चार्ट 13.5 में अर्धलघुगणकीय कागज पर खींचा गया है, और यह दृष्टिगोचर होता है कि उपनति जो चार्ट 13.4 में रेखिक नहीं थी अब रेखिक है। यह $Y_t = ab^X$ प्रकार के समीकरण, चरघाताकी वक्र की उपयुक्तता का संकेत करता है।

यह सम्भव नहीं है कि चरघाताकी वक्र को न्यूनतम वर्गों के द्वारा सीधे Y मानो से आसजित कर दे, तथापि हम मूल आंकड़ों के लघुगणकी के साथ न्यूनतम वर्गों को आसजित कर सकते हैं, और इसका परिणाम है उपनति मानो से प्रेरित मानो के लघुगणकी के वर्णित विचलनों को न्यूनतम करना। राष्ट्रीय समीकरण को लघुगणकीय अवस्था में रखने से प्राप्त होता है

$$\text{लघु } Y_t = \text{लघु } a + X \text{ लघु } b,$$

जो X तथा लघु Y के संबंध में एक ऋजु रेखा है। प्रत्यामान्य समीकरण हैं

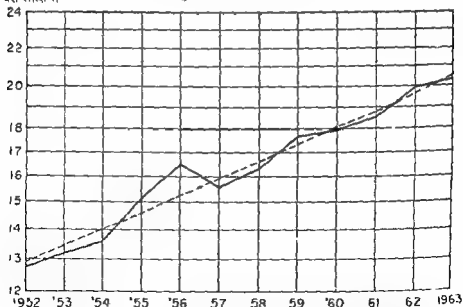
$$I \quad \sum \text{लघु } Y = N \text{ लघु } a + \text{लघु } b \sum X$$

$$II \quad \sum X \text{ लघु } Y = \text{लघु } a \sum X + \text{लघु } b \sum X^2$$

छोटे टन

दस लाखों में

लघुगणकीय ऊर्ध्वार पैमाना



चार्ट 13.5 1952-1963 में संयुक्त राज्य अमेरिका में पेट्रोलियम से एस्फाल्ट का उत्पादन, तथा उपनति जैसा कि ऋजु रेखा को आंकड़ों के लघुगणकी के साथ जोड़ कर दिखाया गया है। ध्यान दीजिये कि इस चार्ट का लघुगणकीय ऊर्ध्वार पैमाना है और उपनति रेखिक है। सारणी 13.2 के जाँचें।

क्योंकि X मूलबिन्दु को काल के मध्य में लिया जा सकता है इसलिए $\sum X = C$, मत इन समीकरणों को लिखा जा सकता है

$$I \quad \sum \text{लघु } Y = N \text{ लघु } a$$

$$II \quad \sum X \text{ लघु } Y = \text{लघु } b \sum X^2$$

सारणी 13 2

1952—1963 में लघुवस्तु राज्य समरीका में पेट्रोलियम से एस्काट उत्पादन के लघुगणकों के साथ ऋज रखा के आमजन के लिए मानों का परिकलन (छोटे टन सहस्रा में)

वर्ष	X	उत्पादन Y	लघु Y	X लघु Y	उपनति मान	
					लघु I_c	Y_c
1952	-11	12 784	4 106667	-45 173337	4 110353	12,893
1953	-9	13 165	4 119421	-37 074789	4 128751	13 451
1954	-7	13,620	4 134177	-28 939239	4 147150	14 033
1955	-5	15 113	4 179350	-20 896750	4 165548	14 640
1956	-3	16 479	4 216931	-12 650793	4 183947	15 274
1957	-1	15 579	4 192539	-4 192539	4 202346	15,935
1958	1	16 251	4 210880	4 210880	4 220744	16 024
1959	3	17 753	4 249272	12 747816	4 239143	17 344
1960	5	17 940	4 253822	21 269110	4 257541	18 094
1961	7	18 513	4 267476	29 872332	4 275940	18,877
1962	9	19 923	4 299354	38 694186	4 294338	19 694
1963	11	20 354	4 308650	47 395150	4 312737	20 547
योग	0		50 538539	+ 5 262027		

बीकड स्टैटिस्टिक एस्ट्रैट ग्राफ दि युनाइटेड स्टेट्स के विभिन्न अंशों से ।

सारणी 13 2 में दिखाए गए जोड़ों का प्रयोग करके हुए तथा परिशिष्ट ग से $\sum X^2$ प्राप्त करते हुए हमारे पास है

$$I \quad 50 538539 = 12 \text{ लघु } a$$

$$\text{लघु } a = 4 211545.$$

$$II \quad 5 262027 = 572 \text{ लघु } b$$

$$\text{लघु } b = 0 00919935$$

उपनति समीकरण लघुगणकीय रूप में है

$$\text{लघु } I_c = 4 211545 + 0 00919935 X$$

मूलबिन्दु 1957—1958 X इकाइयाँ, $\frac{1}{2}$ वर्ष ।

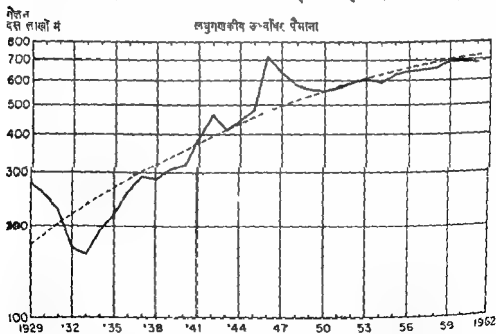
a तथा b प्राप्त करने के लिए हम लघु a तथा लघु b के प्रतिलघुगणको को देखते हैं और तब हम उपनति समीकरण को प्राकृतिक रूप में लिख सकते हैं

$$Y_t = (16,275.9)(1.0214)^X$$

मूलबिन्दु, 1957—1958, X इकाइयाँ, $\frac{1}{2}$ वर्ष।

प्रत्येक वर्ष के लिए लघु Y_t मानों तथा Y_t मानों को सारणी 13.2 के अन्तिम दो स्तम्भों में दिखाया गया है। Y_t उपनति मानों को चार्ट 13.4 और 13.5 दोनों में दिखाया गया है। उपनति का चार्ट 13.5 पर खींचने के लिए, 1952 तथा 1963 के लिये Y_t मानों को प्राप्त करना इन दोनों मानों को आरेखित करना तथा उनको एक मध्य रेखा से जोड़ना, केवल यह आवश्यक था। उपनति को चार्ट 13.4 पर खींचने में सभी, या लगभग सभी, उपनति मानों को आरेखित करने की आवश्यकता पड़ती है।

$Y_t = (16,275.9)(1.0214)^X$ के रूप में लिखित उपनति समीकरण हमें बताता है कि 1957 तथा 1958 के बीच मध्य बिन्दु का उपनति मान 16,275.9 हजार छोटे टन था, और विचाराधीन काल के मध्य एस्काल्ट उत्पादन की माप में वार्षिक वृद्धि 2.14 प्रतिशत थी। सयोगवश, 16,275.9 हजार छोटे टन Y मानों का गुणोत्तर माध्य हैं। क्योंकि गुणोत्तर माध्य मूल्य अमातर माध्य से थोड़ा छोटा होता है, और क्योंकि इस उपनति के लिए लघुगणकों के (मूल आंकड़ों की भ्रष्टा) विचलनों के वर्गों का योग न्यूनतम पर होता है अतः इसमें परिणाम निकलता है कि चार्ट 13.4 की उपनति रेखा के ऊपर विचलनों का योग उपनति रेखा से नीचे के विचलनों के योग से थोड़ा सा अधिक है। यह इस प्रकार की उपनति की एक भ्रष्टा कमी है। तथापि चार्ट 13.5 में उपनति रेखा के किसी एक ओर मापे गए विचलनों का अवश्यमेव निरसन हो जाता है। इसके अतिरिक्त, इस



चार्ट 13.6 1929—1961 में आइसलैंड का स्वदेशीय उत्पादन, तथा उपनति जैसी कि आंकड़ों के लघुगणकों से आसजित द्वितीयांश वक्र के द्वारा दिखायी गई है। सारणी 13.3 के अन्तिम।

वात में कुछ अशुद्धाई है कि लघुगणको का प्रयोग उनके निरपेक्ष विचलनों की अपेक्षा उनके सापेक्ष उतार चढ़ावों की महत्ता को बराबर करता है। यह विशेष रूप से उपयुक्त होता है जब उपनति के निम्न भाग के गिर्द लघु चक्रीय विचरण हो और उपनति के ऊपरी भाग के गिर्द दीर्घ (अर्थात्, निरपेक्ष रूप से दीर्घतर) चक्रीय विचरण हो। इस प्रकार की परिस्थिति में, केवल बड़े चक्रों की अपेक्षा सभी चक्रों में से उपनति रेखा के गुजरने की अधिक सम्भावना है। यह सूत्र लघुगणको के आसजन की तकनीकी अमूर्ति का आवश्यकता से अधिक प्रतिसतुलन कर सकता है।

लघुगणको में आसजित द्विसीयाश वक्र—कभी-कभी ऐसे आंकड़ों से पाला पड़ता है जो, जब कि उन्हें अर्ध लघुगणकीय कागज पर खींचा जाता है, ऊपर अथवा नीचे की ओर झुकते हुए वक्रों को प्रदर्शित करना जारी रखते हैं। चार्ट 13.6 तथा सारणी 13.3, 1929—1961 के लिए आइसक्रीम के स्वदेशीय उत्पादन की एक ऐसी श्रेणी प्रदर्शित करते हैं जो यह संकेत करते हुए कि वृद्धि का अनुपात गिर रहा है, नीचे की ओर झुकता है। लघु $Y_c = \text{लघु } a + X \text{ लघु } b + X^2 \text{ लघु } c$ का प्रयोग करते हुए हम द्विसीयाश वक्र को Y मानों के लघुगणको के साथ आसजित कर सकते हैं। X मूलबिन्दु को बाल के मध्य में लेते हुए, तीन प्रामाण्य समीकरण हैं

$$I. \quad \Sigma \text{ लघु } Y = N \text{ लघु } a + \text{लघु } c \Sigma X^2$$

$$II \quad \Sigma X \text{ लघु } Y = \text{लघु } b \Sigma X^2$$

$$III \quad \Sigma X^2 \text{ लघु } Y = \text{लघु } a \Sigma X + \text{लघु } c \Sigma X^3$$

परिशिष्ट स से हम जान लेते हैं कि $\Sigma X^2 = 2(1,496) = 2,992$ तथा $\Sigma X^3 = 2(234,848) = 487,696$ है। दूसरे सभी मानों को सारणी 13.3 से प्राप्त किया जा सकता है और हम प्रसामान्य समीकरणों को निम्न प्रकार में हल करते हैं :

$$II \quad \Sigma X \text{ लघु } Y = \text{लघु } b \Sigma X^2$$

$$57\,402\,463 = 2,992 \text{ लघु } b$$

$$\text{लघु } b = 0.0191854$$

$$I \quad \Sigma \text{ लघु } Y = N \text{ लघु } a + \text{लघु } c \Sigma X^2$$

$$III. \quad \Sigma X^2 \text{ लघु } Y = \text{लघु } a \Sigma X + \text{लघु } c \Sigma X^3$$

$$I \quad 86\,539\,428 = 33 \text{ लघु } a + 2,992 \text{ लघु } c$$

$$III \quad 7,751\,942\,035 = 2,992 \text{ लघु } a + 487,696 \text{ लघु } c$$

$$(1 \times 90\,666\,667) \quad 7,846\,241\,501 = 2\,992 \text{ लघु } a + 271,274\,67 \text{ लघु } c.$$

$$III. \quad 7,751\,942\,035 = 2\,992 \text{ लघु } a + 487,696 \text{ लघु } c$$

$$94\,299\,466 = \quad -216,421\,33 \text{ लघु } c$$

$$\text{लघु } c = -0.000435722$$

$$I \quad 86\,539\,428 = 33 \text{ लघु } a + (2,992)(-0.000435722).$$

$$33 \text{ लघु } a = 87\,843\,108.$$

$$\text{लघु } a = 2.661912.$$

साधारणी 133

1929--1961 में संयुक्त राज्य में आइसकीम उत्पादन के द्वितीयान्न वक्र के लघुगणको से प्राप्त जित मानो का परिकल्पन (वर्ग लाख मीनरो से)

वर्ष	मराल	संख्या	Y	X	X ²	X ³	Y ²	XY	X+Y	X-Y	X ² Y	XY ²	X ³ Y	Y ³	X ⁴	Y ⁴	X ⁵	Y ⁵
1929	277	2	2442793	-16	256	-3908086	625	352008	23569456	-0	111544832	2243401	1751	1888	0	0	0	0
1930	255	4	2402721	-15	225	-36108315	541	624725	23741310	-0	098037450	2276094	1888	2032	0	0	0	0
1931	226	4	2354876	-14	196	-32968264	461	555686	23933164	-0	085401512	2307915	2182	2339	0	0	0	0
1932	168	0	2225307	-13	169	-28929017	376	077221	24125018	-0	073637018	2338865	2339	2501	0	0	0	0
1933	161	8	2208979	-12	144	-26507748	318	002976	24316872	-0	062743968	2368943	2501	2670	0	0	0	0
1934	191	6	2282396	-11	121	-25106356	276	199916	24508726	-0	052722362	2398150	2670	2844	0	0	0	0
1935	219	1	2340642	-10	100	-234408420	234	963200	24700580	-0	043512200	2426486	2844	3024	0	0	0	0
1936	258	6	2412529	-9	81	-21713661	195	42949	24892434	-0	035295482	2453950	3024	3208	0	0	0	0
1937	291	1	2456042	-8	64	-19712336	157	694688	25084288	-0	027886208	2480543	3208	3397	0	0	0	0
1938	286	4	2456973	-7	49	-17198811	129	391677	25276142	-0	021350378	2506264	3397	3590	0	0	0	0
1939	305	8	2485437	-6	35	-14912622	89	475712	25467996	-0	016893051	2531114	3590	3786	0	0	0	0
1940	318	1	2502564	-5	25	-12515820	62	543100	25651704	-0	006971552	2558199	3786	3985	0	0	0	0
1941	390	3	2591399	-4	19	-10365596	24	000345	26043558	-0	003921498	2600434	3985	4186	0	0	0	0
1942	464	2	2665705	-3	9	-8000115	10	457900	26235412	-0	001742888	2621798	4186	4388	0	0	0	0
1943	411	6	2614475	-2	4	-5228950	2	653262	26427266	-0	000435722	2642291	4388	4591	0	0	0	0
1944	444	9	2642262	-1	1	-2648262	0	0	26619120	-0	000435722	2660662	4591	4794	0	0	0	0
1945	477	2	2678700	0	0	0	2853577	2853577	26810974	-0	000435722	2680662	4794	4995	0	0	0	0
1946	713	8	2853577	1	1	5600058	11	200816	27002828	-0	001742888	2698540	4995	5195	0	0	0	0
1947	631	0	2800029	2	4	8282397	24	847191	27194682	-0	003921498	2715547	5195	5391	0	0	0	0
1948	576	5	2760790	3	9	1096818	43	947392	27386536	-0	006971552	2731682	5391	5584	0	0	0	0
1949	558	1	2746112	4	16	1371815	68	595575	27578390	-0	010893050	2746949	5584	5772	0	0	0	0
1950	554	4	2743823	5	25	1371815	99	178560	27770244	-0	015685992	2761338	5772	5955	0	0	0	0
1951	568	8	2744660	6	36	1659760	135	868915	27962098	-0	028350378	2774859	5955	6131	0	0	0	0
1952	592	7	2772835	7	49	19409845	178	306828	28153952	-0	027886208	2787509	6131	6299	0	0	0	0
1953	605	1	2781827	8	64	2254616	224	842149	28345805	-0	035293482	2799287	6299	6459	0	0	0	0
1954	596	8	2758309	9	81	24982461	279	830500	28537660	-0	043572200	2810194	6459	6610	0	0	0	0
1955	628	5	2798305	10	100	27983050	339	654381	28729514	-0	052722362	2820229	6610	6751	0	0	0	0
1956	641	3	2807061	11	121	30877671	405	049968	28921368	-0	062743968	2829393	6751	6881	0	0	0	0
1957	649	9	2812847	12	144	33754164	476	280194	29113222	-0	073637018	2837685	6881	7000	0	0	0	0
1958	658	0	2818225	13	169	36636938	557	383428	29305076	-0	085401512	2845106	7000	7107	0	0	0	0
1959	597	9	2848793	14	196	39817102	639	811350	29496930	-0	098037450	2851656	7107	7200	0	0	0	0
1960	697	6	2843666	15	225	47650490	727	500032	29688784	-0	011544832	2857334	7200		0	0	0	0
1961	694	7	2841797	16	256	45468752				-0	011544832	2857334			0	0	0	0
योग			86539428	0	2987	57404361												

हॉस्टेलिकन स्टाडिअम, कोलोनियाल टाईम्स टु १९५७ २९२ एमीकलरल स्टुडिअम्स १९६१, पृष्ठ ४००
 युनाइटेड स्टेट्स, १९६३, पृष्ठ ३९७ से

$$\text{III को प्रयोग करते हुए जानें } 7,751\ 942035 = (2,992)(2\ 661912) \\ + (487,696)(-0\ 000435722). \\ = 7,751\ 940827$$

$$\text{उपनति समीकरण लघु } Y_c = 2\ 661912 + 0\ 0191854X - 0\ 000435722X^2 \\ \text{मूलबिन्दु, 1945, } X \text{ इकाइयाँ, 1 वर्ष।}$$

उपनति मानो के पत्रिकलन की विधि का सारणी 13.3 में सकेत किया गया है। उपनति को लेखाचित्रीय विधि से चार्ट 13.6 में दिखाया गया है। एक गाम्पर्स वक्र भी फ्राँकडो से प्राप्त किया गया है (चार्ट 13.10 तथा 13.11 देखिये)।

अनन्तस्पर्शी वृद्धि वक्र

ऋजु रेखा $Y_c = a + bX$, जिसका वर्णन पिछले अध्याय में किया गया था, वृद्धि अथवा कमी की अचर मात्रा की व्याख्या करती है। घातीय वक्र, $Y_c = ab^X$ के अन्तर्गत, परिवर्तन का अचर अनुपात है और इसलिए परिवर्तन की मात्रा में परिवर्तन का अचर अनुपात आता है। यदि b , एक से बड़ी घनात्मक संख्या है तो उपनति ऊर्ध्वगामी होगी और परिवर्तन की मात्रा में अचर प्रतिशतता वृद्धि होती रहती है। यदि, b एक से छोटी घनात्मक संख्या हो तो उपनति निम्नगामी होती है और उपनति की मात्रा कमी की अचर प्रतिशतता को प्रदर्शित करती है।

समय की मम्बी अवधियों में कालक्रम श्रेणियों के लिए परिवर्तन की अचर मात्रा अथवा परिवर्तन के अचर अनुपात को प्रदर्शित करने की संभावना नहीं होती। इसकी बहुत अधिक सम्भावना है कि एक बढ़ती हुई श्रेणी⁴ परिवर्तन की बढ़ती हुई मात्रा किन्तु परिवर्तन का घटता हुआ अनुपात प्रदर्शित करे। यह चार्ट 13.10 और 13.11 के फ्राँकडो के लिए सत्य है, जो आइस कीम के स्वदेशीय उत्पादन को प्रदर्शित करते हैं।

यह भी सम्भव है कि बढ़ती हुई श्रेणी वृद्धि की मात्रा में कमी को प्रदर्शित करे। घटते हुए निरपेक्ष विकास का प्रायः प्रतिरोध नहीं किया जाना है, परन्तु हम इस प्रकार के एक मशोधित चरघाताकी वक्र का वर्णन करेंगे, क्योंकि यह अधिक महत्वपूर्ण गाम्पर्स तथा वृद्धिवात वक्र के अत्युत्तम परिचय का काम करता है। मशोधित चरघाताकी वक्र का विचार प्रारम्भ करने से पूर्व उन अन्य तीन वक्र प्रकारों की सरसरी व्याख्या की जा सकती है जो विकास की घटती हुई मात्रा का वर्णन कर सकें। वे हैं—

(1) मंशोधित बहुपद, जैसे $Y_c = ab + X^2$, $Y_c = a + bX^2 + cX$, तथा अन्य। जब तीन या अधिक स्थिरांक विद्यमान हों एक (या अधिक) स्थिरांक ऋणात्मक हो सकते हैं, तो ऐसी अवस्था में वक्र अन्ततोगत्वा उलट जाता है।

(2) लघु X तक ऋजु रेखा। व्यक्त है $Y_c = a + b$ लघु X । इस वक्र प्रकार का तब तक उपयोग नहीं किया जाना चाहिए जब तक कि समय के लघुगणको पर विचार करने के लिये तर्कसंगत औचित्य न हो।

4 गिरने वाली श्रेणियाँ परिवर्तन की घटती हुई मात्रा को प्रदर्शित कर सकती हैं। परिवर्तन की घटती हुई मात्रा परिवर्तन के घटते हुए या अचर (परन्तु प्रायः गिरते हुए) अनुपात का प्रतिनिधित्व कर सकती है। सम्भाव्य अतीति को दूर करने के लिए अनन्तस्पर्शी विशाल मात्रा में सम्बन्धित विपरीत वर्णन वाली हुई श्रेणी की व्याख्या करेगा।

(3) लघु Y के एक परवलयिक वक्र को, जिसे लघु $Y_c = aX^b$ लिखा जाता है, न्यूनतम वर्गों द्वारा लघु $Y_c =$ लघु $a + b$ लघु X लिख कर आसजित किया जा सकता है।

ध्यान दीजिए कि X के नपुंसक का प्रयोग करने हुए X मूलबिन्दु को समय के मध्य में नहीं लिया जा सकता।

रूपांतरित चरघाताकी वक्र—यह वक्र न केवल उपनति का वर्णन करता है जिसमें विकास की मात्रा अचर प्रतिशतता में गिरती है, अपितु वक्र ऊपरी सीमा तक पहुँचता है जिसे अन्नन्तस्पर्शी कहते हैं। विकास वक्रों की यह एक महत्वपूर्ण विशेषता है, क्योंकि बहुत सी काल-श्रेणीयों ऊपरी सीमा तक पहुँचती दिखाई देती हैं। रूपांतरित चरघाताकी का समीकरण है $Y_c = k + ab^x$, जहाँ k अन्नन्तस्पर्शी है।

सारणी 13 4

सशोधित चरघाताकी वक्र के काल्पनिक आँकड़े

(अन्नन्तस्पर्शी $k = 114$)

X (1)	Y (2)	आंशिक योग (3)	Y वृद्धि (4)	पूर्व वृद्धि का प्रतिशत (5)
0	50	
1	66	116 0000	16	...
2	78		12	75
3	87	165 0000	9	75
4	93 75		6 75	75
5	98 8125	192 5625	5 0625	75

जैसा कि पाठ-नोटपृष्ठी 4 में देखा गया था, हम अपना ध्यान मुख्य रूप II बढ़ती हुई श्रेणी की ओर देंगे, परन्तु चार्ट 13 7 चार भाकार दिखाता है जिनकी इस समीकरण में कल्पना की जा सकती है। यह अवश्यमेव स्पष्ट होना चाहिये कि हमारी रीच चार्ट 13 7 के भाग 1 पर केन्द्रित होती है, क्योंकि वह उन चारों में से केवल एक है जो ऊपरी अन्नन्त-स्पर्शी के साथ एक बढ़ती हुई श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है। ऐसे भी अवसर हैं जब उपनति को इस प्रकार प्रयोग में लाने की इच्छा हो सकती है जैसे चार्ट 13 7 के भाग 3 में। यह घटती हुई श्रेणी के लिये नहीं हो सकता है जो कभी की मात्रा में कमी की अचर प्रतिशतता की ओर उन्मुख हो। एक निर्विष्ट रोग से मृत्यु दर में इस प्रकार का व्यवहार हो सकता है।

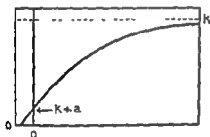
k , a , तथा b के लिए विभिन्न मानों को रूपांतरित चरघाताकी के समीकरणों में प्रतिस्थापित करना तथा स्वयमेव वक्रों की खोजना, जैसा कि चार्ट 13 7 में दिखाया गया है, हो सकता है पाठक को स्पष्ट भवे। यह उसे सामान्यतया उम चार्ट में वर्णित परिस्थितियों

के विशेष उदाहरण प्रदान करेगा। ध्यान दीजिये कि b के ऋणात्मक मान में हमारी कोई खि नहीं है।

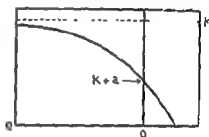
सारणी 13.4 के प्रथम दा स्तम्भ उस श्रेणी को प्रदर्शित करते हैं जिसके विकास की मात्रा में अचर प्रतिशत कमी रहती है। जैसा कि स्तम्भ 4 और 5 से देखा जा सकता है, प्रत्येक प्रथम अन्तर पूर्व के प्रथम अन्तर का 75 प्रतिशत है। वृद्धि के अभिवर्धन हैं Δ_1 ,

$$\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \text{ तथा } \Delta_5, \text{ और } \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{\Delta_4}{\Delta_3} = \frac{\Delta_5}{\Delta_4} = 0.75$$

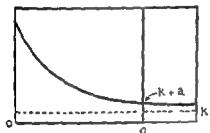
चार्ट 13.8 का संकेत करने हुए, चार्ट की चोटी के निकट खण्डित रेखा k का मान है जिस तक इस श्रेणी का वक्र पहुँचना है, इस अवस्था में यह k 114 है। इसका अर्थ है यदि हम उपनति रेखा को अनिश्चित रूप से बढ़ाएँ तो यह इस मान के निकट से



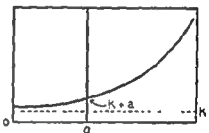
(1) जब a ऋणात्मक है और b एक में कम है।



(2) जब a ऋणात्मक है और b एक में बड़ा है।



(3) जब a धनात्मक है और b एक में कम है।

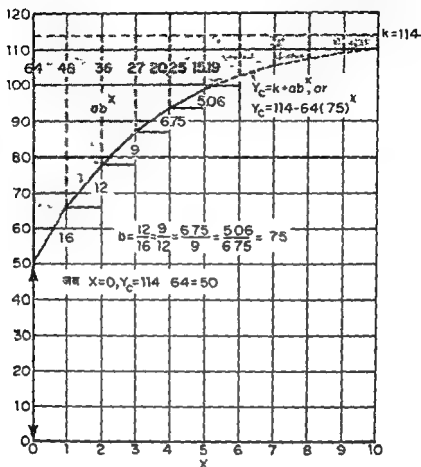


(4) जब a धनात्मक है और b एक में बड़ा है।

चार्ट 13.7 स्थापित घटघाताकी वक्र, $Y_t = k + ab^X$, का चार रूप।

निकटतर आती जाएगी, परन्तु इसके बराबर कभी नहीं होगी। दूसरा स्थिरांक, a , इस उदाहरण में उपनति मान में से अनन्तस्पर्शी k को घटाने में प्राप्त किया गया मान, जब कि X शून्य हो, -64 है। हाँ दोसरा स्थिरांक, b , वास्तव में विकास के क्रमिक अभिवर्धनों के बीच अनुपात है या उस श्रेणी के निये 0.75 है। जब $X=1$ हो, तो चार्ट 13.8 में ऊर्ध्वाधर खण्डित रेखा $-64(0.75) = -48$, जब $X=2$, है तो यह $-64(0.75)^2 = -36$; और X के अन्य मानों के निये भी इसी प्रकार होगी। इस प्रकार इन खण्डित ऊर्ध्वाधर रेखाओं का वर्णन ab^X के व्यञ्जन से किया जाना है। यह तब भी मल्य है जब $X=0$, क्योंकि $-64(0.75)^0 = -64$ । बिना में, ab^X का प्रतिनिधित्व द्वाया-

युक्त क्षेत्र की ऊँचाई द्वारा किया जाता है। अब यदि हम क्रमशः k में से प्रत्येक ऊर्ध्वाधर खण्डित रेखा के मान को घटा दें तो हमें उपर्युक्त मान प्राप्त होते हैं। ऊर्ध्वाधर खण्डित



चार्ट 13.8 सारणी 13.4 के आंकड़ों के साथ प्राप्त एक क्षयशील वक्रों की समीकरण।

रेखाओं को k में से घटा दिया है क्योंकि a का चिह्न ऋणात्मक है। इस प्रकार

X	$k + ab^x$	$= Y_c$
0	$114 - 64$	$= 50$
1	$114 - 48$	$= 66$
2	$114 - 36$	$= 78$
3	$114 - 27$	$= 87$
4	$114 - 20.25$	$= 93.75$
5	$114 - 15.1875$	$= 98.8125$

क्योंकि a का चिह्न ऋणात्मक है, अतः विनाश के अभिवर्धन गिर रहे हैं। जैसा कि पहले ही स्पष्ट है, आंकड़ों की इस श्रेणी के लिये समीकरण है $Y_c = 114 - 64(0.75)^X$ ।

इस वक्र के तीन स्थिरांक हैं k अनन्तस्पर्शों a , Y और अनन्तस्पर्शों मानों के बीच प्रन्तर जब $X=0$, तथा b क्रमिक प्रथम अन्तर्गो के बीच अनुपात। अतः इसके आसन्न के लिये तीन समीकरण आवश्यक हैं। सारणी 13.4 के अनुसार, उन्हें, प्रथम आंकड़ों को तीन समान परिच्छेदों में विभक्त करके प्राप्त किया जाता है। फिर, स्तम्भ 3 के अनुसार प्रत्येक अनुभाग के लिये Y मानों का योग किया जाता है। परिणाम हैं

$$\text{पहले तृतीय के लिये } \Sigma_1 Y = 116$$

$$\text{दूसरे तृतीय के लिये } \Sigma_2 Y = 165$$

$$\text{तीसरे तृतीय के लिये } \Sigma_3 Y = 192.5625$$

आइये, हम ध्यान दें कि हमारे समीकरणों के रूप में 116 किम बात का प्रतिनिधित्व करता है। यह $50 + 66$ का जोड़ है। परन्तु 50 $k + ab^0$ तथा 66 , $k + ab^1$ है, अतः

$$116 = 2k + a + ab$$

यह समीकरण I है। इसी प्रकार स अग्र दो को प्राप्त किया जाता है। तीन समीकरण हैं

$$\text{I} \quad 116 = 2k + a + ab$$

$$\text{II} \quad 165 = 2k + ab + ab^2$$

$$\text{III} \quad 192.5625 = 2k + ab^2 + ab^3$$

b के लिये हल प्राप्त करने के लिये समीकरण A को प्राप्त करने के लिए, हम समीकरण I को समीकरण II में से घटाते हैं, और फिर समीकरण B को प्राप्त करने के लिए समीकरण III में से समीकरण II को घटाते हैं। इस प्रकार

$$\begin{aligned} \text{A} \quad 49 &= ab^2 + ab - ab - a \\ &= a(b^2 + b^2 - b - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B} \quad 27.5625 &= ab^3 + ab^2 - ab^2 - ab^2 \\ &= ab^2(b^2 + b^2 - b - 1) \end{aligned}$$

अब स्थिरांक b को, समीकरण II को समीकरण A में भाग करके, प्राप्त किया जाता है। हम परिणामी समीकरण को C कहेंगे।

$$\text{C} \quad \frac{27.5625}{49} = \frac{ab^2(b^2 + b^2 - b - 1)}{a(b^2 + b^2 - b - 1)}$$

$$b^2 = 0.5625$$

$$b = 0.75$$

अब a के मान को समीकरण A अथवा B में प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया जा सकता है।

$$\text{A} \quad 49 = a(0.75^2 + 0.75^2 - 0.75 - 1)$$

$$a = \frac{49}{-0.765625} = -64$$

मूल समीकरणों में से किसी एक में a तथा b के मानों के प्रतिस्थापन द्वारा शेष स्थिरांक k का परिकलन किया जा सकता है।

$$I \quad 116 = 2k - 64 - 64(0.75)$$

$$2k = 228$$

$$k = 114$$

इस प्रकार स्थिरांक के प्राप्त मान ये होते हैं जिन्हें हम जानते हैं कि वे सही हैं। समीकरण को न्यूनतम वर्गों की विधि द्वारा नहीं प्राप्त किया गया था अपितु इस प्रकार जोड़ा गया था कि उपरति मानों के तीन प्राथमिक योग वही थे जो मूल प्रांकडों के थे। इस उदाहरण में क्योंकि मूल प्रांकडे समीकरण प्रकार की पूर्ण प्रनुरूपता करते हैं, अतः प्राप्त वक्र सभी मूल प्रांकडा में से होकर गुजरता है।

नर्कसगत प्रविधि को, जिसका वर्णन हो चुका है, और प्राथमिक सुविधाजनक सूत्रों में विकसित किया जा सकता है, जो निम्नलिखित हैं⁵

$$b^n = \frac{\sum_2 Y - \sum_1 Y}{\sum_2 Y - \sum_1 Y}$$

$$= (\sum_2 Y - \sum_1 Y) \frac{b-1}{(b^n-1)^2}$$

$$k = \frac{1}{n} \left[\sum_2 Y - \left(\frac{b^n-1}{b-1} \right) a \right]$$

जहाँ n प्रांकडों के प्रत्येक तृतीय में वर्गों की संख्या है। इन सूत्रों द्वारा हल करने में, वास्तव में, आवश्यकता पड़ती है कि पहले b को प्राप्त किया जाए, फिर a को तथा अन्त में k को।

यदि a तथा b के लिये व्यञ्जकों को भी दिये गए k के व्यञ्जक में प्रतिस्थापित कर दिया जाए, तो हमें

$$k = \frac{1}{n} \left[\frac{(\sum_1 Y)(\sum_2 Y) - (\sum_2 Y)^2}{\sum_1 Y + \sum_2 Y - 2\sum_2 Y} \right]$$

प्राप्त होता है, जो हमें पहले a तथा b के परिकलन के बिना अन्तस्पर्शी प्राप्त करने के योग्य बनाता है।

क्योंकि काल-श्रेणियाँ सदैव इस ढंग से व्यवहार नहीं करती कि रूपांतरित-चर-घातकी एक तर्कसगत आसजन हो या काल-श्रेणी की एक उत्तम व्याख्या हो, वास्तविक प्रांकडों के समुच्चय के साथ $Y_t = k + ab^X$ के आसजन का कोई उदाहरण नहीं दिया गया है। जैसाकि बहुत पहले देखा गया था, रूपांतरित चरघातकी वक्र को सामाजी पृष्ठों में वर्णित दो अन्य विकास वक्रों के परिवर्ण के रूप में निदिष्ट किया गया है।

गाम्पत वक्र—उस रूप में जो हमारे लिए प्राथमिक रुचि का है, गाम्पत वक्र उपरति का वर्णन करता है जिसमें लघुगणकों के विकास परिवर्तन अचर प्रतिघातता से गिर रहे हैं।

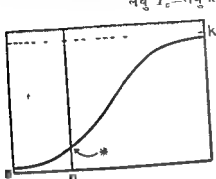
5 इन सूत्रों की उपरति परिशिष्ट छ, परिच्छेद 13.1 में दी गई है।

इस प्रकार उपनति के प्राकृतिक मान वृद्धि के गिरते हुए अनुपात को प्रदर्शित करेंगे, परन्तु अनुपात न तो अचर मात्रा द्वारा कम होता है और न अचर प्रतिशतता द्वारा। गाम्पत वक्र के लिये समीकरण है

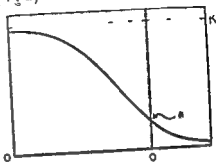
$$Y_c = ka^b X$$

जिसे लघुगणकीय रूप में इस प्रकार रखा जा सकता है

$$\text{लघु } Y_c - \text{लघु } k + (\text{लघु } a) b X$$



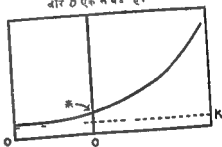
(1) जब लघु a ऋणात्मक है और b एक से कम है।



(2) जब लघु a ऋणात्मक है और b एक से बड़ा है।



(3) जब लघु a धनात्मक है और b एक से कम है।



(4) जब लघु a धनात्मक है और b एक से बड़ा है।

चार्ट 13.9 गाम्पत वक्र के चार रूप, $Y_c = ka^b X$ । चिह्नित बिन्दुओं (*) पर ऊर्ध्वाधर मान प्रति लघु (लघु $k +$ लघु a) होते हैं।

चार्ट 13.9 के चार भाग उन चार आकारों को दिखाते हैं जिनकी कल्पना गाम्पत वक्र के अन्तर्गत की जा सकती है। कदाचित् सांख्यिकीविद् को चार्ट 13.9 के भाग 2 और 3 में दिखाए गए प्रकारों की उपनतियों का वर्णन करने के लिये गाम्पत वक्र के प्रयोग की कभी आवश्यकता पड़ सकती है, परन्तु हमारा मुख्य ध्यान उस पर केन्द्रित होता है जिसे चार्ट के भाग 1 में दिखाया गया है। इस वक्र का (तथा भाग 2 में दिखाए हुए वक्र का भी) एक उच्च तथा एक निम्न अन्तस्पर्शी है, जिसमें निम्न अन्तस्पर्शी शून्य है। चार्ट 13.9 में b के धनात्मक मूल्यों पर विचार किया जाता है, क्योंकि b के ऋणात्मक मान उपयोगी वक्र प्रदान नहीं करते।

6. रेलवे वमचारियों की मृत्यु, कारखानों में दुर्घटनाएँ, विशिष्ट मृत्यु दरों तथा अन्य गिरती हुई भविष्य का वर्णन गाम्पत वक्र के द्वारा किया जा सकता है जिसमें दाहिने निम्न अन्तस्पर्शी है। उच्च अन्तस्पर्शी है या नहीं यह उन आंकड़ों के व्यवहार पर निर्भर करेगा जिनमें वक्र आसन्न है।

संशोधित चरघाताकी वक्र के व्यवहार के विषय में जो कुछ कहा गया है वह गाम्पर्ट वक्र के लघुगुणकीय रूप पर भी लागू होता है। चार्ट 13.9 में दिखाए गये गाम्पर्ट वक्रों को यदि लघुगुणकीय रूप में (अथवा अर्ध लघुगुणकीय कागज पर आरोपित करके) रखते हैं तो वे चार्ट 13.7 के अनुरूप भागों की तरह दिखाई देंगे। गाम्पर्ट वक्र का जोड़ प्रेक्षित आकड़ों के लघुगुणका से है और उसे संशोधित चरघाताकी जोड़ के पूर्णतया समानान्तर ढग से पूर्ण किया जा सकता है। व्यंजक हैं

$$b^n = \frac{\sum_2 \text{लघु } Y - \sum_2 \text{लघु } X}{\sum_2 \text{लघु } 1 - \sum_1 \text{लघु } 1}$$

$$\text{लघु } a = (\sum_2 \text{लघु } 1 \sum_1 \text{लघु } Y) \frac{b-1}{(b^n-1)^2}$$

$$\text{लघु } k = \frac{1}{n} \left[\sum_1 \text{लघु } 1 - \left(\frac{b^n-1}{b-1} \right) \text{लघु } a \right]$$

यदि पहले लघु a तथा b का परिकलन किये बिना k का मान प्राप्त करने की इच्छा हो तो

$$\text{लघु } k = \frac{1}{n} \left[\frac{(\sum_1 \text{लघु } Y)(\sum_2 \text{लघु } Y) - (\sum_1 \text{लघु } Y)^2}{\sum_2 \text{लघु } Y + \sum_2 \text{लघु } Y - 2\sum_2 \text{लघु } Y} \right]$$

का प्रयोग करा। इस व्यंजक का प्रयोग सर्वप्रथम शीघ्र ही यह निश्चित करने के योग्य बना देता है कि क्या उर्वंगामी उपनति में उच्च अनन्तस्पर्शी है, इस ढग से किए गए k के परिकलन से पहले दिए गए सूत्र के द्वारा प्राप्त किये गए k के मान की पड़ताल भी हो जाती है। बटती हुई श्रेणी के लिये उच्च अनन्तस्पर्शी है या नहीं इसे भी इस बात से निश्चित कर सकते हैं कि क्या $(\sum_2 \text{लघु } 1 - \sum_1 \text{लघु } 1)$, $(\sum_2 \text{लघु } Y - \sum_1 \text{लघु } Y)$ से छोटा है या बड़ा। यदि पहला अंतर दूसरे अन्तर से अधिक हो जाना है तो b^n (तथा, इसलिये b) एक से बड़ा है और बटती हुई श्रेणी के लिये कोई उच्च अनन्तस्पर्शी नहीं है; इस प्रकार बटती हुई श्रेणी का वक्र चार्ट 13.9 के भाग 4 में दिखाए गए वक्र से मिलता-जुलता होगा। यदि पहला अन्तर दूसरे अन्तर से कम है तो b एक से कम है, और बटती हुई श्रेणी का वक्र चार्ट 13.9 के भाग 1 जैसा दिखाई देगा।

सारणी 13.5 के आकड़े जिन्हें चार्ट 13.10 और 13.11 में भी दिखाया गया है, गाम्पर्ट वक्र के आसजन के उदाहरण के आधार के रूप में काम देंगे। लघुगुणको के वाच्छित्त योगों के परिकलन को सारणी 13.5 के चौथे स्तम्भ में कार्यान्वित किया गया है। पहले दिये गए व्यंजक का प्रयोग करते हुए हम प्राप्त करते हैं

$$b^n = \frac{\sum_2 \text{लघु } Y - \sum_2 \text{लघु } Y}{\sum_2 \text{लघु } Y - \sum_1 \text{लघु } Y}$$

$$b^n = \frac{30\,851\,086 - 29\,607\,045}{29\,607\,045 - 23\,595\,860} = \frac{1\,244\,041}{6\,011\,185} = 0.20695437.$$

$$\text{लघु } b^{11} = 9.31587418 - 10 = 109\,31587418 - 110$$

$$\text{लघु } b = 9\,937806744 - 10.$$

$$b = 0.86657549.$$

सारणी 135

1929—1961 मे सयुक्त राज्य मे आइसक्रीम उत्पादन के साथ जुडे गाम्पर्ट वक्र के मानो का परिकलन
(प्रति दस लाख गैलन)

वर्ष	X	उत्पादन	लघु Y	उपनति मानो का परिकलन			Y _c
				hX	(लघु a) bX	लघु Y _c = लघु k + (लघु a) bX	
1929	0	277 2	2 442793	1 0000000	-1 275262	1 558896	36 2
1930	1	255 4	2 407221	0 8665155	-1 105111	1 729047	53 6
1931	2	226 4	2 354876	0 7509543	-0 957663	1 876495	75 2
1932	3	168 0	2 225309	0 6207 85	-0 829888	2 004270	101 0
1933	4	161 8	2 208979	0 5639324	-0 719162	2 114996	130 3
1934	5	191 6	2 282396	0 4886907	-0 623209	2 210941	162 5
1935	6	219 1	2 340642	0 4234877	-0 540058	2 294100	196 8
1936	7	258 6	2 412629	0 3669841	-0 468001	2 366157	232 4
1937	8	291 1	2 464042	0 3180196	-0 405558	2 428600	268 3
1938	9	286 4	2 456673	0 2755883	-0 351447	2 482711	303 9
1939	10	305 8	2 485437	0 2388184	-0 304556	2 529602	338 5
Σ लघु X			23 595860			23 595823✓	
1940	11	318 1	2 502564	0 2069544	-0 263921	2 570237	371 7
1941	12	390 3	2 591399	0 1793417	-0 228708	2 605450	403 1
1942	13	464 2	2 666705	0 1554131	-0 198192	2 635965	432 5
1943	14	411 6	2 614475	0 1346772	-0 171749	2 662409	459 6
1944	15	444 9	2 648262	0 1167081	-0 148833	2 685325	484 5
1945	16	477 2	2 678700	0 1011365	-0 128976	2 705182	507 2
1946	17	713 8	2 853577	0 0876425	-0 111767	2 722391	527 7
1947	18	631 0	2 800029	0 0759488	-0 096355	2 737303	546 1
1948	19	576 5	2 760799	0 0658155	-0 083932	2 750226	562 6
1949	20	558 1	2 746712	0 0570341	-0 072733	2 761425	577 3
1950	21	554 4	2 743823	0 0494244	-0 063029	2 771129	590 4
Σ लघु Y			29 607045			29 607043✓	
1951	22	568 8	2 754960	0 0428300	-0 054619	2 779539	601 9
1952	23	592 7	2 772835	0 0371155	-0 047332	2 786826	612 1
1953	24	605 1	2 781827	0 0321634	-0 041017	2 793141	621 1
1954	25	596 8	2 775829	0 0278720	-0 035544	2 798614	628 9
1955	26	628 5	2 798305	0 0241532	-0 030802	2 803356	635 9
1956	27	641 3	2 807061	0 0209306	-0 026692	2 807466	641 9
1957	28	649 9	2 812847	0 0181380	-0 023131	2 811027	647 2
1958	29	658 0	2 818226	0 0157179	-0 020044	2 814114	651 8
1959	30	697 9	2 843793	0 0136208	-0 017370	2 816788	655 8
1960	31	697 6	2 843606	0 0118034	-0 015052	2 819106	659 3
1961	32	694 7	2 841797	0 0112286	-0 013044	2 821114	662 4
Σ लघु Y			30 851036			30 851091✓	

बोर्डे हिस्टाग्रिकल स्टैटिस्टिक्स ऑफ यूनाइटेड स्टेट्स कोलोनियल टाइम्स 1957, पृष्ठ 292, एंग्रेजिलबल स्टैटिस्टिक्स, 1961, पृष्ठ 400 तथा 1963, पृष्ठ 397 व।

$$\begin{aligned}
 \text{तब } a &= (\Sigma_2 \text{ तब } Y - \Sigma_1 \text{ तब } Y) \frac{b-1}{(b^n-1)^2}, \\
 &= 6\,011\,185 \frac{-0\,133\,424\,51}{(-0\,793\,045\,63)^2} = 6\,011\,185 \frac{-0\,133\,424\,51}{0\,628\,921\,37}, \\
 &= (6\,011\,185)(-0\,212\,148\,16) = -1\,275\,261\,8 \\
 \text{तब } k &= \frac{1}{n} \left[\Sigma_1 \text{ तब } Y - \left(\frac{b^n-1}{b-1} \right) \text{ तब } a \right], \\
 &= \frac{1}{11} \left[23\,595\,860 - \left(\frac{-0\,793\,045\,63}{-0\,133\,424\,51} \right) (-1\,275\,261\,8) \right], \\
 &= 2\,834\,158
 \end{aligned}$$

पड़ताल करें, प्रयोग करते हुए

$$\begin{aligned}
 \text{तब } k &= \frac{1}{n} \left[\frac{(\Sigma_1 \text{ तब } Y)(\Sigma_2 \text{ तब } Y) - (\Sigma_3 \text{ तब } Y)^2}{\Sigma_1 \text{ तब } Y + \Sigma_2 \text{ तब } Y - 2\Sigma_3 \text{ तब } Y} \right] \\
 &= \frac{1}{11} \left[\frac{(23\,595\,860)(30\,851\,086) - (29\,607\,045)^2}{23\,595\,860 + 30\,851\,086 - 2(29\,607\,045)} \right] = 2\,834\,158
 \end{aligned}$$

उपनिर्दिष्ट समीकरण

$$\text{तब } Y_c = 2\,834\,158 - 1\,275\,261\,8(0\,8665755)^X$$

$$Y_c = 682\,59(0\,0530565)^{(0\,8665755)X}$$

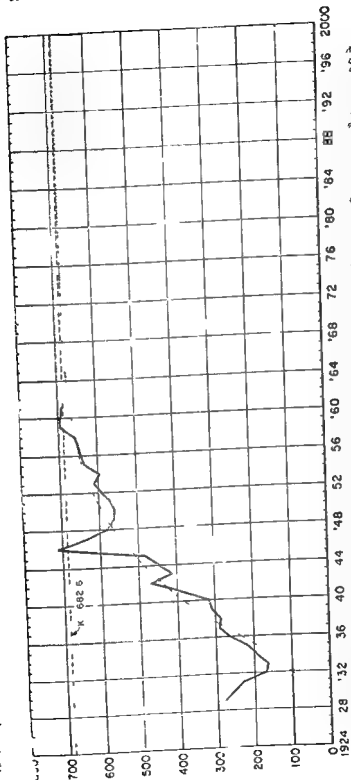
मूलबिन्दु, 1929, X इकाइया, 1 वर्ष।

उपनिर्दिष्ट समीकरण का प्राकृतिक रूप तब k तथा तब a के प्रति लघुगणको की खोज करने पर प्राप्त होता है। क्योंकि तब $a = -1\,275\,261\,8$ अणुात्मक लघुगणक है, अतः इसे परिशिष्ट द से $a = 0\,0530569$ का मान प्राप्त किये जा सकने से पूर्व पुनः तब $a = 8\,724\,7382 - 10$ लिखा जाना चाहिये। ध्यान दीजिये कि $b = 0\,8665755$ है, जो यह संकेत करता है कि वृद्धि का अनुपात प्रतिवर्ष गिर रहा है अधिक विशेष रूप से यह संकेत करता है कि अमिक लघुगणक उपरति मात्रों में प्रत्येक अन्तर पूर्ववर्ती अन्तर से लगभग 0.87 गुणा (या पूर्ववर्ती अन्तर का 87 प्रतिशत) है। जब भी $b < 1$, तो $b-1$ का मान ऋणात्मक है यदि Σ_2 तब Y , Σ_1 तब Y से अधिक है तो परिणाम स्वरूप तब a का मान ऋणात्मक होगा (दखिये तब a का समीकरण)। यदि तब a ऋणात्मक है तो a एक से कम है।

हमारे आँकड़ों के लिये, जब X शून्य है (1920 के लिए X का मान), तो $bX = 1.0$ तथा $abX = 0\,0530565$ इस परिणाम के साथ कि 1929 के लिये $Y_c = (682\,6)(0\,0530565) = 36\,2$ है जो 1929 का निर्दिष्ट मान है और सारणी 13.5 के अन्तिम स्तम्भ में दिखाया गया है। X का मान जितना अधिक होगा b^X का मान उतना ही कम होगा। जैसे ही X बढ़ता है, bX शून्य पर पहुँच जाता है और abX , 1.0 पर, इस परिणाम के साथ कि Y_c , k या 683, उच्च अतः तत्पश्चात्, पर पहुँच जाता है।

अ कर्गजितीय कर्गधर पैमाना

नैन दस लाख में



चार्ट 13.10 1929—1961 में आहतकीम का स्वदेशीय उत्पादन, तथा उपनति जैसा कि गाम्पत वक्र द्वारा दिखाया गया है। ध्यान दीजिये कि इस चार्ट में कर्गजितीय कर्गधर पैमाना है। गाम्पत वक्र को वक्र का सामान्य आकार दिखाने के लिए बढ़ाया गया है। गाम्पत 13.5 से लिए भीकटे।

उपनिर्णय मानो का परिचय करने की विधि माग्यो 13 5 में दिखाई गई है। ध्यान दीजिये कि इस से कम छ अन्तों तक Σ_1 तथा Σ_2 लघु $Y_1 = \Sigma_1$ लघु $Y_2 = \Sigma_2$ लघु Y_3 तथा Σ_3 लघु $Y_4 = \Sigma_3$ लघु Y_5 । इन मगनियों को पडताल चिह्न द्वारा "लघु Y_6 " शीपक स्तम्भ में लिखा गया है। उपनिर्णय मानो का चार्ट 13 10 तथा 13 11 में आरेखित किया गया है तथा आमजित वक्र का आकार अधिक स्पष्ट रूप से संकेत करने के लिये उन्हें दाता दिशाओं में बढ़ाया गया है। 2000 तक उपनिर्णय का प्रसार भविष्यवाणी के रूप में प्रस्तुत नहीं किया गया है बल्कि कई बार गाम्भिर्य वक्र का प्रयोग भविष्यवाणी करने में सहायता के लिये किया जाता है। इन वस्त्वों को दोनों चार्टों पर दिखाया गया है और अनुसन्धर्षों तक उपनिर्णय का उपागम स्पष्ट है।

चार्ट 13 10 में यह देखा जाएगा कि प्रारम्भ में विकास की मात्रा कम है फिर उस समय तक जब तक कि यह नतिपरिवर्तन बिन्दु तक नहीं पहुँच जाती अधिक होती जाती है जिसके बाद यह गिरती है और अनुसन्धर्षों का न्यून के निकट पहुँच जाती है पर शून्य पर कभी नहीं पहुँचती। उपनिर्णय का यह सामान्य रूप बहुत से उद्योगों के लिये समान है और इसने हम निष्कर्ष पर पहुँचाया कि यह विकास के नियम का बखूबी बरतता है। इस व्याख्या के अनुसार यह उपनिर्णय जनसंख्या वृद्धि के कारण है जिसका वक्र प्रतिस्पर्धी ढंग से आकार में एक भाग ही है परन्तु यह भी आशिक रूप से विशिष्ट उद्योगों के विकास के कारण है। यह विश्वास है कि उद्योगों के विकास को चार अवस्थाओं में विभक्त किया जा सकता है

- (1) प्रयोग की अवधि
- (2) सामाजिक तथा विकास की अवधि
- (3) उस बिन्दु से जहाँ विकास उड़ता है परन्तु क्षासमान दर से
- (4) स्थिरता की अवधि।

ये अवस्थाएँ अधिक विशिष्ट रूप से सीमांकित नहीं हैं। इन प्रकार के वक्रों के लिए यह दावा किया जाना है कि यह किसी उद्योग के भविष्य की भविष्यवाणी में उपयोगी है क्योंकि यह केवल सकल जन वक्र ही नहीं है अपितु समतल बनाने वाली अपनी प्रवृत्ति के कारण भविष्यकथन में उसकी उपनिर्णय रुढ़िवादी होती है। चार्ट 13 10 और 13 11 को अतिरिक्त दश देशों में यह संकेत करती हुई दिखाई देंगी कि संयुक्त राज्य अमेरिका में आइसक्रीम के उत्पादन की ऊपरी सीमा लगभग 0.850 लाख मिलन होगी। यह कम संख्या 1930—1935 के महीने के वर्षों के प्रभाव के शास्वत्त्व है।

वृद्धिवादी वक्र—यह वक्र जो पलरीड वक्र के नाम से भी विख्यात है अपने सरलतम रूप में,

$$\frac{1}{Y_c} = k + ab^t$$

इन व्यंजनों से यह स्पष्ट हो जाना चाहिये कि यह केवल 1 माना के व्युत्क्रम का रूप में एक सशोधित चरघातावी है, Y_c मानों के व्युत्क्रमों का पहल अन्तर एकसमान प्रतिशतता से गिर रहे हैं। इन आशिक मापों की विधि में सशोधित चरघातावी को प्रेषित 1 माना के व्युत्क्रमों के साथ जोड़ा जा सकता था, और आमजित माना का इन प्रकार प्राप्य व्युत्क्रम

को उपनति मानो के रूप में लिया जा सकता था। तथापि, इस वक्र को अधिकतर $Y_c = \frac{k}{1+10^{a+bX}}$ लिखा जाता है,⁷ और चाहे चुने हुए बिन्दुओं के द्वारा आसजित यह प्रविधि अधिक व्यक्तिनिष्ठ है। इस रूप में, वृद्धिपाती वक्र का सदैव ऊँचा k का अनन्तस्पर्शी और नीचा शून्य का अनन्तस्पर्शी होगा; यह चार्ट 13 9 के भाग 1 या भाग 2 जैसा दिखाई देता है। $\frac{1}{Y_c} = k + abX$ के रूप में वृद्धिपात उन चारों रूपों को ग्रहण कर सकता था जिन्हें चार्ट 13 9 में दिखाया गया है।

समीकरण

$$Y_c = \frac{k}{1+10^{a+bX}}$$

को चुने हुए बिन्दुओं की विधि द्वारा जोड़ने के लिये तीन वर्षों, x_0 , x_1 , तथा x_2 के चुनने की आवश्यकता पड़ती है जो परस्पर एक दूसरे से समान दूरी पर हों। एक अवधि के प्रारम्भ के पाम हो, दूसरा मध्य में तथा तीसरा अन्त के निकट तीन चुने हुए मान जिनमें से आसजित वक्र गुजरेगा, उनमें इन तीन वर्षों के साथ सम्बद्ध Y मान हैं। इन Y मानों को y_0 , y_1 तथा y_2 नाम दिए गए हैं। X अक्षांश के ऊपर मूलबिन्दु x_0 कहलाने वाले ऊपर हैं और x_0 से x_1 तक या x_1 से x_2 तक n वर्षों की संख्या है। तीन स्थितियों को निम्न-लिखित प्रकार से प्राप्त किया जाता है

$$k = \frac{2y_0y_2y_1 - y_1^3(y_0 + y_2)}{y_0y_2 - y_1^2}$$

$$a = \log \frac{k - y_0}{y_0}$$

$$b = \frac{1}{n} \left[\log \frac{y_0(k - y_1)}{y_1(k - y_0)} \right]$$

उदाहरण के निर मा. एं. 13 6 वृद्धिपाती वक्र को महाद्वीपीय समुक्त राज्य अमेरिका के 1820—1960 की जनसंख्या के माँकडा से जोड़ने की प्रविधि को प्रदर्शित करती है। जनसंख्या के माँकडे रेखाचित्र विधि से चार्ट 13 12 में दिखाए गए हैं। सारे काल 1790—1960 की अपेक्षा, इस अवधि, जिसमें 15 इस वार्षिक अंक सम्मिलित है, का प्रयोग

7 हर में, 10 की अपेक्षा, प्राय $e=2.71828$ का प्रयोग किया जाता है। जिससे

$$Y_c = \frac{k}{1+e^{a+bX}}$$

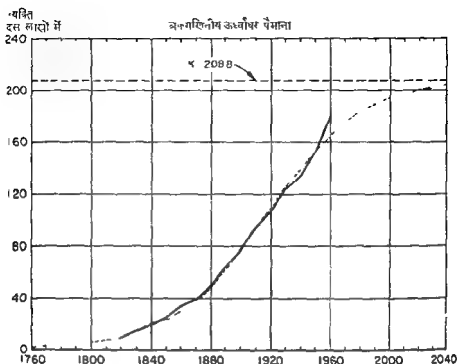
दोनों रूपों में a मान तथा b मान कि न होंगे, परन्तु दोनों रूप एक ही वक्र का वर्णन करते हैं, और हर में 10 का प्रयोग करते हुए, अक्षर से Y_c मानों की समझना करना थोड़ा-सा सुगम है।

सारणी 136

1920—1960 में महाद्वीपीय समुक्त राज्य की जनसंख्या के अंकित से वृद्धिमानों वक्र को जोड़ने के लिये मानों का परिकल्पित उपनति मानों की संगणना

वर्ष (1)	x (2)	X (3)	जनसंख्या हम जालों में Y (4)	y (5)	0 1346810X (6)	समूह μ = 1 181505 - 0 1346810X (7)	μ (8)	1 + μ (9)	$Y_c = \frac{1 + \mu}{10}$ (10)
1820	—	—	96	12.9 (y ₀)	-0 1346810	1 316186	20.71	21.71	96
1830	...	0	129	...	0	1 181505	15.19	16.19	129.1
1840	...	1	171	...	0 1346810	1 046824	11.14	12.14	172
1850	...	2	232	...	0 269362	0 912143	8.169	9.169	228
1860	...	3	314	...	0 404043	0 777462	5.990	6.990	299
1870	...	4	398	...	0 538724	0 642781	4.393	5.393	387
1880	...	5	502	62.1 (y ₁)	0 673405	0 508100	3.221	4.221	495
1890	...	6	629	...	0 808086	0 373419	2.363	3.363	621
1900	...	7	760	...	0 942767	0 238738	1.733	2.733	764
1910	...	8	920	...	1 077448	0 104057	1.271	2.271	920
1920	...	9	1057	...	1 212129	-0 030624	0.9319	1.9319	1081
1930	...	10	1228	...	1 346810	-0 15305	0.6834	1.6834	1241
1940	...	11	1317	...	1 481491	-0 299986	0.5012	1.5012	1391
1950	...	12	1507	152.7 (y ₂)	1 616172	-0 434667	0.3676	1.3676	1527✓
1960	...	13	179.3	...	1 750853	-0 569348	0.2696	1.2696	1645

अंकित स्मिटिकल ऐंटांट्रेंट ग्रॉफ दि यूनाइटेड स्टेट्स 1964, पृष्ठ 5 से। स्तम्भ 5 से x₀ मान, x₁, तथा x₂ पर केन्द्रित तीन मानों के गुणोत्तर माध्य हैं। स्तम्भ 7 में अणुसंख्या 'अणुसंख्या' के, अणुसंख्या के साथ उनके वैकल्पिक रूपों में गुण दिया जाता कहिये (जैसे, —0 030624 = 9 969376-10) पूर्व स्तम्भों में μ के मानों को प्राप्त किया जा सके।



चार्ट 13 12 1820—1960, में महाद्वीपीय संयुक्त राज्य की जनसंख्या, तथा उपनति जैसा कि वृद्धिवादी वक्र द्वारा प्रदर्शित किया गया है। वक्र के सामान्य आकार को दिखाने के लिये वृद्धिवादी वक्र को बढ़ाया गया है। सारणी 13 6 के अंकित।

किया गया था, ताकि पूर्व वर्णित "व्युत्क्रमों के आंशिक योगों की विधि से तुलना की जा सके। सारणी 13 6 में तीन चुने हुए बिन्दु हैं।

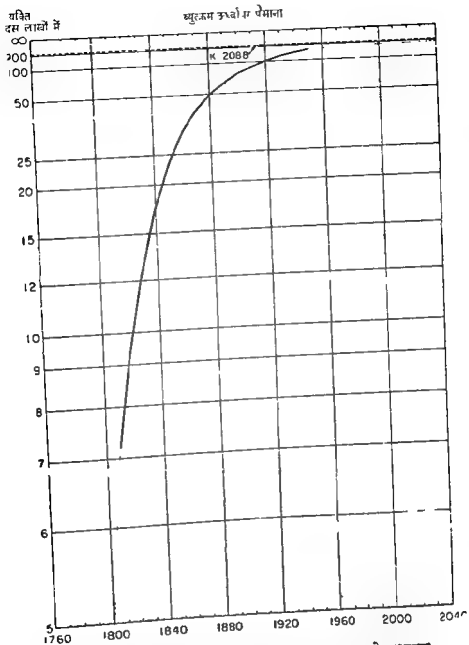
y_0 , 1820, 1830, तथा 1840 के वर्षों के मानों का गुणोत्तर माध्य,

y_1 , 1880, 1890, तथा 1900 के वर्षों के मानों का गुणोत्तर माध्य; तथा

y_2 , 1940, 1950, तथा 1960 के वर्षों के मानों का गुणोत्तर माध्य।

परिणामतः, जैसा कि सारणी 13 6 के दूसरे स्तम्भ में दिखाया गया है, x_0 , 1830 पर है, x_1 , 1890 पर, तथा x_2 , 1950 पर। एकमात्र असामान्य ऊँचे या नीचे मान के प्रभाव

8 1810—1950 के लिये आंशिक योगों की विधि प्रदान करती है $k=185.9$ मिलियन। 1820—1960 के लिये चुने हुए बिन्दुओं की विधि के लिये जोड़ सारणी 13 6 में $k=208.8$ प्रदर्शित करता है। 1790—1950 के लिये चुने हुए बिन्दुओं की विधि $k=189.9$ मिलियन प्रदान करती है (उन बिन्दुओं की तरह पहले तीन, मध्य के तीन तथा अन्त के तीन वर्षों के गुणोत्तर माध्यों का प्रयोग करने हुए)। वृद्धिवादी वक्र की जोड़ने के कुछ अन्य दम के ० आर० मायर द्वारा निश्चित "दि फिटिंग ऑफ़ श्रेय कर्णों" जो आस्कर कैम्पबेल, एट अल द्वारा सम्पादित स्टैटिस्टिक्स एण्ड मैथेमैटिक्स इन बायोलॉजी, दि बायोमेट्रिक स्टेट कालेज प्रेस, आगेम, बालोवा, 1954, पृष्ठ 119—132, में दिये गए हैं।



चार्ट 13 13 1820—1960 में महाद्वीपीय समुक्त राज्य की जनसंख्या, तथा उपनति जैसा कि वृद्धिशीली वक्र के द्वारा दिखाया गया है। वक्र व सामान्य रूप का प्रतिनिधित्व करने के लिए वृद्धिशीली वक्र को बढ़ाया गया है। ध्यान दीजिये कि इस चार्ट का व्युत्क्रम ऊर्ध्वोपर पैमाना है और पैमाने के ऊपरी भाग में दबाव के कारण, प्रेतिन आँकड़ों का वक्र और नरार्ति रेखा वन्धुन प्रारण में मिलती है। भारती 13 6 के आँकड़े।

का न्यूनतम वर्ग के नियमों में समायोजित ग्रह की आयना का प्रयोग किया गया था, अक्ष-गणितीय माध्य की अनुशा गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया गया था, क्योंकि जनसंख्या की वृद्धि अक्षगणितीय अनुवर्धन की अनुशा, गुणान्तर अनुवर्धन के अधिक निकट है। n का मान 6 है और वर्षों की संख्या x_0 में x_1 तक या x_1 में x_2 तक है। सारणी 13.6 में प्रदर्शित y_0, y_1 और y_2 मानों का प्रयोग करके हम k, a , तथा b के मानों को निम्न प्रकार से प्राप्त कर रहे हैं :

$$\begin{aligned} k &= \frac{2(y_0 y_2 - y_1^2)(y_0 + y_2)}{y_0 y_2 - y_1^2}, \\ &= \frac{2(129)(621)(1527) - (621)^2(129 + 1527)}{(129)(1527) - (621)^2}, \\ &= 208\,827 \\ a &= \text{तब } \frac{k - y_0}{y_0} \\ &= \text{तब } \frac{208\,827 - 129}{129} = \text{तब } 15\,188.140, \\ &= 1\,181.505 \\ b &= \frac{1}{n} \text{तब } \frac{y_0(k - y_1)}{y_1(k - y_0)}, \\ &= \frac{1}{6} \left[\text{तब } \frac{129(208\,827 - 621)}{621(208\,827 - 129)} \right] = \frac{1}{6} \text{तब } 0.15556570, \\ &= \frac{1}{6}(9.19191396 - 10) = \frac{1}{6}(-0.80808604), \\ &= -0.1346810 \end{aligned}$$

उपनि समीकरण

$$y_c = \frac{208\,827}{1 - 10^{(-1.1346810 - 0.1346810X)}}$$

मूलवर्ष 1830, X इकाइया, 10 वर्ष।

इस वर्तमान समीकरण के उपनि मानों के परिकलन को सारणी 13.6 के प्रतिम पांच स्तम्भों में दिखाया है। प्रविधि पहले

$$\mu = 10^{a+bX}$$

लिखने की ताकि

$$Y_c = \frac{k}{1 + \mu}.$$

हमारे समीकरण में

$$\mu = 10^{(1.181505 - 0.134681X)}$$

तथा

$$\begin{aligned} \text{तब } \mu &= (\text{तब } 10)(1.181505 - 0.134681X), \\ &= 10(1.181505 - 0.134681X), \\ &= 1.181505 - 0.134681X \end{aligned}$$

μ के मानों को सारणी 13.6 के स्तम्भ 6, 7, और 8 में प्राप्त किया जा सकता है। इस सारणी के स्तम्भ 9 में $1 + \mu$ के मान दिखाए गए हैं और Y , मानों को स्तम्भ 10 में प्राप्त किया गया है। क्योंकि वक्र को अवश्यमेव तीन चुन दिए बिन्दुओं में से होकर जाना चाहिए अतः 1830, 1890, और 1950 के Y , मानों को Y_0 , Y_1 , तथा Y_2 मानों के साथ तुलना करते हुए परिकलन को जांच की जा सकती है। सारणी 13.6 के स्तम्भ 10 में पड़ताल सकते यह बताते हैं कि सगति विद्यमान है।

उपनति मान चार्ट 13.12 तथा 13.13 में अरेखित किए गए हैं, तथा वक्र के मूलभूत आकार को अधिक स्पष्ट रूप से दिखाने के लिए उपनति को दोनों दिशाओं में बढ़ाया गया है। ध्यान दीजिए कि प्रेक्षित आकृतों और उपनति में सगति प्रायः इतनी निकट है कि दोनों में भेद करना बड़ा कठिन है। यह भी ध्यान दीजिए कि चार्ट 13.13 में व्युत्क्रम ऊर्ध्वधर पैमाने का प्रयोग किया गया है और इस चार्ट में वृद्धिघाती वक्र वक्रों में सशोषित घटाती वक्र के बिल्कुल समान है।

वृद्धिघाती वक्र का वर्णन 1838 में किया गया था और बाद में पी० एफ० बरहल्ट द्वारा उसका अधिक पूर्णता के साथ व्याख्या की गई थी। 1920 में इसे रेमंड पर्ल तथा लॉवेल जे० रीड द्वारा स्वतन्त्र रूप में विकसित किया गया। इसे प्रायः पर्ल-रीड वक्र के नाम से पुकारा जाता है। पर्ल तथा रीड ने सफेद चूह तथा भेटक की पूछ, एक पौष्टिक घोल में खमीर कोशिकाओं की संख्या, एक बोतल में फल मक्खियों की संख्या (सीमित वाद्य पूर्ति पर), और इन सबसे सबसे अधिक रश्चिबर, एक भौगोलिक क्षेत्र में मनुष्य मात्र की संख्या के विकास का वर्णन करने के लिए वक्र का प्रयोग किया है। प्रत्येक अवस्था में मापा गया तत्त्व प्राणी प्रयोग में कोशिकाओं की संख्या या एक क्षेत्र में व्यक्तियों की संख्या अर्थात् जनसंख्या की वृद्धि है। वृद्धि के नियम की, जिसका वृद्धिघाती वक्र वर्णन करता है, पर्ल ने निम्नलिखित आशय की है *

क्षेत्र की दृष्टि से सीमित ब्रह्माण्ड में वृद्धि की मात्रा, जो समय की किसी एक विशेष इकाई पर विकास के संचले वक्र के किसी बिन्दु पर होती है, दो वस्तुओं की मानुपातिक है, अर्थात् (क) स्वतन्त्र आकार जिसे पहले ही विचाराधीन इकाई अन्तराल के प्रारम्भ में प्राप्त कर लिया गया था, तथा (ख) विकास की पुष्टि के लिये वास्तविक तथा सम्भावित दोनों के निर्दिष्ट ब्रह्माण्ड (या क्षेत्र) में अभी तक अप्रयुक्त या अनुत्सर्जित मात्रा।

9 रेमंड पर्ल द्वारा विधित, दि वायालाजी आफ पॉपुलेशन ग्रोथ, एचएच एंड कोल्, न्यूयार्क, 1925, पृष्ठ 22।

मानव जनसंख्या के सबन्ध में, हो सकता है नया विकास प्रायः जीवन निर्वाह के उपलब्ध साधनों को बढ़ा द और विकास के नये चक्र को बनने दे। उदाहरण के लिये, मनुष्य जाति शिकार की अवस्था, कृषि की अवस्था और उद्योग की अवस्था से गुजरे। तब प्रत्येक सांस्कृतिक युग को वहीँ पुराने वृद्धिघाती चक्र पर नए वृद्धिघाती चक्र को रख कर दिया जा सकता है। इस प्रकार

$$Y_c = \lambda_1 + \frac{\lambda_0}{1 + 10^{a+bX}}$$

एक ऐसे चक्र का वर्णन करता है जिसमें λ_1 नई निम्न सीमा है और $\lambda_1 + \lambda_0$ नई उच्च सीमा। इस मॉडल में λ_1 पहले वृद्धिघाती चक्र के उच्च बिन्दु λ_0 से नीचे है और उस मान की ओर संकेत करता है जिस पर पहले उच्च सीमा में बाधा पड़ी थी।

स्पष्टतया आप्रवास और मानव संख्याओं की वारंवार चक्र के मूलमूल प्रकार को परिवर्तित नहीं करता। यद्यपि वे इसका टाल की सीढ़णा में कुछ हेर-फेर कर सकती हैं। यह भी हो सकता है कि विकास सममित न हो ननि परिवर्तन बिन्दु को ऊपरी तथा निम्न अनन्तस्थिति के मध्य होने की आवश्यकता नहीं और न ही चक्र के दो भागों का प्रकार समान होना आवश्यक है।

$$I_c = \frac{\lambda}{1 + 10^{a+bX+cX^2}}$$

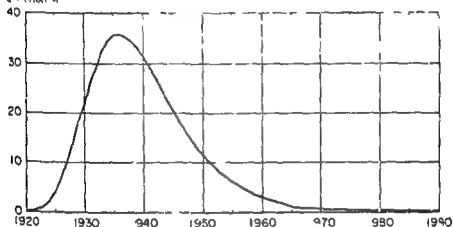
लिख कर पहले सूत्र में घोज सा सुधार करके विपरीत वृद्धिघाती का प्राप्त किया जा सकता है।

तथापि रेमंड पर्स के सिद्धान्त को मार्बजनीन रूप से नहीं माना गया है। कुछ तर्क देते हैं कि यद्यपि वृद्धिघाती चक्र एक बोलत में फल मन्त्रियों की सख्या के लिय पर्याप्त उपयुक्त है परन्तु इसका मानव-समाज में विस्तार अनुचित है। मनुष्यों के पास भ्रमन बनावरण को परिवर्तित करने तथा विवेकपूर्वक पुनरुत्पत्ति की दर को नियन्त्रित करने की शक्ति होती है और वे इस शक्ति का प्रयोग करते हैं।

एक लाभ जिसके लिए कभी-कभी वृद्धिघाती चक्र का प्रयोग किया जाता है, भावी जनसंख्या के प्रकार की पूर्वकल्पना करना है। केवल मात्र चक्र के विस्तार पर आधारित पूर्वकल्पनाओं की उपयोगिता मन्दित है, क्योंकि उनमें किसी ध्रेणी पर अननिहित प्रभावों में से किसी महत्वपूर्ण परिवर्तन की कल्पना नहीं होती।¹⁰ 1970 के लिय हमारे वृद्धिघाती चक्र का बढ़ाया हुआ उपनि मान 1744 लाख है, जो स्पष्ट हो बहुत नीचा है। जब विरवस्त अभिलेख विद्यमान न हो, तो पूर्व वर्षों की जनसंख्या का अनुमान लगाने के लिए ऐसी उपनि का भी प्रयोग किया जा सकता है, जैसी हमन आसजित की है। इस प्रकार आजकल क महाद्वीपीय संयुक्त राज्य की जनसंख्या का हमारे समीकरण से अनुमान लगाया जा सकता है, जो 1790 में लगभग 39 लाख थी। 1790 के लिए अधिक अच्छा अनुमान उस समय मिल सकता था यदि हमन वृद्धिघाती समीकरण के स्थिरांक का निर्धारण करते हुए 1800 और 1810 को सम्मिलित किया होता।

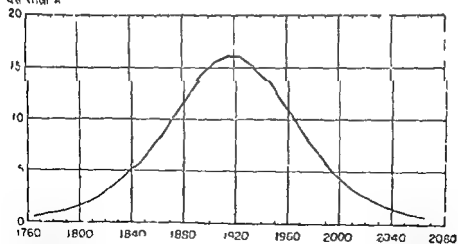
गॉम्पर्ट तथा वृद्धिघाती वक्रों की तुलना—इस रूप में गॉम्पर्ट तथा वृद्धिघाती वक्र एक से है कि बढ़ती हुई श्रेणी जोकि विकास की गिरती हुई प्रतिशतता से बढ़ रही है, या गिरती हुई श्रेणी जोकि पतन की घटती हुई प्रतिशतता से घट रही है ऊ वरुण दोनों के द्वारा किया जा सकता है। वे इस बात में भिन्न हैं कि गॉम्पर्ट वक्र के अन्तगत लघु Y_0 मानों के उत्तरोत्तर प्रथम अन्तरो का एक समान अनुपात आता है जबकि वृद्धिघाती वक्र में $\frac{1}{Y_0}$ मानों के उत्तरोत्तर प्रथम अन्तरो के समान अनुपात का समावश होना है।

मैनन
दस लाखों में



चार्ट 13 14 क 1920—1990 में ग्राहस कीम के स्वदेशीय उत्पादन के गॉम्पर्ट उपनति मानों के प्रथम अन्तर।

मैनन
दस लाखों में



चार्ट 13 14 क 1770—2070 में महाद्रीपीय समुक्व राज्य की जनसंख्या के लिए वृद्धिघाती उपनति मानों के प्रथम अन्तर।

श्रेणी के उन प्रकारों के लिये जिनमें इन वक्रों का प्रयोग करने में हमारी रुचि है वानों के ऊपरी तथा निम्न अनन्तस्पर्शी हैं।

गाम्पते वक्र के उपनति मानों के प्रथम अन्तर एक ऐसा वक्र बनाते हैं जो विषम वारम्बारता बटन के साथ मिलता-जुलता है, जैसा कि चार्ट 13 14 के भाग क में दिखाया गया है। वृद्धिघाती वक्र के उपनति मानों के प्रथम अन्तर, जिस प्रकारका यहाँ वर्णन किया गया है, एक ऐसे वक्र की रचना करते हैं जो प्रसामान्य वारम्बारता बटन से मिलता-जुलता है (देखें अध्याय 23), जैसे चार्ट 13 14 के भाग ख में दिखाया गया है। वृद्धिघाती वक्र की इस विशेषता के कारण, यह देखने के लिये कि क्या उपनति ऋजु रेखा दृष्टिगोचर होती है, प्रेक्षित माँकड़ों को कई बार अकगणितीय सम्भावना-पत्र¹¹ (देखें, चार्ट 23.9 तथा उसके भाग का विवरण) पर आरोक्षित किया जाता है। यदि ऐसा है, तो वृद्धिघाती वक्र को मासजित किया जा सकता है।

गाम्पते वक्र को जब अर्ध-लघुगुणीय पत्र पर आरोक्षित किया जाता है, तो उसका रूप एक सशोधित चरघाताकी वक्र का होता है, और जब व्युत्क्रम ऊर्ध्वधर पैमाने और अकगणितीय क्षैतिज पैमाने द्वारा (वैकल्पिक रूप से, $\frac{1}{y_c}$ और X को अकगणितीय पत्र पर आरोक्षित किया जा सकता है) एक ग्रिड पर आरोक्षित किया जाता है, तो वृद्धिघाती वक्र का रूप सशोधित चरघाताकी वक्र का होता है।

उपनति प्ररूप का चयन

इस अध्याय में तथा पूर्वगामी अध्याय में उपनतियों के उन प्रकारों का, जिनका उपयोग किया जा सकता है विरतृत वर्णन करने का प्रयत्न नहीं किया गया है। तथापि, काल-श्रेणी विश्लेषण की अधिकांश आवश्यकताओं की पूर्ति के लिए, पर्याप्त विविधता प्रदान की गई है। इतनी अधिक सरा में प्राप्य उपनति प्ररूपों से कोई व्यक्ति कैसे निर्णय कर सकता है कि वह किस चुने? प्रथम, उपनति प्ररूप उन शक्तियों के व्यवहार के अनुरूप होना चाहिये जिनको मापने का प्रयास हम करते हैं। यदि एकमात्र उद्देश्य चरघाताकी वक्रों को प्राप्त करना हो, तो उपनति को प्रत्येक चक्र के लगभग मध्य से गुजरना चाहिये। यदि पूर्वानुमान के उद्देश्य से उपनति को बढ़ाने की इच्छा की जाए तो उपनति तथा इसके विस्तार को तर्कशास्त्र द्वारा निर्दिष्ट आशाओं के अनुरूप होना चाहिए। उदाहरणार्थ, यदि श्रेणी ऐसी है कि तार्किक आधार पर उसके समतल होने की आशा की जा सकती है, तो एक अनन्तस्पर्शी वक्र को चुन लिया जाना चाहिये। जब एकमात्र उद्देश्य ऐतिहासिक अध्ययन करना हो तो वक्र का भावी व्यवहार इतना महत्वपूर्ण नहीं होता।

यह निर्णय करने के लिये कि कौनसे उपनति प्ररूप का प्रयोग किया जाए, पहला पद सदैव अकगणितीय-पत्र पर प्रेक्षित माँकड़ों को आरोक्षित करना होना चाहिए और फिर, यदि उपनति एकघात नहीं है, अर्थात् या तो (1) ऊर्ध्वगामी और अवतल ऊर्ध्वगामी

11 इसमें (1) एक अनन्तस्पर्शी की कल्पना और (2) आरोक्षित करने से पूर्व प्रेक्षित माँकड़ों की अनन्तस्पर्शी के प्रतिशतों के रूप में अभिव्यक्ति, का समावेश है। एक से अधिक अनन्तस्पर्शियों का परीक्षण किया जा सकता है।

है या (2) निम्नगामी और अवतल ऊर्ध्वगामी है, तो अर्ध-लघुगणकीय पत्र पर प्रेक्षित आँकड़ों को आरेखित करना चाहिए। आरेखित आँकड़ों का परीक्षण उपनति के प्रयोज्य प्ररूप का निश्चय करने के लिये प्रायः उपयुक्त आधार प्रदान करेगा। जब आगे मार्ग-दर्शन की आवश्यकता हो तो निरीक्षण द्वारा लगभग मन्निवट उपनति आरेखित की जा सकती है तथा सरल किए गए वक्र पर निम्न परीक्षण लागू किए जा सकते हैं।

1. यदि प्रथम अन्तरो की प्रवृत्ति स्थिराक होन की हो तो ऋजु रेखा का प्रयोग करो।

2. यदि द्वितीय अन्तरो की प्रवृत्ति स्थिराक होने की हो तो द्वितीयांश वक्र का प्रयोग करो।

3. यदि प्रथम अन्तरो की अचर प्रतिशतता में गिरने की प्रवृत्ति हो तो एक सशोधित चरघाताकी का प्रयोग करो।

4. यदि सन्निकट उपनति, जब उसे अर्धगणकीय पत्र पर आरेखित किया जाता है, एक ऋजु रेखा हो, तो ऋजु रेखा का प्रयोग करो।

5. अर्ध-लघुगणकीय पत्र पर आरेखित किये जाने पर यदि सन्निकट उपनति एक ऋजु रेखा हो तो एक चरघाताकी वक्र का प्रयोग करो।

6. अर्ध-लघुगणकीय पत्र पर आरेखित किये जाने पर, यदि सन्निकट उपनति एक सशोधित चरघाताकी प्रतीत हो, तो गाम्पतं वक्र का प्रयोग करो।

7. यदि सन्निकट उपनति जब उसे व्युत्क्रम उर्ध्वार पैमाने तथा अर्धगणकीय धैतिज पैमाने द्वारा मिश्र पर आरेखित किया जाता है, सशोधित चरघाताकी से मिलता-जुलता है, तो वृद्धिघाती वक्र का प्रयोग करो। वैकल्पिक रूप से, $\frac{1}{Y}$ तथा X को अर्धगणकीय मिश्र पर आरेखित किया जा सकता है।

8. यदि प्रथम अन्तर विषम बारवारता वक्र से मिलते-जुलते हो, तो गाम्पतं वक्र का या यहाँ वर्णित वक्र की अपेक्षा अधिक सम्मिश्र वृद्धिघाती वक्र का प्रयोग करो।

9. यदि प्रथम अन्तर एक प्रसामान्य बारम्बारता वक्र से मिलते-जुलते हो, तो वृद्धिघाती वक्र का प्रयोग करो।

10. यदि लघुगणकी के प्रथम अन्तर अचर है तो चरघाताकी वक्र का प्रयोग करो।

11. यदि लघुगणकी के द्वितीय अन्तर अचर है, तो लघुगणकी के साथ द्वितीयांश वक्र आसजित करो।

12. यदि लघुगणकी के प्रथम अन्तर एवं अचर प्रतिशतता से परिवर्तित हो रहे हो, तो गाम्पतं वक्र का प्रयोग करो।

13. यदि व्युत्क्रमों के प्रथम अन्तर अचर प्रतिशतता से परिवर्तित हो रहे हैं, तो वृद्धिघाती वक्र का प्रयोग करो।

14. यदि सन्निवट उपनति मान (या मूल आँकड़े), जब उन्हें चुने हुए अन्त-स्पर्शी की प्रतिशतताओं के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है, अर्धगणकीय सम्भावना पत्र पर रेखिक दृष्टिगोचर होन है, तो वृद्धिघाती वक्र का प्रयोग करो।

कभी-कभी ऐसी श्रेणियाँ मिलती हैं जो समय के एक भाग में एक प्रकार की उपनति रखती हुई दृष्टिगोचर होती हैं और समय के दूसरे भाग में उनी अथवा भिन्न प्रकार की भिन्न उपनति रखती हैं। उपनति में परिवर्तन अधिकतर 1930 के ग्रामपास हुए लगते हैं।

अनेक उपनतियाँ जिनमें से प्रत्येक में स्थिरांक की संख्या समान हो, आँकड़ों की श्रेणी के लिये कठिनाई ने ही समान रूप से उपयुक्त दृष्टिगोचर होती हैं। ऐसी अवस्था में, उसी एक को प्राथमिकता दी जानी चाहिए जिससे Y मानों के वर्गित विचलन न्यूनतम हो। इस प्रकार की तुलना करते समय, Y मानों के साथ सम्बन्धित वक्रों की लघु Y मानों से असम्बन्धित वक्रों के साथ तुलना नहीं करनी चाहिये।

कभी-कभी, पहले वर्णित सहायताओं में से कोई भी निर्णय करने के योग्य नहीं बनाएगी कि कौन-से उपनति प्ररूप का प्रयोग किया जाए। यह इसलिए हो सकता है कि सन्निकट उपनति को उचित रूप से नहीं चुना गया था। या, ऐसा हो सकता है कि श्रेणी किसी सरल गणितीय विवरण के अनुरूप न हो। गणितीय विश्व में, कार्य कर रही शक्तियाँ अन्य कारकों के प्रभाव डालने से पूर्व, विरले ही अपना पूर्ण प्रभाव डाल पाती हैं। परिणामतः, कोई भी उपनति प्ररूप, केवल अपेक्षतया लघु काल के लिये उपयुक्त हो सकता है।

काल-श्रेणी का विश्लेषण :

आवर्ती गतियाँ I—स्थिर ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप

जैसाकि अध्याय 11 में संकेत किया गया है, आवर्ती गतियां बहुत प्रकार की हैं, जिनमें वे भी सम्मिलित हैं जो अपने आपको दिन सप्ताह, मास, अथवा वर्ष में दोहराती हैं। इस अध्याय में सबसे अधिक ध्यान वर्ष के भीतर की उन मासिक गतियों की ओर दिया जाएगा जो माघारणतया ऋतुनिष्ठ गतियों के नाम से प्रसिद्ध हैं। निधारित सिद्धान्तों का विभिन्न अन्य आवर्ती गतियों के प्ररूपों पर सुगमता से अनुप्रयोग किया जा सकता है। इस विवरण की योजना यह है कि उन आंकड़ों से प्रारम्भ किया जाए जिनका निरूपण बहुत सरल है तथा धीरे धीरे आवश्यकतानुसार सम्मिश्र विधियाँ का परिचय कराया जाए। तथापि, उन ऋतुनिष्ठ गतियों का विचार, जिनके प्रतिरूप वर्षानुवर्ष बदलत रहते हैं, अगले अध्याय में दिया जाएगा। सामान्यतया किसी न किसी रूप में, सभी विधियों में औसतों निकालने की आवश्यकता पड़ती है पहले विभिन्न जनवरी मासों के मानों की, फिर विभिन्न फरवरी के मासों की इत्यादि परन्तु उनमें मुख्यतः उसी मात्रा में भेद होता है जिस मात्रा में औसत निकाले जाने से पूर्व आंकड़ों का परिष्कृत किया जाता है।

एक परिचयात्मक दृष्टान्त

प्रसन्नजित आंकड़ों की औसतें—जब आंकड़ों में किसी सराहनीय सीमा तक वार्षिक गतियाँ या उपनति नहीं होती तो किसी पूर्व समजन के बिना आंकड़ों की औसत निकालना पर्याप्त होगा। इस प्रकार के आंकड़ों का उदाहरण है उन पुस्तकों की संख्या जो 1965 के वसन्त-मूल के मध्य रुगर्स विश्वविद्यालय के पुस्तकालय के मुख्य निर्गम पटल पर घर पर प्रयोग के लिये ली गई तथा नवीकृत कराई गईं। आंकड़े मारणी 14.1 में दिखाए गए हैं जिनमें से वे सप्ताह निकाल दिए गए हैं, जिनमें अवकाश हुआ जैसे उदाहरण के लिए ईस्टर अवकाश का सप्ताह। आंकड़ों के प्रत्येक स्तम्भ के नीचे उन स्तम्भ की औसत दी गई है। औसतें, सप्ताह के प्रत्येक दिन के लिये, पुस्तकों के संचार में अन्तर्सप्ताह घटा-वृद्धि का एक माप हैं। तथापि, सुविधा के लिये, यह वाञ्छित हो सकता है कि इन माप को प्रतिशतता के रूप में व्यक्त किया जाए। छ दैनिक औसतों में से प्रत्येक को उन छ औसतों की औसत से भाग करके (जो सारे काल के लिये प्रतिदिन की औसत है) और छ दैनिक औसतों में से प्रत्येक को प्रतिशतता के रूप में व्यक्त करके, हम उन सूचकांक को प्राप्त करते हैं जिसे मारणी 14.1 की अन्तिम पंक्ति में दिखाया गया है।

सारणी 14 1

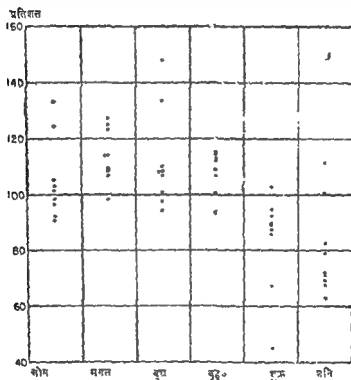
प्रसमजित आंकड़ों की श्रृंखलाओं का प्रयोग करते हुए, बसन्त सत्र 1965 में, हासस विश्वविद्यालय के पुस्तकालय के मुख्य निर्गम पटल पर ली गई तथा नवीकृत कराई गई पुस्तकों की संख्या के अन्तःसप्ताह विचरण के सूचकांक का परिकलन

सप्ताह प्रारम्भ	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार	श्रीसन प्रतिदिन
फरवरी 11	665	748	722	734	604	456	654 8
फरवरी 15	701	787	686	822	649	730	729 2
फरवरी 22	1,000	939	816	703	506	535	749 8
मार्च 1	642	612	792	712	277	691	621 0
मार्च 8	862	794	700	739	607	470	695 3
मार्च 15	597	819	627	703	609	510	644 2
अप्रैल 5	754	884	1 224	777	744	603	831 0
अप्रैल 12	696	765	748	703	714	578	700 7
अप्रैल 19	834	979	862	906	675	498	792 3
समान्तर माध्य	750 1	814 1	797 4	755 4	598 3	563 4	713 1
सूचकांक	105 2	114 2	111 8	105 9	83 9	79 0	100 0

नोट: हासस विश्वविद्यालय के पुस्तकालय के मुख्य निर्गम पटल से।

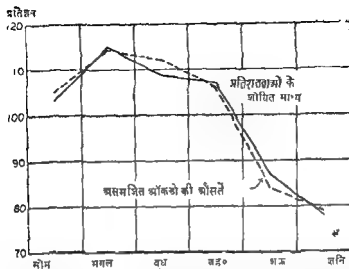
सरल श्रृंखला की प्रतिशतताएँ—नौ सप्ताहों के प्रतिदिन के श्रृंखला संचार के आंकड़ों पर एक दृष्टि, जिसे सारणी 14 1 के अन्तिम स्तम्भ में दिखाया गया है, यह स्पष्ट करती है कि त्रिमासीयता कुछ सप्ताहों में दूसरों की अपेक्षा महत्तर है। सारणी 14 1 में गृहीत प्रक्रिया, कम संचार वाले सप्ताहों द्वारा की गई चेष्टा की अपेक्षा, अधिक संचार वाले सप्ताहों की दैनिक श्रृंखला और उसी प्रकार अभिसूचका पर अधिक भार डालने की चेष्टा करने की अनुमति प्रदान करती है। तत्काल यह भोचा जा सकता है कि इस प्रकार का कालानुसार बहुत अधिक अपेक्षित है परन्तु यह स्मरण रखा चाहिये कि हम विशेष प्रकार के प्रतिरूप का निर्धारण करने का प्रयास कर रहे हैं और यह आवश्यक नहीं है कि अधिक संचार वाले सप्ताह विशेष प्रतिरूप वाले सप्ताह भी हों। यदि निर्दिष्ट सप्ताह के प्रत्येक दिन के आंकड़ों को उस सप्ताह के लिए श्रृंखला की प्रतिशतताओं के रूप में व्यक्त किया जाए, जैसा कि सारणी 14 2 में है, तो अन्तःसप्ताह घटा-बढ़ी के सूचकांक का निर्धारण करने के लिये प्रत्येक सप्ताह बराबर महत्त्व का होगा। इसके अतिरिक्त, आंकड़ों की प्रतिशतता के रूप में रख कर, हम प्रत्येक साप्ताहिक प्रतिरूप से अधिक शीघ्रता से अनिश्चित घटा-बढ़ी का पता लगा सकते हैं। प्रत्येक दिन के ऐसे प्रतिशतता आंकड़ों का अध्ययन समान्तर माध्य की अपेक्षा किसी अन्य श्रृंखला के चयन की ओर ले जा सकता है। इस प्रकार, प्रस्तुत उदाहरण में,

सारणी 14 2 के प्रतिशतता आकड़ा को सारणी 14 3 में और चार्ट 14.1 में मरणियों में रखा गया है। चार्ट 14.1 से यह स्पष्ट है कि आवर्ती गति विद्यमान है। यह भी स्पष्ट है कि कुछ एक चरम मान हैं जो सामान्य प्रतिरूप में आसजित नहीं होते। प्रत्येक दिन के लिये माध्यिका का प्रयोग करके इस प्रकार की चरमताओं के प्रभाव को काफी कम किया जा सकता है, या, प्रत्येक दिन के मानों के वेन्द्रीय समूह के समान्तर माध्य का प्रयोग करके चरम मानों का उन्मूलन किया जा सकता है। सारणी 14 3 में प्रत्येक दिन के लिए माध्य के सात मानों की औसत दिखायी गयी है। क्योंकि ये छः अंक मशोषित माध्य हैं, इसलिये



चार्ट 14 1 वसन्त मंत्र 1965 में रूग्ण विश्वविद्यालय पुस्तकालय के मुख्य निगम पटल में घर पर उपयोग के लिये ली गई तथा नवीकृत कटाई गई पुस्तकों की सख्या की प्रत्येक सप्ताह की दैनिक औसतों की प्रतिशतताओं की सरणियाँ। सारणी 14 3 के अंक हैं।

इनकी औसत ठीक 100 0 नहीं है। इसके ध्यान पर उनकी औसत 99 6 है और सारणी 14 3 की अन्तिम पंक्ति में दिखाए गए सूचकांक को प्राप्त करने के लिये उनमें से प्रत्येक को 99.6 में भाग देने तथा 100 से गुणा करके औसत 100 0 करने के लिये उनका समजन कर लिया जाता है। सारणी 14 1 और 14 3 के सूचकांक जो चार्ट 14 2 में दिखाया गया है। वे बहुत अधिक भिन्न नहीं हैं, क्योंकि महत्त्व में नौ सप्ताह बहुत अधिक भिन्न नहीं है।



चार्ट 14.2 वसन्त सत्र 1965 में ह्यूस विश्वविद्यालय पुस्तकालय के मुख्य निर्गम पटल से घर पर प्रयोग के लिये ली गई तथा नवीकृत कराई गई पुस्तकों की सख्या के अन्तर्गताह घटा-बढी के सूचकांक । सारणी 14.1 तथा 14.3 हे ।

सारणी 14.2

वसन्त सत्र 1965 में ह्यूस विश्वविद्यालय पुस्तकालय के मुख्य निर्गम पटल से घर पर प्रयोग के लिये ली गई तथा नवीकृत कराई गई पुस्तकों की सख्या की प्रत्येक सप्ताह की दैनिक औसतों की प्रतिशतताएँ* ।

(प्रत्येक सप्ताह की दैनिक औसतों को सारणी 14.1 के अन्तिम स्तम्भ में दिखाया गया है ।)

सप्ताह प्रारम्भ	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार
फरवरी 8	101.6	114.2	110.3	112.1	92.2	69.6
फरवरी 15	96.1	107.9	94.1	112.7	89.0	100.1
फरवरी 22	133.4	125.2	108.1	93.8	67.5	71.3
मार्च 1	103.4	98.6	127.5	114.7	44.6	111.3
मार्च 8	124.0	114.2	100.7	106.3	87.3	67.6
मार्च 15	92.7	127.1	97.3	109.1	94.5	79.2
अप्रैल 5	90.7	106.4	147.3	93.5	89.5	72.6
अप्रैल 12	99.3	109.2	106.8	100.3	101.9	82.5
अप्रैल 19	105.3	123.6	108.8	114.4	85.2	62.9

* प्रत्येक पंक्ति की औसत 100.0 है ।

सारणी 14.1 के आंकड़ों पर आधारित ।

सारणी 14 3

वसन्त सत्र 1965 मे रूपसं विश्वविद्यालय पुस्तकालय के मुख्य निर्गम पटल से घर पर प्रयोग के लिये ली गई तथा नवीकृत कराई गई पुस्तकों की संख्या के, प्रत्येक सप्ताह के लिये दैनिक औसत की प्रतिशतताओं का प्रयोग करते हुए, अन्तःसप्ताह घटा-बढ़ी के सूचकांक का परिकलन

क्रम	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	वृहस्पति- वार	शुक्रवार	शनिवार	औसत
1	133 4	127 1	147 3	114 7	101 9	111 3	.
2	124 0	125 2	127 5	114 4	94 5	100 1	...
3	105 3	123 6	110 3	112 7	92 2	82 5	..
4	103 4	114 2	108 8	112 1	89 5	79 2	..
5	101 6	114 2	108 8	109 1	89 0	72 6	...
6	99 3	109 2	106 8	106 3	87 3	71 3	...
7	96 1	107 9	100 7	100 3	85 2	69.6	..
8	92 7	106 4	97 3	93 8	67 5	67 6	
9	90 7	98 6	94 7	93 5	44 6	62 9	..
मध्य के सत्र	103 2	114 4	108 6	107 0	85 5	77 6	99 6
सूचकांक माध्य का	103 6	114 9	109 1	107 5	86 9	78 0	100 0

सारणी 14 2 के आगे ।

मासिक आंकड़ों के ऋतुनिष्ठ सूचकांक

ऋतुनिष्ठ सूचकांक, एक श्रेणी की प्रती अन्तर्वर्षिक गति को दिखाते हुए, माधारणतया मासिक आंकड़ों पर आधारित होते हैं, किन्तु ऐसे सूचकांक को साप्ताहिक¹ आंकड़ों से बनाया जा सकता है । जबकि ऋतुनिष्ठ सूचकांक को दैनिक आंकड़ों से बनाया जा सकता था, तो भी सूचकांक द्वारा ऋतुनिष्ठ विचरणा को तथा अन्तर्मासिक एवं अन्तःसाप्ताहिक गतियों को प्रतिबिम्बित करने की सम्भावना होगी । इस पुस्तक में हम मासिक आंकड़ों से प्राप्त ऋतुनिष्ठ सूचकांकों पर ही अपना ध्यान एकाग्र कर रहे ।

ऋतुनिष्ठ सूचकांक का परिकलन प्रारम्भ करने से पूर्व, यह निश्चय कर लेना चाहिये कि श्रेणी में ऋतुनिष्ठ गति विद्यमान है । आकड़ा द्वारा प्रस्तुत विषय सामग्री के द्वारा अनुभव से यह स्पष्ट हो सकता है । सारणी 14 1 के पुस्तक-संचार आंकड़ों के सम्बन्ध में पुस्तकालय-अध्यक्षों को यह पता था कि अन्तर्मासिक विचरण विद्यमान थे, इसलिये

1 विधि का वर्णन मूल अंग्रेजी पुस्तक के प्रथम संस्करण के पृष्ठ 528—538 पर किया हुआ है ।

आंकड़ों का कोई प्रारम्भिक परीक्षण आवश्यक न था। इसी प्रकार, पाठक जानता है कि आइसक्रीम के उपभोग में, मैसोलीन के प्रयोग में, विभाग भण्डार विक्रय तथा विभिन्न अन्य श्रेणियों में ऋतुनिष्ठ विचरण विद्यमान रहत है। फिर भी सम्भव है कि अन्वेषक मर्वदा यह न जान पाए कि जिस श्रेणी में वह रुचि रखता है उसकी गति ऋतुनिष्ठ है या नहीं, और जब तक वह स्वयं आवश्यक नहीं हो जाता कि ऋतुनिष्ठ गति विद्यमान है, तब तक यह विचारणीय है कि वह बाद में वर्णन की जाने वाली विस्तृत गणनाओं को पूरा करे और अपने कार्य के एकदम अन्त में यह जान कि उसके सभी सूचकांक आंकड़े लगभग 100 0 थे।

यह जानने के लिये कि क्या श्रेणी में ऋतुनिष्ठ विद्यमान है, प्रायः आंकड़ों का वक्र खींचना, जैसा कि चार्ट 14 3 में अपेक्षाकृत हल्की रेखा या चार्ट 14 4 जैसा चार्ट बनाना पर्याप्त होगा। कुछ दृष्टान्तों में कच्चे आंकड़ों के चार्टों का परीक्षण करने से यह निश्चित करना कदाचित् सम्भव न हो कि ऋतुनिष्ठ गति विद्यमान है अथवा नहीं और 14 1 तथा 14 6 जैसे चार्टों को बनाने के लिए विश्लेषण के साथ बहुत आगे तक बढ़ना आवश्यक हो सकता है। इससे पहले कि निर्णय लिया जा सके, कभी कभी 15 2 जैसे चार्टों का निर्माण अवश्य कर लेना चाहिए।

उपनति की प्रतिशतताओं पर आधारित ऋतुनिष्ठ सूचकांक—यदि मासिक आंकड़ों की श्रेणी चिकित्सिक उपनति दर्शाती है तो पूर्व-वर्णित सरल विधियों में से किसी एक द्वारा परिकल्पित ऋतुनिष्ठ सूचकांक उपनति की दिशा पर निर्भर करते हुए ऊर्ध्वगामी या अधोगामी भूकाव रखेगा। इस प्रकार यदि उपनति ऊर्ध्वगामी तथा रेखिक होती तो प्रत्येक दिसम्बर पहले की जनवरी में वार्षिक विकास के $\frac{1}{12}$ भाग की मात्रा से ऊँचा होगा, चाहे कोई विशुद्ध ऋतुनिष्ठ गति उपस्थित न भी हो। इस तथ्य के कारण, ऋतुनिष्ठ सूचकांक, जिसमें केवल ऋतुनिष्ठ गतियों के प्रदर्शित होने की कल्पना है, ऊपर की ओर भूकेगा, और यदि यथावत् ऋतुनिष्ठ गति विद्यमान हो तो दिसम्बर सूचकांक जनवरी सूचकांक की तुलना में वार्षिक विकास के $\frac{1}{12}$ से बहुत अधिक ऊँचा होगा। यह अवश्य हो सकता है कि उपनति ऊर्ध्वगामी तथा रेखिक न हो। यह अधोगामी तथा रेखिक हो सकती है, जिस दशा में दिसम्बर एक बहुत अधिक निम्न होगा। यदि उपनति अरेखिक हो तो सारणी 14 1 या 14 3 के समान परिकल्पित ऋतुनिष्ठ सूचकांक पर इसके प्रभाव का वर्णन सुगमता से नहीं किया जा सकता, किन्तु प्रभाव उपस्थित रहता है और प्रायः अधिक होता है।

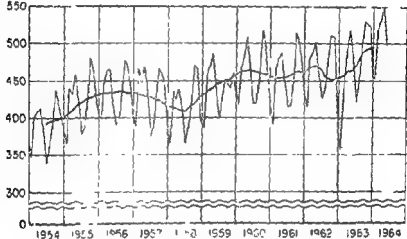
ऋतुनिष्ठ सूचकांक के परिकल्पन के लिये पहली वास्तविक उपयोगी प्रविधि का इस कठिनाई पर काबू पान के लिये निर्माण किया गया था और वह आंकड़ों के उपनति-प्रतिशत पर आधारित थी। इस विधि में, पहला पक्ष आंकड़ों के लिये उपनति समीकरण का निर्धारण करना तथा मासिक उपनति मानों को प्राप्त करना है। तत्पश्चात्, मूल मासिक आंकड़ों को मासिक उपनति मानों की प्रतिशतताओं के रूप में व्यक्त किया जाता है। इन प्रतिशतताओं को सारणी 14 3 जैसी सारणी में रख दिया जाता है किन्तु जिसमें, प्रत्येक मास के लिये एक के हिसाब से 12 स्तम्भ होते हैं। तब बारह मासिक माध्यिकाओं या सञ्शोधित माध्यों से ऋतुनिष्ठ सूचकांक प्राप्त किया जाता है, ठीक जिस प्रकार सारणी 14 3 की अन्तिम दो पंक्तियों में प्राप्त किया गया है।

उपजति-प्रतिगम विधि चक्रीय उत्तार-चढ़ावों के बाधक प्रभाव की उल्लेखा करती है। चक्रों की ऊँचाईया और निचाइया चार्ट 14.1 जैसे चार्ट में चरमता-विन्दुओं के रूप में दृष्टिगोचर होंगी, परन्तु उनमें छ की अपेक्षा बारह सरलियाँ होंगी। यह विधि औसत-प्रक्रिया पर निर्भर करती है, अर्थात् चक्रीय उत्तार-चढ़ावों के प्रभाव का निरसन करने के लिये, माध्यिका या संशोधित माध्यक प्रयोग पर निर्भर करती है। वर्तमान समय में, यह बहुत विस्तृत रूप से प्रयुक्त होने वाली विधि नहीं है, परन्तु इसका उपयोग उन श्रेणिओं में किया जा सकता है जिनमें चक्रीय गतियाँ हों जो ऋतुनिष्ठ गतियों की तुलना में महत्वहीन हैं।

छोटे 2m

हजारों में

550

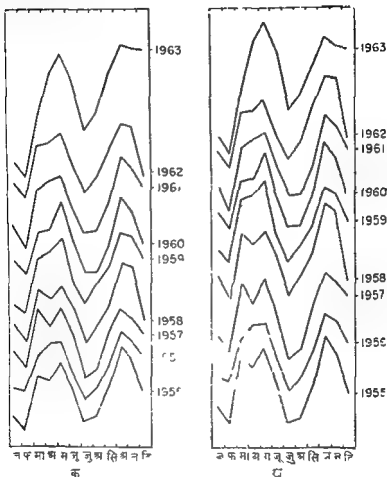


चार्ट 14.3 समुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशकों द्वारा जनवरी 1954--दिसम्बर 1964 में समाचारपत्रीय, कागज का उपभोग तथा बारह-माम की केन्द्रित गतिशील औसत। कार्तीय 14.5 के अनुरूप।

केन्द्रित 12 मास गतिशील औसतों की प्रतिप्रतताएँ—जिन आंकड़ों का उपयोग हम एक ऋतुनिष्ठ सूचकांक के निर्धारण के वर्णन में करेंगे जो वर्षानुवर्ष नहीं बदलता उनका सम्बन्ध समुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशकों द्वारा समाचारपत्रीय कागज के उपभोग में होगा। चार्ट 14.3 और 14.4 इस बात की स्पष्ट करते हैं कि ऋतुनिष्ठ गति उपस्थित है और वह वर्षानुवर्ष लगभग समान है। चार्ट 14.4 को एक "वर्ष पर वर्ष" चार्ट का नाम दिया जा सकता है क्योंकि प्रत्येक वर्ष की स्पेसिफिक में पिछले वर्ष के ऊपर रखा गया है, प्रत्येक वर्ष के लिये एक उभरी ऊर्ध्वोर्ध्व पैमाने पर, परन्तु धिमे स्तर पर, आरेखिक किया गया है।

समानारणत्रीय कामज-उपभोग के आंकड़ों का केंचेंडर विवरण के लिये समजित नहीं किया गया है। यह समजन न करने का कारण यह है कि प्रकाशित आंकड़े इस प्रकार समजित नहीं हैं। यदि केंचेंडर दिवसों के लिए समजित आंकड़ों से ऋतुनिष्ठ सूचकांक बनाना होता तो सभी मासिक अंकों, जिनमें वे भी सम्मिलित हैं जो नवीन दिखाई देने हैं, का समजन करना पड़ता पूर्व दसने कि उन्नी प्रकृति ऋतुनिष्ठ गति से तुलना की जा सकती। इस प्रकार के आंकड़ों का प्रयोग करने वाले प्रायः प्रतिदिन के अंकों की अपेक्षा मासिक अंकों में अधिक रुचि रखते हैं कई बार मास की सम्प्राप्ति के बारे में प्रकार सोचा

जाता है, जैसेकि वह प्रत्यक्ष ऋतुनिष्ठ विचरण के प्रति अपना भाग अदा कर रही हो। ऋतुनिष्ठ विचरण के सूचकांक के परिकलन की प्रविधि वही है चाहे केन्द्रीय विचरण के लिये आंकड़ों का समजन किया गया हो अथवा नहीं।



चार्ट 14.4. वर्ष पर-वर्ष चार्ट (क) समाचारपत्रीय कागज के उपभोग तथा (ख) बारह-मास गतिशील औसत की प्रतिशतता 1954-1963, के वर्ष पर-वर्ष-चार्ट। सारणी 14.5 के आंकड़े। चार्ट के प्रत्येक भाग में, प्रत्येक वर्ष के वक्र को छह पहले वक्र के ऊपर रखा गया है। नौ वक्रों में से प्रत्येक के लिए समान ऊर्ध्वाधर पैमाने के प्रयोग से, किन्तु आवश्यकतानुसार पैमाने को घटा-बढ़ा कर, रखा गया है।

12-मास-गतिशील-औसत-प्रतिशतता विधि, जिमका सकेत साधारणतया केवल गतिशील-औसत-की-प्रतिशतता विधि (या केवल गतिशील-औसत-विधि) के रूप में किया जाता है, का आजकल विस्तृत रूप से प्रयोग होता है। यह उपनति-की-प्रतिशतता विधि से केवल इस दृष्टि से भिन्न है कि मूल आंकड़ों को उपनति की प्रतिशतताओं की अपेक्षा गतिशील औसत की प्रतिशतताओं में व्यक्त किया जाता है। केन्द्रित 12-मास गतिशील औसत का परिकलन करने में उपनति मानों के निर्धारण की अपेक्षा अधिक काम करना पड़ता है, पर

इससे प्राप्त ऋतुनिष्ठ सूचकांक अपेक्षाकृत उत्तम होता है क्योंकि गतिशील औसत उपनति और वचनीय गतियो दोनों का पर्याप्त अन्तरा आकलन है।

एक 12 मास गतिशील औसत औसतों की एक श्रेणी है जो पहले एक श्रेणी के प्रथम 12 मासों को स्वीकार करती है तथापिन्त दूसरे से तेरहवें महीने, फिर तीसरे से चौदहवें महीने, इत्यादि। अधिक यथाय होने के लिये आइये हम मारग्री 14.4 में दिखाए

सारणी 14.4

संयुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशकों द्वारा जनवरी 1954 से जून 1964 तक

उपभोग किये गए समाचारपत्रों का मास के कन्दित 12 मास

गतिशील औसत का परिकलन

वर्ष तथा मास (1)	उपभोग (छोटे टन मह्वों में) (2)	12 मास गतिशील योग (3)	12 मास गतिशील औसत स्तम्भ 5-12 (4)	2 मास गतिशील योग (5)	कन्दित 12 मास गतिशील औसत स्तम्भ 5-2 (6)
1954					
जनवरी	363				
फरवरी	346				
मार्च	400				
अप्रैल	415				
मई	422				
जून	384	4 683	390 25		
जुलाई	339	4 704	392 00	782 25	391 1
अगस्त	361	4 723	393 58	785 58	392 8
सितम्बर	388	4 762	396 83	790 41	395 2
अक्तूबर	437	4 779	398 25	795 08	397 5
नवम्बर	420	4 812	401 00	799 25	399 6
दिसम्बर	408	4 850	404 17	805 17	402 6
1955					
जनवरी	384	4 889	407 42	811 59	405 8
फरवरी	365	4 913	409 42	816 84	408 4
मार्च	439	4 950	412 50	821 92	411 0
अप्रैल	432	4 992	416 00	828 50	414 3
मई	455	5 034	419 50	835 50	417 8
जून	472	5 045	420 42	839 92	420 0
जुलाई	378	5 063	421 92	842 34	421 0
अगस्त	385	5 096	424 67	846 59	423 3
सितम्बर	425	5 103	425 25	849 92	425 0
अक्तूबर	479	5 133	427 75	853 00	426 5
नवम्बर	462	5 142	428 50	856 25	428 1
दिसम्बर	419	5 142	428 50	857 00	428 5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1963					
जनवरी	376	5 460	455 00		454 9
फरवरी	356	5,458	454 83	909 83	454 9
मार्च	435	5 459	454 92	909 75	455 4
अप्रैल	490	5 470	455 83	910 75	4 56 6
मई	516	5 488	457 33	913 16	458 0
जून	483	5 504	458 67	916 00	462 0
जुलाई	421	5 585	465 42	924 09	468 7
अगस्त	443	5 664	472 00	937 42	476 0
सितम्बर	490	5 760	480 00	952 00	483 5
अक्टूबर	529	5 843	486 92	966 92	488 5
नवम्बर	524	5 881	490 08	977 00	491 5
दिसम्बर	522	5 915	492 92	983 00	493 5
		5 928	494 00	986 92	
1964					
जनवरी	455				
फरवरी	452				
मार्च	518				
अप्रैल	528				
मई	550				
जून	496				

बाकू सख आफ करेन विजनेस के विभिन्न अंशों से ।

गए संयुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशकों द्वारा उपभोग किय गए मसबारापत्रीय कागज के आकड़ों का विचार कर । 12 मास गतिशील औसत के लिय प्रथम अंक पहले 12 मास जनवरी 1954-दिसम्बर 1954 की औसत है । सारणी क चौथे स्तम्भ में यह 390 25 दीया पड़ता है । ध्यान दीजिय कि 12 मास काल जनवरी दिसम्बर 1954 की औसत होन के कारण यह अंक जून और जुलाई 1954 के मध्य केन्द्रित है । दूसरी गतिशील औसत अंक 392 00 फरवरी 1954 जनवरी 1955 के समय को नेता है तथा जुलाई और अगस्त 1954 के बीच केन्द्रित है । सारणी 14 4 के स्तम्भ 4 म प्रत्येक अंक उन छ मूल अंकों का समानांतर माध्य है जो उसके आग आग चलते हैं और छ मूल अंक जो इसके पीछे चलते हैं ।

क्योंकि अतः सारणी 14 4 के 4 स्तम्भ में महीनों के प्रत्येक युग्म के मध्य में आते हैं जबकि मूल आंक स्तम्भ 2 म कने डर मासों के लिय है और प्रत्येक महीने के मध्य में केन्द्रित है अतः गतिशील औसतों का समजन करना आवश्यक है ताकि वे मूल आंकड़ों के साथ चल सक । इस क्रम को केन्द्रित करना कहते हैं और इसमें 12 मास

2 कुछ सांख्यिकीय 12 मास गतिशील औसत को केन्द्रित करने के लक्ष्य में नहीं पड़ने बल्कि प्रत्येक 12 मास की औसत सालाना आम के सामने स्वेच्छ से यह सोचने हुए रख देने हैं कि शब्दों की हानि की दृष्टिपूर्ति से अधिक लाभ समय की बचत से हो जाता है । यदि केन्द्रित 12 मास गतिशील औसत का आदामी पष्ठों पर वर्णन तथा सारणी 14 5 में दिखाई गई विधि से परिकल्पन किया जाता है और यदि गतिशील औसतों को प्राप्त करने के लिये बाकू का प्रयोग किया जाता है (देखिये एफ० ई० क्रावस्टन तथा

गतिशील-श्रीमतो की एक द्वि-मास गतिशील-श्रीमत् का परिकलन करना आता है। सारणी 14.4 के स्तम्भ 5 और 6 यह दिखाते हैं कि यह किस प्रकार किया जाता है। परिणाम है, गतिशील-श्रीमतो की श्रेणी जोकि उचित रूप से केन्द्रित है तथा जुलाई 1954 से प्रारम्भ होती है। इन गतिशील श्रीमतो को चार्ट 14.3 में आरेखित किया गया है।

चार्ट 14.3 से यह स्पष्ट है कि केन्द्रित गतिशील-श्रीमत् एक किसी पर्याप्त मात्रा में, न तो ऋतुनिष्ठ गति को प्रत्यावर्तित करते हैं और न ही अनियमित गतियों को। चार्ट 14.3 से यह इतना स्पष्ट नहीं है कि गतिशील श्रीमत् सन्निकट संयुक्त उपनति तथा चक्रीय प्रतिरूप का अनुसरण करती है, क्योंकि विचाराधीन समय में समाचारपत्रीय कागज के उपभोग की श्रेणी में तनिक भी चक्रीय गति नहीं है। एक केन्द्रित 12-मास गतिशील श्रीमत् वास्तव में सन्निकट उपनति और चक्रीय गतियों का वर्णन प्रवर्ण्य करती है यह बात चार्ट 15.1 में भी प्रेक्षित की जा सकती है।

समाचारपत्रीय कागज उपभोग के ऋतुनिष्ठ सूचकांक का परिकलन प्रारम्भ करने से पूर्व यह अच्छा होगा कि सारणी 14.4 को एक बार फिर देखें और यह ध्यान दें कि उस सारणी में प्रदर्शित प्रविधियाँ आवश्यकता से अधिक परिश्रम-साध्य हैं। हमें स्तम्भ 4 की गतिशील-श्रीमत् का परिकलन करने की आवश्यकता नहीं। इसके स्थान पर हम स्तम्भ 3 के श्रीमत् का द्वि-मास गतिशील योग परिकलन कर सकते हैं और फिर ठीक वही श्रीमत् जो सारणी 14.4 के स्तम्भ 6 में दिखाए गए हैं प्राप्त करने के लिए उन योगों में से प्रत्येक को 24 से भाग दे सकते हैं। तथापि एक और भी अधिक सिद्ध प्रविधि है जो हम काम में लाएंगे। जुलाई 1954 की केन्द्रित गतिशील श्रीमत् पर विचार कीजिए। जनवरी 1954 के मान, फरवरी 1954 के मान के दुगुने दिसम्बर 1954 तक आगामी मासों में से प्रत्येक के मान के दुगुने, तथा जनवरी 1955 के मान का योग कर के तथा इस योग को 24 से भाग देकर, यह श्रीमत् प्राप्त किया गया था। इसी प्रकार फरवरी 1954 के मान, अगले 11 मासों में से प्रत्येक के दुगुने, तथा फरवरी 1955 के मान के योग को 24 से भाग करने का परिणाम अगस्त 1954 की श्रीमत् है। दूसरे शब्दों में, केन्द्रित 12-मास गतिशील श्रीमत् का परिकलन करने के लिए जो कुछ हमने वास्तव में किया है वह है, 13-मास गतिशील श्रीमत् का 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1 से भारित महीनों के साथ परिकलन।

एस. क्वेन द्वारा लिखित बर्कवुक इन ऐंगलाइड जनरल स्टैटिस्टिकस, पंचम संस्करण, प्रेन्टिस हॉल, इन्क., एंगलवुड क्लिफ, एन. जे., (1967), तो केन्द्रित 12 मास गतिशील श्रीमत् को लगभग उतनी ही प्रतीति से प्राप्त किया जा सकता है जितना अकेन्द्रित 12 मास गतिशील श्रीमत् को।

3 जब श्रेणी अधिक चक्रीय गतियाँ प्रदर्शित करती है तो केन्द्रित 12 मास गतिशील श्रीमत् चक्रीय व्यापार शिफारों में पर्याप्त ऊँचा या चक्रीय गतियों में पर्याप्त नीचा न जाए यह हो सकता है। यह स्पष्ट होगा चाहिए कि ऐसा क्यों है, क्योंकि जब केन्द्रित 12-मास गतिशील श्रीमत् चक्रीय वक्र बिन्दु पर केन्द्रित हो तो श्रीमत् न केवल बीच के महीने के मान द्वारा प्रभावित होगी अपितु छ पिछले तथा छ आगामी महीनों द्वारा भी प्रभावित होगी। जिसमें से सबसे या अधिकांश के मान बीच के महीने के मान में कम होंगे। जब गतिशील-श्रीमत् चक्रीय निम्न बिन्दु पर केन्द्रित हो तो इसके विपरीत बात संभव होगी। उपर्युक्त कारणों से संपूर्ण उपनति तथा चक्रीय बनियाँ हैं जिसे श्रेष्ठतर जाँचन समझा जाता है उस प्राप्त करने के लिए कुछ सांख्यिकीविद प्रायः स्वयन्मूल्यांकन में श्रीमत् बच पर मूल मानों को प्रतिशतताओं के रूप में व्यक्त किया जाता है।

सारणी 14 5 में भारत 13-मास गतिशील योग तथा 12-मास केन्द्रित गतिशील-औसत का परिकलन दिखाया गया है। प्रविधि निम्न प्रकार है :

सारणी 14 5

संयुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशको द्वारा, जनवरी 1954—जून 1964 में समाचार-पत्रों कागज उपभोग की गतिशील-औसत की प्रतिशतताओं तथा केन्द्रित 12-मास गतिशील-औसत का परिकलन करने की लघु विधि

वर्ष तथा मास	उपभोग (छोटे टन हजारों में)	13-मास गतिशील योग भारत 1, 2, 2, ... 2, 2, 1	केन्द्रित 12 मास गतिशील औसत स्तम्भ 3 ÷ 24	12-मास गतिशील-औसत का प्रतिशत स्तम्भ 2 ÷ 4
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1954				
जनवरी	363
फरवरी	346
मार्च	400
अप्रैल	415
मई	422
जून	384
जुलाई	339	9,387✓	391.1	86.7
अगस्त	361	9,427	392.8	91.9
सितम्बर	388	9,485	395.2	98.2
अक्तूबर	437	9,541	397.5	109.9
नवम्बर	420	9,591	399.6	105.1
दिसम्बर	408	9,662	402.6	101.3
1955				
जनवरी	384	9,739	405.8	94.6
फरवरी	365	9,802	408.4	89.4
मार्च	439	9,863	411.0	106.8
अप्रैल	432	9,942	414.3	104.3
मई	455	10,026	417.8	108.9
जून	422	10,079	420.0	100.5
जुलाई	378	10,108✓	421.2	89.7
अगस्त	385	10,159	423.3	91.0
सितम्बर	425	10,199	425.0	100.0
अक्तूबर	479	10,236	426.5	112.3
नवम्बर	462	10,275	428.1	107.9
दिसम्बर	419	10,284	428.5	97.8
1956				
जनवरी	402	10,295	429.0	93.7
फरवरी	398	10,324	430.2	92.5
मार्च	446	10,352	431.3	103.4
अप्रैल	462	10,360	431.7	107.0

सारणी 145 (वित्त)

वर्ष तथा मास	उपभोग (लोट टन द्वारा म)	13 मास गतिशील योग भारित 1 2 2 2 2 1	वैद्विल 12 मास गतिशील औसत स्तम्भ १-24	12 मास गतिशील औसत का प्रतिशत स्तम्भ (१-4)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
मई	464	10 364	431 8	107 5
जून	422	10 395	433 1	97 4
जुलाई	389	10 426✓	434 4	89 5
अगस्त	403	10 421	434 2	92 8
सितम्बर	435	10 427	434 5	100 1
अक्तूबर	477	10 424	434 3	109 8
नवम्बर	468	10 406	433 6	107 9
दिसम्बर	444	10 420	434 2	102 3
1957				
जनवरी	408	10 417	434 0	94 0
फरवरी	387	10 385	432 7	89 4
मार्च	463	10 367	432 0	107 2
अप्रैल	442	10 354	431 4	102 5
मई	466	10 327	430 3	108 3
जून	434	10 304	429 3	101 1
जुलाई	374	10 274✓	428 1	87 4
अगस्त	386	10 230	426 3	90 5
सितम्बर	434	10 179	424 1	102 3
अक्तूबर	465	10 131	421 1	110 2
नवम्बर	453	10 084	420 2	107 8
दिसम्बर	436	10 031	418 0	104 3
1958				
जनवरी	366	9 997	416 5	92 7
फरवरी	365	9,990	416 3	87 7
मार्च	434	9,971	415 5	104 5
अप्रैल	423	9 955	414 8	102 0
मई	438	9 972	415 5	105 4
जून	409	9 942	414 3	98 7
जुलाई	365	9,909✓	412 9	88 4
अगस्त	388	9,938	414 1	93 1
सितम्बर	413	9,982	415 9	99 3
अक्तूबर	470	10 050	418 8	112 2
नवम्बर	465	10 140	412 5	110 1
दिसम्बर	394	10,206	425 3	92 6

सारणी 14 5 (वित्त)

वर्ष तथा मास (1)	उपभोग (छोट टन हजारों में) (2)	13 मास गतिशील योग भारत 1 2, 2 2 2, 1 (3)	केन्द्रित 12 मास गतिशील औसत स्तम्भ 3-24 (4)	12 मास गति शील औसत का प्रतिशत (स्तम्भ 2-4) (5)
1959				
जनवरी	395	10 261	427 5	92 4
फरवरी	385	10 331	430 5	89 4
मार्च	458	10 402	433 4	105 7
अप्रैल	467	10 460	435 8	107 2
मई	484	10 505	437 7	110 6
जून	429	10 593	441 4	97 2
जुलाई	400	10 695 ✓	445 6	89 1
अगस्त	423	10 763	448 5	94 3
सितम्बर	449	10 806	450 3	99 7
अक्तूबर	492	10 828	451 2	109 0
नवम्बर	488	10 864	452 7	107 8
दिसम्बर	459	10 923	455 1	100 9
1960				
जनवरी	432	0 976	457 3	94 5
फरवरी	416	10 993	458 0	90 8
मार्च	470	10 995	458 1	102 6
अप्रैल	477	11 025	459 4	103 8
मई	510	11 059	460 8	110 7
जून	462	11 066	461 1	100 2
जुलाई	420	11 054 ✓	460 6	91 2
अगस्त	420	11 020	459 2	91 5
सितम्बर	454	10 995	458 1	99 1
अक्तूबर	517	10 996	458 2	112 8
नवम्बर	497	10 974	457 3	108 7
दिसम्बर	457	10 935	455 6	100 3
1961				
जनवरी	422	10 913	454 7	92 8
फरवरी	392	10 903	454 3	86 0
मार्च	469	10 897	454 0	103 3
अप्रैल	479	10 889	453 7	105 6
मई	486	10 886	453 6	107 1
जून	447	10 904	454 3	98 4
जुलाई	413	10 932 ✓	455 5	90 7
अगस्त	417	10 967	457 0	91 2
सितम्बर	451	11 002	458 4	98 4

सारणी 14 5 समाप्त

वर्ष तथा मास	उपभोग (कोटि रुपय हजारों में)	13 मास गतिशील योग भारत 1 2 3 4 5	केन्द्रित 12 मास गतिशील औसत स्तम्भ 3-4 (4)	13 मास गति शील औसत का प्रतिशत (स्तम्भ 2-4) (5)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
अक्टूबर	517	11 072	459 3	111 5
नवम्बर	499	11 043	460 1	108 5
दिसम्बर	473	11 066	461 1	102 6
1967				
जनवरी	434	11 086	461 9	94 0
फरवरी	415	11 171	463 4	89 6
मार्च	481	11 174	465 6	103 3
अप्रैल	487	11 201	466 7	104 3
मई	499	11 709	467 0	106 9
जून	457	11 186	466 1	98 0
जुलाई	423	11 096✓	462 3	91 5
अगस्त	447	10 979	457 5	96 6
सितम्बर	479	10 874	453 1	105 7
अक्टूबर	511	10 8 1	451 3	113 2
नवम्बर	508	10 851	452 1	112 4
दिसम्बर	441	10 894	453 9	97 2
1963				
जनवरी	376	10 918	454 9	82 7
फरवरी	356	10 917	454 9	78 3
मार्च	435	10 979	455 4	95 5
अप्रैल	490	10 958	456 6	107 3
मई	516	10 992	458 0	112 7
जून	483	11 089	462 0	104 5
जुलाई	471	11 249✓	468 7	89 8
अगस्त	445	11 474	476 0	93 1
सितम्बर	490	11 603	483 5	101 3
अक्टूबर	529	11 724	488 5	108 3
नवम्बर	574	11 796	491 5	106 6
दिसम्बर	522	11 843✓	493 5	105 8
1964				
जनवरी	455			
फरवरी	457			
मार्च	518			
अप्रैल	528			
मई	550			
जून	496			

9	387.5
	363-
	346-
	384
	365
9	427.5
	346-
	400-
	365
	439
9	485.5
	400-
	415-
	439
	432
9	541.5
	415-
	422-
	432
	455
9	591.5
	422-
	384-
	455
	422
9	662.5
	384-
	339-
	422
	378
9	729.5
	339-
	361-
	378
	385
9	802.5
	361-
	388
	385
	425
9	863.5
	388
	437-
	425
	479
9	942.5
	437-
	425
	479
	462
10	026.5
	420-
	408-
	462
	419
10	079.5
	408
	384-
	419
	402
10	108.5
	384-
	365-
	402
	378
10	159.5

1 योग करने वाली मशीन का उपयोग करते हुए प्रत्येक वर्ष की जुलाई के भारित 13-मास गतिशील योग का तथा अन्तिम गतिशील योग का, जो सारणी 14.5 में दिसम्बर 1963 के लिए है, परिकलन करो। प्रत्येक जुलाई के योग में पिछली जनवरी से लेकर आगामी जनवरी तक के मान सम्मिलित होंगे। 1963 दिसम्बर के योग में जून 1963 से जून 1964 तक के मान सम्मिलित होंगे। ये मान सारणी 14.5 के स्तम्भ 3 में प्रविष्ट हैं तथा पृष्ठ 2 में प्राप्त किये जाने वाले गतिशील योगफल के लिए पड़ताल मूल्यों के रूप में कार्य करते हैं।

2 योग करने वाली मशीन¹, जो घटाव करेगी, का प्रयोग करते हुए जुलाई 1954 के भारित गतिशील योग को ला। जनवरी और फरवरी 1954 के मूल्यों को घटाओ, जनवरी और फरवरी 1955 के मानों को जोड़ो और फिर योग लो। यह योग अगस्त 1954 का भारित गतिशील योग है। तत्पश्चात् फरवरी और मार्च 1954 के मूल्यों को घटाओ और फरवरी तथा मार्च 1955 के मूल्यों को जोड़ो और योग करो यह दूसरा उप-योग दिसम्बर 1954 का मूल्य है। दो मूल्यों को घटाने, दो मूल्यों को जोड़ने, और उनका उप-योग करने का क्रम निरन्तर चालू रखो जैसा कि जोड़ करने वाली मशीन के फीते के एक भाग के साथ वाले पुनरुत्पादन में दिखाया गया है। जब जुलाई 1955 का उप-योग प्राप्त कर लिया जाए, तो इसे पूर्व प्राप्त अंक के अनुकूल होमा चाहिए। सारणी 14.5 के स्तम्भ 3 में पड़ताल चिह्नों द्वारा जुलाई के सभी तथा दिसम्बर 1963 के अंकों के अन्वय का संकेत किया गया है।

3 सारणी 14.5 के स्तम्भ 3 में प्रत्येक अंक को 24 से भाग देकर केन्द्रित गतिशील-औसत का परिकलन करो। 24 के व्युत्क्रम को (जो 0.04166667 है) गणना क्रम-यंत्र के चाबी पट्ट में रख कर तथा सारणी 14.5 के स्तम्भ 3 में प्रदर्शित मूल्यों से गुणा करके विभाजन बहुत शीघ्रता से सम्पन्न किया जा सकता है। गुणा के मध्य मशीन को साफ करने की आवश्यकता नहीं, क्योंकि आगामी गुणनफल को प्राप्त करने के लिए गुणक को केवल बढ़ाने अथवा घटाने की आवश्यकता पड़ती है। यदि

4 यदि योग पत्र घटाव दण्डिका के साथ प्राप्य न हो तो परिकलन यह का उपयोग किया जा सकता है। जोड़ की ऐसी मशीन के द्वारा जिसमें घटाव दण्डिका नहीं है सख्या के पूरक को जोड़ कर घटाव करना सम्भव है

है (उदाहरण के लिए एक आठ स्तम्भ वाली योग करने वाली मशीन पर 99999724 को 276 के पूरक के रूप में प्रविष्ट किया जाएगा)। तो भी पृष्ठ 2, में पूरक जोड़ने की सिफारिश वहीं की गई है, क्योंकि यत्रचासक से बहुत अशुद्धियाँ होने की सम्भावना है।

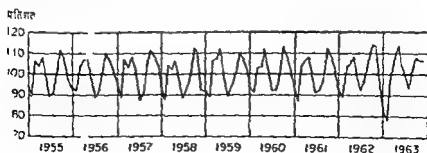
स्वचालित गुणनप्रक्रिया वाले पम्पिंगन यंत्र का प्रयोग किया जाए तो सम्भवतः दूसरे को प्रारम्भ करने से पूर्व कदाचित् प्रत्येक पहले गुणन के परिणाम को साफ करना अभिमान्य होगा; सभी गुणनों के लिए मशीन में 0 04166667 को रखे रहना चाहिए। परिणाम सारणी 14.5 के स्तम्भ 4 में दिखाए गए हैं।

ऋतुनिष्ठ सूचकांक के परिकलन में अगला चरण प्रत्येक मूल मान को सगत कन्दित गतिशील-औसत की प्रतिशतता के रूप में अभिव्यक्त करने में निहित है। इस पग के परिणाम सारणी 14.5 के स्तम्भ 5 तथा चार्ट 14.5 में दिखाए गए हैं। इस प्रविधि का तर्क इस प्रकार है. काल-श्रेणियाँ $T \times C \times S \times I$ उपनि \times चक्र \times ऋतुनिष्ठ \times अनियमित) में बनी हुई कल्पित की जाती है। 12-मास गतिशील औसत $T \times C$ का स्थूल आकलन है क्योंकि 12-मास औसत ऋतुनिष्ठ गतियों को और, अधिकतर, अनियमित गतियों को आसान कर देती है क्योंकि बाद वाली गतियाँ प्रायः थोड़े परिमर तथा नष्ट अवधि वाली होती हैं। यदि अब हम मूल आँकड़ों को 12-मास गतिशील औसत में विभक्त कर दें तो हमें ऋतुनिष्ठ तथा अनियमित गतियों का संयुक्त आकलन प्राप्त हो जाता है

$$\frac{T \times C \times S \times I}{T \times C} = S \times I$$

चार्ट 14.5 बहुत स्पष्ट रूप में ऋतुनिष्ठ गति की विद्यमानता को प्रदर्शित करता है जो वर्षानुवर्ष लगभग एक-ही दिखाई देती है। यह पूर्णतया एक-सी नहीं है, क्योंकि वसन्त शिखर प्रायः मई में होता है परन्तु कभी-कभी अप्रैल में, पतम्भ शिखर और भी अक्टूबर में आता है, परन्तु कभी-कभी नवम्बर भी लगभग उतना ही उच्च होता है।

इन बिन्दु से आगे, प्रविधि पुस्तकालय प्रचलन आँकड़ों को प्रतिशतता के रूप में अभिव्यक्त करने के प्रयोग में लायी गयी प्रविधि के समान्तर हो जाती है। तथापि हम प्रथम सारणी 14.6 बनाते हैं जो गतिशील औसत के प्रतिशत आँकड़ों को ऐसे रूप में प्रस्तुत करती है जो कि सरणियों के निर्माण में सहायता करते हैं, जो सारणी 14.7 में दिखाई गई हैं। देखिये, केवल वे ही वर्ष सारणी 14.6 और 14.7 में सम्मिलित किए गए हैं जिनकी गतिशील-औसत को 12 प्रतिशत अंक प्राप्त थे।



चार्ट 14.5 संयुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशकों द्वारा 1955—1963 में समाचारपत्रों कागज के उपयोग को केन्द्रित 12-मास गतिशील औसत की प्रतिशतनाएँ। सारणी 14.5 या 14.6 के आँकड़े।

सारणी 146

1955-63 में संयुक्त राज्य अमेरिका के प्रकाशकों द्वारा समाचारपत्रीय कागज के उपयोग की कीमत 12 मास गतिशील औसतों की प्रतिशतताएं

वर्ष	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्तूबर	नवम्बर	दिसम्बर
1955	94.6	89.4	106.8	104.3	108.9	100.5	89.7	91.0	100.0	112.3	107.9	97.8
1956	93.7	92.5	103.4	101.0	107.5	97.4	89.5	92.8	100.1	109.8	107.9	102.3
1957	94.0	89.4	107.2	102.5	108.3	101.1	87.4	90.5	102.3	110.2	107.8	104.3
1958	92.7	87.7	104.5	102.0	105.4	98.7	88.4	93.7	99.3	112.2	110.1	92.6
1959	92.4	89.4	105.7	107.2	110.6	97.2	89.8	94.3	99.7	109.0	107.8	100.9
1960	94.5	90.8	102.6	103.8	110.7	100.2	91.2	91.5	99.1	112.8	108.7	100.3
1961	92.8	86.3	103.3	105.6	107.1	98.4	90.7	91.2	98.4	111.5	108.5	102.6
1962	94.0	89.6	103.3	104.3	106.9	98.0	91.5	96.6	105.7	113.2	112.4	97.2
1963	82.7	78.3	95.5	107.3	112.7	104.5	89.8	93.1	101.3	108.3	106.6	105.8

स्रोत: सारणी 14.5 से।

सारणी 147

1955-63 में समुद्र राज्य शरीरों के प्रकाशको द्वारा समावायवीय कागज के उपयोग के कृतिमिष्ट सूचकांक का परिवर्तन तथा की इत 12 मास गतिशील प्रीसतो की प्रतिशतताओं की सरणीय

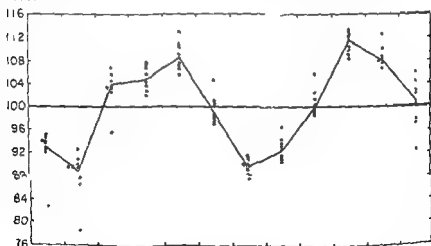
गद (या गति रा विराम)	जन्म	परवर्ती	माचं	अमेल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्तूबर	नवम्बर	दिसम्बर	माध्य
1	94.6	92.5	107.2	107.3	112.7	104.5	91.5	96.6	105.7	113.2	112.4	105.8	—
2	94.5	90.8	106.8	107.2	110.7	101.1	91.2	94.3	102.3	112.8	110.1	104.3	—
3	94.0	89.6	105.7	107.0	110.6	100.5	90.7	93.7	101.3	112.3	108.7	102.6	—
4	94.0	89.4	104.5	105.6	108.9	100.2	89.8	93.1	100.1	112.2	108.5	102.3	—
5	93.7	89.4	103.4	104.3	108.3	98.7	89.8	92.8	100.0	111.5	107.9	100.9	—
6	92.8	89.4	103.3	104.3	107.5	98.4	89.7	91.5	99.7	110.2	107.9	100.3	—
7	92.7	87.7	103.3	103.8	107.1	98.0	89.5	91.2	99.3	109.8	107.8	97.8	—
8	92.4	86.3	102.6	102.5	106.9	97.4	88.4	91.0	99.1	109.0	107.8	97.2	—
9	82.7	78.3	95.5	102.0	105.4	97.2	87.4	90.5	98.4	108.3	106.6	92.6	—
10 मध्य मास या योग	654.1	622.6	729.6	734.7	760.0	694.3	629.1	647.6	701.8	777.8	758.7	705.4	—
11 मध्य मास या माध्य	93.4	88.9	104.2	105.0	108.6	99.2	99.9	92.5	100.3	111.1	108.4	100.8	100.2
12 कृतिमिष्ट सूचकांक	93.2	88.7	104.0	104.8	108.4	99.0	89.7	92.3	100.1	110.9	108.2	100.6	100.0

*वर्ष 11 की प्रत्येक मद को 100.2 से विभक्त तथा 100 से गुणा किया गया है। प्रत्येक रूप से, प्रत्येक मद को कृतिमिष्ट सूचकांक (1 × 100.2) 100 = 0.998004 से गुणा किया जा सकता है। कृतिमिष्ट सूचकांक 11.6 से।

मासिक सरणियों की एक सरणी बनाने के पश्चात्, चार्ट 14.6 जैसा एक चार्ट बनाना चाहिए। मासो की औसत निकालने में केन्द्रीय उपमति की कौनसी विधि अपनायी जाए इसका निर्णय करने के लिए मासिक सरणियों का चार्ट प्रायः उपयोगी और सहायक होता है, इनके प्रतिरिक्त यह ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप का सामान्य संकेत करता है।

कौनसी मद्दों का निरसन करना है, इसका निर्णय करने के दो ढंग हैं। पहला ढंग है चार्ट 14.6 की प्रत्येक सरणी पर अलग अलग विचार करना तथा उन मद्दों का निरसन करना जो अमावारणतया ऊँची या नीची दिखाई देती हैं, कदाचित् प्रत्येक दीर्घ विचलन का एक-एक करके अध्ययन करन हुए तथा उनका उन्मूलन करते हुए जिनके लिए विशेष परिस्थिति ज्ञात की जा सकती है। यदि इस ढंग पर चला जाना है तो एक सरणी सभी मद्दों की औसत का प्रयोग कर सकती है, दूसरी माध्यिका का प्रयोग कर सकती है, तीसरी केन्द्रीय पाँच मद्दों का, चौथी, उच्चतम दो के प्रतिरिक्त सभी मद्दों का, तथा इसी प्रकार आगे। विधि की अत्यधिक आत्मपरकता के कारण, जब तक सांख्यिकीविद् के पास उच्च प्रकार की शिक्षा तथा निर्णय शक्ति न हो, यह भयानक है। एक वैकल्पिक विधि जिसका सम्भवतः पर्याप्त प्रयोग किया जाता है, प्रत्येक मास के इसी प्रकार के संशोधित माध्य का परिकलन करने में निहित है। उपयुक्त संशोधित माध्य के चयन के लिए साधारण रूप से प्रयुक्त कोई नियम स्थापित नहीं किया जा सकता, अपितु एक उच्चतम मान तथा एक निम्नतम मान अथवा दो उच्चतम तथा दो निम्नतम मानों का परिधान प्रायः सतोपजनक पाया जाएगा। जिन मद्दों का परिधान करना है उनकी सख्या आंशिक रूप से श्रेणी में सम्मिलित चक्रों की संख्या पर निर्भर करती है, जितनी अधिक सख्या में चक्रीय ऊँचाइयाँ और निचाइयाँ गतिशील औसत की प्रतिबलताओं में प्रत्यावर्तित होगी (क्योंकि उनको गतिशील

गतिशील



चार्ट 14.6 1955-1963 में संयुक्त राज्य अमेरिका के प्रकाशकों के समाचार-पत्रों का गज उपभोग के ऋतुनिष्ठ सूचकांक तथा गतिशील-औसत की सरणीकृत प्रति-शतताएँ। सरणी 14.7 के आकड़े ऋतुनिष्ठ सूचकांक के परिवर्तन के उद्देश्य से प्रत्येक सरणी में उच्चतम तथा निम्नतम मान को निकाल दिया गया था।

औसत द्वारा विलकुल सरल नहीं कर दिया गया है), उतनी ही अधिक चरम मर्द होगी जिनके बहिष्कार की आवश्यकता पड़ सकती है। समाचारपत्रीय कागज उपभोग के सारणी 14.7 के आंकड़ों के लिए, सारणी के अन्तिम से पहली पंक्ति में दिखाये गए परिणामों के साथ, हमने बीच के सात मूल्यों के माध्य का उपयोग किया है।

12 सशोधित माध्यों की औसत 100.2 है। जब प्रत्येक सशोधित माध्य को 100.2 से विभक्त किया जाता है और 100 में गुणा किया जाता है तो हमें सारणी 14.7 की अन्तिम पंक्ति और चार्ट 14.6 में प्रदर्शित ऋतुनिष्ठ सूचकांक⁵ प्राप्त होता है। ध्यान दीजिए कि ऋतुनिष्ठ सूचकांक के 12 मूल्यों की औसत 100.0 है। यह महत्वपूर्ण है, क्योंकि बाद में मूल आंकड़ों को ऋतुनिष्ठ सूचकांक से भाग देकर, मूल आंकड़ों से ऋतुनिष्ठ विचरण को हटा दिया जाएगा। यदि ऋतुनिष्ठ सूचकांक की औसत 100 से कम होती तो सभी समजित अंक कुछ बहुत बड़े होते, यदि ऋतुनिष्ठ सूचकांक की औसत 100.0 से अधिक होती तो सभी समजित अंक कुछ अतिलघु होते।

श्रृंखलित आपेक्षिक—किसी समय ऋतुनिष्ठ सूचकांक को प्राप्त करने की सबसे अधिक प्रचलित विधि श्रृंखलित आपेक्षिक विधि थी। गतिशील औसत विधि के लिए आवश्यक परिकलनों की अपेक्षा इसमें परिकलनों का विस्तार बहुत कम होता है, परन्तु श्रृंखलित आपेक्षिक विधि गतिशील औसत विधि से कम संतोषजनक है, विशेष रूप से, परिवर्तनशील ऋतुनिष्ठ गतियों के निर्धारण में यह शीघ्रता से ग्रहण करने योग्य नहीं है, जिस विषय पर अगले अध्याय में विचार किया जायेगा।

इस विधि में पहला पग प्रत्येक मासिक मूल्य को पहले मासिक मूल्य की प्रतिशतता के रूप में अभिव्यक्त करने में है। ये श्रृंखलित आपेक्षिक हैं। इस बिन्दु से आगे, प्रविधि⁶ वैसी ही है जैसी सारणी 14.7 में दिखाई गयी है, अपवाद यह है कि 12 मासिक औसतों में प्रायः कुछ अधिशेष उपनति पायी जाती है, जिसका श्रृंखलित आपेक्षिकों के परिकलन-द्वारा निरसन नहीं किया गया था। ऋतुनिष्ठ सूचकांक प्राप्त करने से पूर्व इस अधिशेष उपनति का समजन अवश्य कर लिया जाना चाहिये।

ऋतुनिष्ठ सूचकांक की पर्याप्तता

ऋतुनिष्ठ सूचकांक की एक परत मरणियों के चार्ट द्वारा प्राप्त होती है, जैसा कि चार्ट 14.6 में दिखाया गया है। यदि अलग-अलग मरणियाँ विस्तृत रूप से फैली हो (अर्थात् ऊर्ध्वाधर रूप से विस्तृत परिमर ग्रहण करती हो), तो हम ऋतुनिष्ठ सूचकांक में कोई विश्वास नहीं रख सकते। अलग-अलग मासिक मरणियों में जितना कम फैलाव होगा, ऋतुनिष्ठ गति वर्णानुवर्ण उतनी ही अधिक एक साग होगी।

यह निश्चित करना सम्भव है कि (अध्याय 24 में वर्णित विधि द्वारा) क्या एक प्रदत्त सशोधित माध्य 100 से सार्थक रूप में भिन्न है। या, प्रमरण के निशलेपण की विधि

5 सारणी 14.7 में माध्य पाँच मर्दा के माध्य पर आधारित ऋतुनिष्ठ सूचकांक सम्भव होता है। कि चार्ट 14.6 में प्रदर्शित वक्र से हम वक्र में बटोलाई से चेद किया जा सकता है। ऊपर के दृष्टान्त में किसी एक मास के लिए अतिरिक्त अन्तर 0.2 है।

6 इस पुस्तक के प्रथम संस्करण के पृष्ठ 486—492 पर इस विधि का अधिक विस्तार में वर्णन किया गया है। श्रृंखलित आपेक्षिक विधि के साथ तथा हानियों को नहीं अधिक विस्तार में प्रस्तुत किया गया है।

का प्रयोग करते हुए (अध्याय 26 में वर्णित), यह निश्चित करना कि क्या 12 संशोधित माध्य सामूहिक रूप से परस्पर एक दूसरे से मार्थक रूप में भिन्न हैं। तो भी इन, प्रविधियों का महत्व संदिग्ध है, क्योंकि प्रथम तो जिन बटनों से माध्यों का परिक्लन किया गया था, वे यादृच्छिक बटनन थे, और इसलिए भी कि माध्य संशोधित माध्य थे, जिनका आंशिक आंकड़ों का सम्बन्धित कर देने के बाद परिक्लन किया गया था।

श्रेणी में ऋतुनिष्ठ विचरण का निर्गमन करने में हमका उपयोग करना तथा फिर यह देखना कि क्या कोई अधिशेष ऋतुनिष्ठ गतियां विद्यमान हैं, ऋतुनिष्ठ सूचकांक की पर्याप्तता की व्यावहारिक पर्याप्त है। हम यहाँ हमें अध्याय में इस विषय पर पुनर्विचार करेंगे।

काल-श्रेणी का विश्लेषण :

आवर्ती गतियाँ II—परिवर्तनशील वस्तुनिष्ठ प्रतिरूप

अध्याय 14 में हमने उस श्रेणी के ऋतुनिष्ठ सूचकांकों के निर्धारण की विधियों के विषय में विचार किया जिसके प्रतिरूपों में उस समय में, जिससे हमारा संबंध था, तनिक या कोई परिवर्तन नहीं हुआ। कुछ काल श्रेणियों के ऐसे ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप हैं जो परिवर्तित होते हैं। परिवर्तन उत्तरोत्तर हो सकते हैं—जिसका अर्थ यह है कि ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप एक वर्ष में दूसरे वर्ष धीरे धीरे बदलता है—अथवा वे अधिक आकस्मिक स्वभाव के हो सकते हैं उदाहरणतया ईस्टर के तिथि परिवर्तन या किसी महत्वपूर्ण घटना की बदलती हुई तिथि का संकेत करने वाले जैसे न्यूयार्क का मोटर गाड़ी प्रदर्शन, जैसा कि अध्याय 11 में वर्णन किया गया था।

ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप में उत्तरोत्तर परिवर्तन

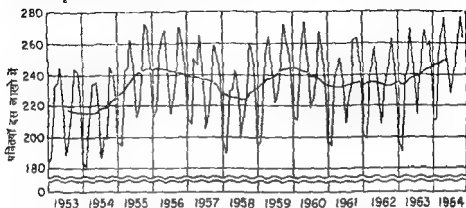
गतिशील ऋतुनिष्ठ—चार्ट 15 I संयुक्त राज्य के 52 शहरों के जनवरी 1953 से दिसम्बर 1964 तक के समाचारपत्र विज्ञापन परम्परा के मासिक आकड़ों को व्यक्त करता है। जैसा कि बाद में स्पष्ट हो जाएगा, इस श्रेणी के ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप में उत्तरोत्तर परिवर्तन है जिसका स हमारा संबंध है उस काल में प्रतिरूप सर्वत्र एवं जैसा नहीं है। इसे प्रायः गतिशील ऋतुनिष्ठ कहा जाता है। चार्ट 15 I जैसे चार्ट से यह निश्चित करना करना सम्भव नहीं है कि ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप स्थिर है अथवा गतिशील। इस का निराकरण करने के लिए प्रायः यह आवश्यक है कि प्राथमिक रूप ऋतुनिष्ठ विश्लेषण से किया जाए (आगामी प्रविधि के पृष्ठ 2 में) सीमाश्रयण, स्थिर अथवा गतिशील ऋतुनिष्ठ का निर्धारण करने के लिए प्राथमिक पदमार्ग है।

गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक का परिकल्पना—एक गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक को निम्न प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है

1 मूल आंकड़ा को केन्द्रित बारह-मास गतिशील औसत का परिकल्पना करें। क्योंकि प्रविधि वित्तुल उस प्रकार की है जैसी कि समाचारपत्रों के उद्देश्य के आंकड़ों के लिये सारणी 14.5 के स्तम्भ 2, 3, और 4 में दिखाई गई है, अतः गतिशील औसत का परिकल्पना यहाँ नहीं दिखाया गया है। तथापि गतिशील औसत को चार्ट 15 I में लघुचित्र द्वारा दिखाया गया है।

2 मूल आंकड़ा को गतिशील औसत की प्रतिशतताओं के रूप में व्यक्त करें। ये अब सारणी 15 I में दिखाए गए हैं।

3. सारणी 15.1 के आंकड़ों को, प्रत्येक मास के लिये एक चार्ट बनाते हुए, जैसा चार्ट 15.2 के 12 भागों में दिखाया गया है, 12 चार्टों में आरेखित करें। इन बारह मासिक चार्टों को लेखाचित्रीय कागजों पर अलग-अलग या एक बड़े कागज पर, जैसे भी सुविधाजनक हो, दिखाया जा सकता है। किसी भी दशा में, अगले दो पगों में किये जाने वाले उनके प्रयोग की दृष्टि से वे अधिक छोटे न हों।



चार्ट 15.1. संयुक्त राज्य में समाचारपत्र विज्ञापन, 1953—1964, तथा बारह-मास केन्द्रित गतिशील औसत, जुलाई 1953—जून 1964। आंकड़े सर्वे ऑफ फ्रेंट बिजनेस के विभिन्न अंकों में। गतिशील औसत का परिकलन मारणी 14.5 के अनुसार किया गया है।

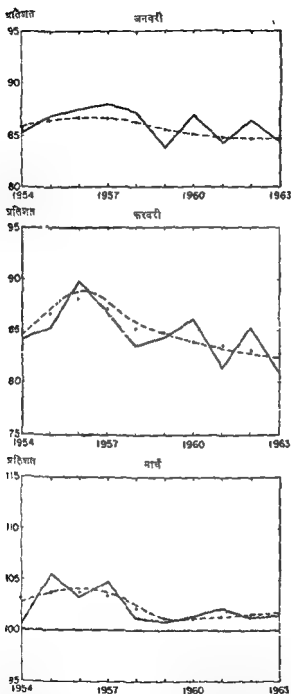
4 चार्ट 15.2 के प्रसंग में दिखाया है कि जनवरी, फरवरी, मार्च, और अक्टूबर की थोड़ी अप्रोगामी उपनितियाँ हैं। कुछ महीनों, उदाहरणार्थ, मई, जुलाई, अगस्त, तथा दिसम्बर की उपनितियाँ ऊर्ध्वगामी हैं। मासिक उपनितियाँ रेखिक या अरेखिक हो सकती हैं। साथ ही जैसा कि चार्ट 15.2 में दिखाया है, एक मान की उपनति ऐसी हो सकती है जो गिरती है और फिर उठती है, या इसके विपरीत। चौथे पग में मैं बारह मासिक चार्टों में प्रत्येक की उपनति का निर्धारण करना निहित है। यह मुक्तहस्त उपनति रेखाओं को खींचने से, गणितीय वक्रों के ग्रामजन से, या एक गतिशील औसत (उदाहरणार्थ, एक पच-मद गतिशील औसत) का एक मार्गदर्शक के रूप में प्रयोग करके और गतिशील औसत मुक्तहस्त समरेखण द्वारा हो सकता है। फिर भी उपनति रेखाएँ प्राप्त की जाती हैं, वे अपेक्षतया सरल बक होनी चाहियें तथा किनारों पर ऊपर या नीचे अधिक ढाल वाली नहीं होनी चाहियें। यह अवश्य अनुभव करना चाहिये कि जिन उपनतियों से हमारा यहाँ सम्बन्ध है वे उम्हरी शक्तियों से प्रभावित नहीं होती जो दीर्घकालिक उपनति से सम्बन्धित हैं। मासिक उपनतियाँ एक ही निर्दिष्ट दिशा में अनिश्चित काल के लिये निरंतर जाती हुई दिखाई नहीं देती, अपितु एक निश्चित स्तर तक जाने की उनकी अधिक संभावना है और फिर कम या अधिक स्थिर रहती है, जब तक नए कारणों से उस स्तर में परिवर्तन नहीं होता। दृष्टान्त के उद्देश्य में, चार्ट 15.2 में बारह उपनति रेखाएँ मुक्तहस्त खींची गई थीं। मासिक आंकड़ों को ऋतुनिष्ठता-रहित बनाने के लिये ज्यों ही वे प्राप्य हो, यदि हम 15.2 जैसे चार्ट में दिखाए गए वर्ष की अपेक्षा अगले वर्ष का ऋतुनिष्ठ सूचकांक चाहते हैं, तो हम पिछले वर्ष के लिए दिखाए गए (जैसा कि सारणी 16.3 में किया गया है) ऋतुनिष्ठ सूचकांक का प्रयोग कर सकते हैं या मासिक उपनति रेखाओं को बढ़ा सकते हैं।

सारणी 15 I

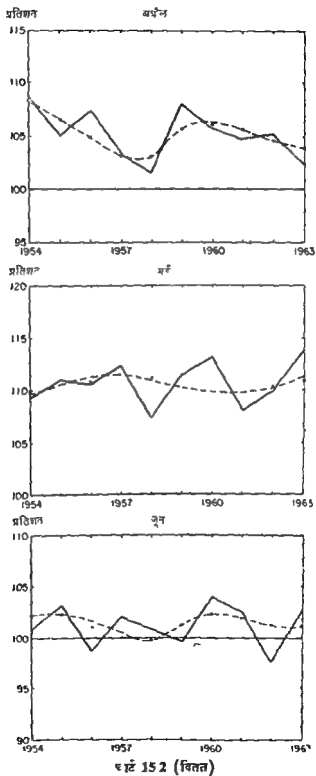
संयुक्त राज्य में समाजीकरण विभाजन के लिये केन्द्रित 1-2 भाग गतिशील बीसतों की प्रतिगतताएँ, 1954-1963

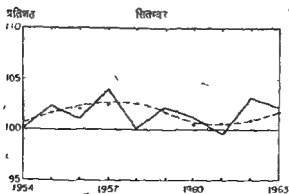
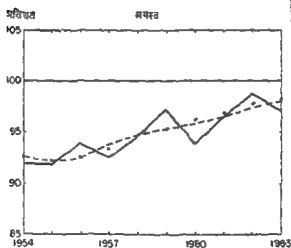
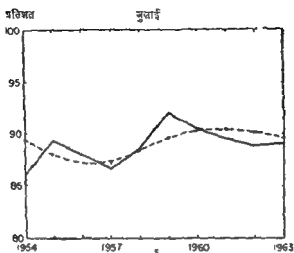
वर्ष	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
1954	85 1	84 1	100 6	108 6	109 2	100 8	86 1	92 0	100 2	111 3	107 7	102 6
1955	86 9	85 3	105 5	105 0	111 0	103 1	89 4	91 9	102 3	113 0	110 6	99 8
1956	87 4	89 8	103 2	107 3	110 6	98 6	88 2	93 9	101 1	112 1	109 2	101 3
1957	87 9	86 8	104 8	103 3	112 3	102 0	86 7	92 5	103 9	112 4	109 3	105 5
1958	87 1	83 4	101 2	101 6	107 4	100 9	88 5	94 6	100 0	114 7	110 9	100 7
1959	83 8	84 3	100 8	108 0	111 4	99 6	92 0	97 3	102 2	112 1	107 0	103 1
1960	86 9	86 2	100 4	105 8	113 1	103 9	90 6	94 0	101 2	112 4	109 3	102 4
1961	84 3	81 4	102 1	104 7	108 0	102 3	89 6	96 6	99 6	112 0	111 9	104 0
1962	86 4	85 3	101 3	105 2	109 9	97 5	88 8	98 8	103 1	111 1	112 5	100 7
1963	84 4	81 0	101 5	102 2	113 8	102 5	89 0	97 1	102 2	110 3	105 9	106 6

सर्वे ग्रॉफ़ करण्ड विनोजस के विभिन्न भागों से गोपनीय गॉन्ट 1 गतिशील बीसतों की सारणी 14 5 में दियाए के अनुसार परिवर्तित ।

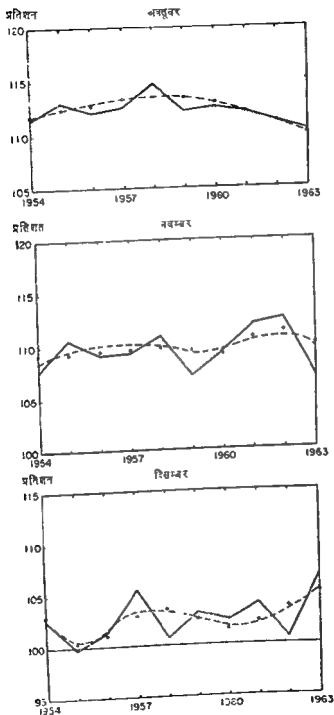


चार्ट 15.2. संयुक्त राज्य में समाचारपत्र विज्ञापन के लिये गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक के निर्धारण में सहायता के लिये मासिक चार्ट, 1954—1963। आंकड़े सारणी 15.1 से सदिग्ध विवरणों को दूर करने के लिये इन चार्टों, में कोई निर्देशक रेखाएँ नहीं हैं। जब गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक के परिकल्पन में सहायता के लिये इस प्रकार के चार्टों का उपयोग किया जाता है, तब चार्टों में सूक्ष्म रेखांकित प्रिड होगे। सारणी 15.2 में मानों को सीधे वक्रों में पढ़ा जाता है। सारणी 15.3 में मान बिन्दुओं द्वारा दिखाए हैं जो सीधे वक्रों पर, उनके एकदम ऊपर अथवा नीचे हैं।



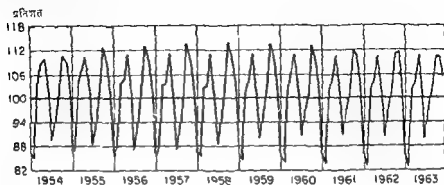


चार्ट 152 (वित्त)



चार्ट 15.2 (समाप्त)

5. चार्ट 15.2 के मासिक चार्टों से उपनति मानों को पढ़ें, और उन्हें एक मारणी में प्रविष्ट करें। गतिशील ऋतुनिष्ठ के ये पहले अनुमान हैं और इन्हें सारणी 15.2 में दिखाया गया है।



चार्ट 15.3 सम्यक्त राज्य में समाचारपत्र विज्ञापन के लिये गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक, 1954—1963। जबकि मारणी 15.3 से।

6 हम यह देखेंगे कि प्रतिवर्ष के लिये 12 मानों का, जिन्हें मारणी 15.2 में दिखाया गया है योग केवल एक दृष्टान्त में 1,200.0 होता है। मारणी 15.2 के प्रथम मन्तिवटन आंकड़ों का सम्यजन करने में, ताकि प्रत्येक वार्षिक योग 1,200.0 हो, किन्तु साथ ही साथ चार्ट 15.2 के 12 भागों के लिये सरल सु-आसजित उपनतियों को बनाए रखने में अन्तिम पग निहित है। इस पग के परिणाम चार्ट 15.2 में बिन्दुओं के द्वारा दिखाए गए हैं और मारणी 15.3 गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक देती है। ध्यान दीजिये कि प्रतिवर्ष के लिये अब योग 1,200.0 है। यदि बारह-मासिक उपनति-रेखाएँ देखी जाती हैं तो उन्हें एक ऐसी गणितीय प्रविधि से जोड़ा जा सकता है जिसका स्वतः परिणाम, प्रत्येक वार्षिक योग 1,200.0 होगा।

समाचारपत्र विज्ञापन के लिये गतिशील ऋतुनिष्ठ प्रतिवर्ष चार्ट 15.3 में तैला-विश्रयी विधि में दिखाया गया है। ध्यान दीजिये कि इस अवधि में अप्रैल तथा मई का मापेक्षिक महत्त्व किस प्रकार बदलता है। चार्ट 15.3 के द्वारा प्रस्तुत की गई दूसरी चक्रिक बात अवधि के अन्तर्गत ऋतुनिष्ठ विचरण के कोणांक में बहुत भीमा परिवर्तन है।

पाठक ने यह देखा होगा कि गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक के निर्धारण में पग 4 और 6 में व्यक्तिनिष्ठ प्रतिफल आते हैं। इसका कारण प्रविधि की निर्वलना नहीं है अपितु इसका अभिप्राय यह है कि अनुभवी कार्यकर्ता के द्वारा जो अध्ययनान्तर्गत श्रेणी से परिवर्तित है, अत्यन्त परिणाम प्राप्त होने की अधिक सम्भावना है। गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक प्राप्त करने की प्रविधि को, जिसका पहलू अनुच्छेदों में वर्णन किया जा चुका है, केन्द्रित करके नहीं, अपितु स्वेच्छा से मातर्व (या छठे) मास के सम्मुख रख कर एक 12-मास गतिशील औसत का प्रयोग करके कभी-कभी संशोधित कर लिया जाता है।

1 देखिए लार० जे० फूट तथा नॉर्ल ए० कॉमस, सीजनल वॉरिएशन : मैथड्स ऑफ मेजर-मेंट एंड टैस्ट्स ऑफ सिगनीफिकेन्स, पृष्ठ 6-7, व्यूरो ऑफ एक्सीक्यूटिव इवोलुटिव डेटा एंलीक्यूलेटिड हैंडबुक न० 48 के रूप में प्रकाशित।

सारणी 152

संयुक्त राज्य अमेरिका में समाचारपत्र वितरण के लिए गतिशील वस्तुनिष्ठ सूचकांक के प्रथम संनिपटन 1954—1963

मास	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
जनवरी	95.8	86.4	86.7	86.6	86.3	85.5	85.1	84.8	84.7	84.7
फरवरी	84.8	87.1	88.8	87.7	85.8	84.7	84.0	83.3	82.8	82.4
मार्च	102.7	103.6	104.1	103.7	102.4	101.1	101.2	101.3	101.4	101.7
अप्रैल	108.3	107.0	104.8	103.2	103.0	104.4	106.3	105.6	104.7	103.9
मई	109.5	110.6	111.2	111.4	111.0	110.3	107.8	109.8	110.3	111.6
जून	102.2	102.3	101.5	100.4	99.8	101.2	102.2	101.9	101.1	101.0
जुलाई	89.2	88.1	87.1	87.4	88.3	89.6	90.2	90.2	90.1	89.8
अगस्त	92.6	92.2	92.5	93.8	94.8	95.3	95.9	96.5	97.4	98.0
सितम्बर	100.6	101.7	102.3	102.7	102.6	101.8	100.8	100.5	100.9	101.8
अक्टूबर	110.7	112.2	112.9	113.2	113.4	113.4	113.0	112.0	111.0	110.1
नवम्बर	108.7	109.5	110.0	110.0	110.0	109.4	109.6	110.3	110.7	109.8
दिसम्बर	102.6	100.5	101.6	103.3	103.3	102.6	101.9	102.1	103.3	105.3
योग	1197.7	1201.2	1203.5	1203.3	1200.7	1199.3	1200.0	1198.9	1198.4	1200.1

स्रोत: बार्ट 152 ग।

सारणी 15.3

संयुक्त राज्य अमेरिका से सम्वाधारपत्र विभाजन के सिय गतिशील श्रुतिविष्ठ सचकाक 1954-1963

मास	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
जनवरी	85.8	86.4	86.7	86.6	86.3	85.5	85.1	84.8	84.7	84.7
फरवरी	85.0	86.7	88.1	87.1	85.2	84.7	84.0	83.5	83.0	82.8
मार्च	103.2	103.6	103.8	103.4	102.2	101.1	101.2	101.3	101.4	101.7
अप्रैल	108.3	107.0	104.8	103.2	103.0	104.4	106.1	105.6	104.7	103.9
मई	109.9	110.2	110.8	111.0	111.1	110.9	110.5	110.4	110.4	110.9
जून	102.2	102.3	101.0	100.0	99.8	101.2	102.2	101.9	101.1	101.0
जुलाई	89.2	88.1	87.0	87.2	88.3	89.6	90.2	90.2	90.1	89.8
अगस्त	92.6	92.2	92.5	93.3	94.8	95.3	96.2	96.9	97.8	98.2
सितम्बर	100.9	101.7	102.0	102.4	102.6	101.8	100.6	100.5	100.9	101.8
अक्टूबर	110.7	112.2	112.8	113.2	113.4	113.4	113.0	112.0	111.0	110.1
नवम्बर	109.2	109.3	109.5	109.6	109.9	109.5	109.2	110.7	111.2	110.0
दिसम्बर	103.0	100.3	101.0	103.0	103.4	102.6	101.7	102.2	103.7	105.1
योग	1 200.0	1 200.0	1 200.0	1 200.0	1 200.0	1 200.0	1 200.0	1 200.0	1,200.0	1 200.0

मीनड पाट 15.2 से

यदि श्रेणी को, जिसमें गतिशील ऋतुनिष्ठ है, स्थिर ऋतुनिष्ठ सूचकांक के द्वारा ऋतुनिष्ठता रहित कर दिया जाए तो समजित आंकड़ों में केवल श्रेणी में वस्तुतः विद्यमान अनियमित गतियाँ ही नहीं हागी अपितु अतिरिक्त अनियमितताएँ भी होंगी जहाँ ऋतुनिष्ठ सूचकांक अवसशोधित या अतिवशोधित कर देता है। जब तक कोई व्यक्ति उस श्रेणी के विषय में जिसके साथ वह कार्य कर रहा है यह नहीं जानता कि उसमें स्थिर ऋतुनिष्ठगति है, तो चार्ट 15 2 के 12-मासीय चार्ट बनाना सर्वदा बुद्धिमत्तापूर्ण होता है। ये इस बात को प्रकट करेंगे कि क्या गतिशील ऋतुनिष्ठ उपस्थित है, यदि ऋतुनिष्ठ स्थिर है तो उपनतियाँ क्षैतिज रेखाएँ होंगी।

अध्याय 14 की पाद टिप्पणी 3 में यह संकेत किया गया था कि संभव है, एक 12-मास गतिशील औसत चक्रीय चोटियों में ऊँचे और चक्रीय गत में नीचे की ओर गतिशील न हो। गतिशील औसत के इस गुण को आंशिक रूप में शुद्ध करने के लिये फेडरल रिजर्व सिस्टम के अनुसन्धान तथा सांख्यिकी विभाग के गवर्नरों का बोर्ड अभी अभी वर्णित प्रविधि की अपेक्षा एक अधिक जटिल प्रविधि का प्रयोग करता है।

फेडरल रिजर्व प्रविधि इस पुस्तक में प्रयुक्त विधि से दो बातों में भिन्न है प्रथम, गतिशील औसत (जो केन्द्रित नहीं है) एक मुक्तहस्त वक्र के द्वारा संशोधित कर ली जाती है, और दूसरे, प्रथम प्राप्त ऋतुनिष्ठ सूचकांक का दो बार संशोधन किया जाता है। इस विधि में आंकड़ों द्वारा व्यक्त क्षेत्र का ज्ञान तथा उच्च निरूप्यबुद्धि की आवश्यकता है। इसमें अधिकांश यांत्रिक विधियों की अपेक्षा उच्चतर स्तर के कार्य तथा अधिक समय की आवश्यकता है। एक कुछ अनिश्चित श्रेणी के लिये, उदाहरणार्थ, यह पाया गया कि 14 वर्ष की अवधि के आंकड़ों के लिए ऋतुनिष्ठ के निर्धारण तथा निरसन के लिये आधे दिन के व्यावसायिक प्रकृति के कार्य और दो दिन के लिपिक सम्बन्धी कार्य की आवश्यकता थी। तो भी एक गणितीय प्रक्रिया के प्रयोग से प्राप्त किये जा सकने वाले ऋतुनिष्ठ समजनों की अपेक्षा इसने अधिक शुद्ध ऋतुनिष्ठ समजन प्रदान किया। इसने इसके अन्तर्गत आने वाली श्रेणी के दूसरे गुणों का ज्ञान भी प्रदान किया, जो दूसरे कारणों से मूल्यवान हैं।

ऋतुनिष्ठ प्रतिरूपों में आकस्मिक विचरण

ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप शून्य-शून्य की अपेक्षा सहसा बदल सकते हैं और तब गतिशील ऋतुनिष्ठ उपाय लागू नहीं होगा। इन परिवर्तनों में केवल दो क्रमागत महीनों की आर्पेक्षिक महत्ता निहित हो सकती है या सारे प्रतिरूप में परिवर्तन हो सकता है। प्रथम प्रकार का प्रायशः होने वाला परिवर्तन ईस्टर के बदलने हुए आंकड़ों के द्वारा प्रस्तुत हो जाता है।

ईस्टर के लिये समजन—बहुत सी सांख्यिकीय श्रेणियाँ, ईस्टर की तिथि में होने वाले परिवर्तनों द्वारा, जो 22 मार्च से 25 अप्रैल के मध्य आते हैं, अत्यधिक प्रभावित होती हैं। श्रेणियों में से परचून विषय तथा मचरण में मुद्रा दो ऐसी श्रेणियाँ हैं जो इस प्रकार प्रभावित होती हैं। बहुविभागीय भण्डार विक्रय ईस्टर से पूर्व प्रचलित वस्त्र-व्यय के प्रभावों का विशेष रूप में दिवाते हैं। विलम्बित ईस्टर मार्च की अपेक्षा अप्रैल में विक्रय को अधिक बनाने में प्रवृत्त होगा, तथा सीमाओं के भीतर, अप्रैल में जितनी अधिक देर से ईस्टर

आएया उतनी ही अधिक यह प्रवृत्ति होगी। दूसरी ओर जब ईस्टर मार्च में आता है तो मार्च के ओर सम्भवतः फरवरी के विक्रयो में वृद्धि होगी।³

समस्त ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप में आर्कस्मिक परिवर्तन—अध्याय 11 में यह बताया गया था कि एक वर्ष न्यूयॉर्क में एक मोटर गाड़ी प्रदर्शन केवल जनवरी में ही नहीं हुआ था अपितु नवम्बर में भी हुआ था, नवम्बर का प्रदर्शन उस प्रदर्शन के स्थान पर हुआ जिसे मौनिक रूप में आगामी जनवरी में किये जाने की व्यवस्था थी। इनके पश्चात् कुछ वर्ष प्रदर्शन नवम्बर में होता रहा। न्यूयॉर्क प्रदर्शन की महत्ता इस बात से दीखती थी कि इन्हीं प्रदर्शनों में मोटर गाड़ियों के अधिकांश नए मॉडल लोगों के सामने प्रस्तुत किये जाते थे। परिवर्तन में पहले मोटर गाड़ियों के विक्रय की ऋतुनिष्ठ गति ने बसन्त (प्रदर्शन के कुछ मास बाद) में आधिक्य तथा पतन और शरद् ऋतु में कमी को प्रकट किया। परिवर्तन के पश्चात् प्रतिवर्ष दो ऋतुनिष्ठ उच्च प्रमाणित हुए, एक बसन्त में तथा दूसरा वर्ष के बहुत अन्त में।

जब समस्त ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप में अचानक परिवर्तन होता है तो केवल दो ऋतु निष्ठ सूचकांको का परिकलन करना आवश्यक है। एक परिवर्तन से पहले काल के लिए तथा एक परिवर्तन के बाद के वर्षों के लिए। दो सूचकांक या तो स्थिर हो सकते हैं या परिवर्तनशील, जो भी ध्रेणी के अनुकूल हो।

समय निर्धारण में लघुकालिक विस्थापन—ईस्टर की बदलती हुई तिथि केवल मार्च और अप्रैल पर अधिक प्रभाव डालती है, मोटर गाड़ियों के प्रदर्शन की तिथि के बदलने पर इसके पहले तथा बाद के कुछ महीनों पर मुख्य रूप से प्रभाव पड़ा। तथापि, ऋतुसम्बन्धी अवस्थाओं का भी, जो वर्षानुवर्ष बदलती रहती हैं, परिणाम एक वर्ष शीघ्र फसले तथा दूसरे वर्ष देर से फसलें हो सकता है, और न केवल विभिन्न वर्षों में विभिन्न समयों पर उपज का फल-विक्रय होता है, अपितु सम्पूर्ण वर्ष में वस्तुओं का प्रवाह भी प्रभावित हो सकता है और प्रभाव समस्त प्रतिरूप का कुछ मास बाएँ ध्रुव या दाएँ विवर्तन कर सकता है। इसी प्रकार उपभोक्ता माँग का समय बदल सकता है। यह हम बान पर निर्भर करता है कि ऋतु कितनी शीघ्र बदलती है।

इस प्रकार ऋतुनिष्ठ प्रतिरूपों का विवर्तन एक कठिन समस्या प्रस्तुत करता है। इसका सर्वाधिक व्यावहारिक हल कदाचित् यह है कि स्थिति को समस्त प्रतिरूप में अचानक परिवर्तन का विशेष मामला समझा जाए, उन वर्षों (आवश्यक रूप से निकटवर्ती नहीं) का इकट्ठा वर्ग बनाया जाय जो अपने क्रमों में उसी प्रकार का समय दिखाते हैं तथा उतने ऋतुनिष्ठ सूचकांको का परिकलन किया जाए जितने वर्षों के वर्ष हो। इस प्रकार के सूचकांको का परिकलन करने के लिये, कोई कारण नहीं कि कैलेंडर वर्ष को अवश्य ही एक इकाई के रूप में लिया जाए। अपितु, यदि विषयमामयों कृपि से सम्बन्धित है तो वर्ष को फसल वर्ष में सम्बन्धित कर दिया जाना चाहिये। कदाचित् मध्य का महीना या तो ऋतुनिष्ठ ऊँचाई या ऋतुनिष्ठ निचाई का होना चाहिये।

परिवर्ती कोणाक—कुछ आर्थिक ध्रेणियाँ वर्षानुवर्ष न्यूनाधिक उसी सामान्य ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप को स्थिर रखती हैं परन्तु कोणाक में या तो धीरे-धीरे या अचानक उनके

3. बहुविभागीय अन्तर विक्रय ध्रेणी में ईस्टर के समझन करने के लिए फेडरल रिजर्व सिस्टम द्वारा प्रयुक्त एक प्रविधि की विस्तृत व्याख्या के लिए इस पुस्तक के द्वितीय संस्करण में पृष्ठ 352—359 देखिए।

बदलने की प्रवृत्ति रहती है। यह विशेष रूप से कृषि सम्बन्धी वस्तुओं के भण्डार में ठीक बैठता है। उदाहरणार्थ, कृषि के भण्डार एक वर्ष से दूसरे वर्ष बदलते हुए ऋतुनिष्ठ कोणांक प्रस्तुत करते हैं जो पिछले वर्ष से लाई हुई मात्रा, फसल की मात्रा और उपभोग की मात्रा पर निर्भर करता है। इसी प्रकार अपने ऋतुनिष्ठ उतार-चढ़ाव के कोणांक में पशुधन के पोत-लदान बदलते हुए दीयते हैं। यहां पर परिवर्तन का सम्बन्ध पशुधन के तत्काल विक्रय के लाभ से हो सकता है इसकी तुलना में जब कि उन्हें आगे बढ़ाने के लिये या मूल वृद्धि के लिये रखा जाता है। क्योंकि इन नीतियों (पृ० 132 पर वर्णित) के अपेक्षित लाभ, चक्रों के अन्तर्गत बचत मकान है अतः चक्रों में ऋतुनिष्ठ विचरण में भी परिवर्तन आ सकता है और प्रतिरूप में परिवर्तन को पर्याप्त सीमा तक गतिशील ऋतुनिष्ठ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। एक अन्य विनिर्माण में सर्वाधिक ऋतुनिष्ठ कोणांक है जो कि मुश्किल से निर्वाह योग्य धाय में के कृषि के प्रति एक सामान्य चक्रीय प्रवृत्ति द्वारा लाया जाता है। यह स्पष्ट है कि इस परिवर्तन को गतिशील ऋतुनिष्ठ के रूप में विचारा जा सकता है, किन्तु इसमें थोड़ी उपनति प्रकार की न होकर चक्रीय होती है।

यह स्पष्ट होना चाहिये कि जब ऋतुनिष्ठ गति का कोणांक शून्य शून्य, न बदल रहा हो अपितु सहसा बदल रहा हो और मुख्यतया यह अपूर्वानुमेय हो तो समस्त ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप में गतिशील ऋतुनिष्ठ गठिनाई का कोई ध्वंस्तुर समाधान नहीं करा सकता जितना कि लघुकाल विचलन द्वारा हो सकता है। यहां पर वर्णित किए गए ऋतुनिष्ठ सूचकांक प्रकाश में से कोई भी प्रकार कुछ वर्षों में बहुत अधिक तथा अन्य वर्षों में बहुत लघु कोणांक प्रदर्शित करेगा। कोणांक में एकाग्र परिवर्तन के लिये ऋतुनिष्ठ सूचकांक को शुद्ध करने की विधि का इस पुस्तक में विस्तार से वर्णन नहीं किया जाएगा, परन्तु सामान्यतया यह प्रविधि उस सम्बन्ध के निर्धारण में निहित है जो प्रत्येक वर्ष के 12-महीनों के (1) 100 में विचलन के रूप में अभिव्यक्त ऋतुनिष्ठ सूचकांक (2) 12-मास केन्द्रित गतिशील औसत में मौलिक मूल्यों में प्रतिशत विचलन के मध्य उपस्थित है और बाद के प्रतिशतता विचलन अन्य औसत तक समजित किये जाते हैं। प्रत्येक वर्ष के लिये मानों के 12 युग्मों के मध्य सम्बन्ध एक कोणांक अनुपात प्रदान करता है जो 100 से विचलन के रूप में अभिव्यक्त मूलभूत ऋतुनिष्ठ मानों में प्रयोग किये जाने के लिये शुद्धि का सचेत करता है। इनमें से प्रत्येक विचलन में तब 100 को जोड़ दिया जाता है।

सावधानी का एक शब्द यहां आवश्यक हो सकता है यदि एक गतिशील ऋतुनिष्ठ का प्रयोग किया गया हो तो कोणांक अनुपात में परिवर्तन आवश्यक रूप से मूलभूत आंकड़ों के ऋतुनिष्ठ कोणांक में परिवर्तन का सचेत नहीं करता। उदाहरणार्थ, ऋतुनिष्ठ कोणांक में शून्य शून्य वृद्धि कोणांक अनुपात की अपेक्षा ऋतुनिष्ठ सूचकांक में प्रतिबिम्बित हो जाएगी, परन्तु गतिशील ऋतुनिष्ठ, कोणांक परिवर्तन में सामान्य उपनति में किसी सहमा पार्यव्य को पजीकृत करने में असमर्थ होगा।

विधि के और अधिक परिष्कार

ऋतुनिष्ठ सूचकांक का सातत्य—एक ऋतुनिष्ठ सूचकांक का अध्ययन न केवल सूचकांक के लिये चुने गए 12-मास के काल के लिये अपितु किसी भी समागत 12-मास काल

के लिये 100 प्रतिशत होता। तथापि इस अध्याय में वर्णित किसी भी ऋतुनिष्ठ के लिये क्रमागत 12-मास के लिये 100 प्रतिशत होना सत्य नहीं है, यद्यपि प्रगतिशील या गतिशील ऋतुनिष्ठ के सम्बन्ध में असंगति केवल नाममात्र की होगी। तो भी विशेषतया कोणाक में परिवर्तनों के लिये यथोचित ऋतुनिष्ठ सूचकांकों के सम्बन्ध में असंगति भयप्रद मात्राओं में हो सकती है। उस बिन्दु पर जहाँ एक वर्ष समाप्त होता है और दूसरा प्रारम्भ होता है, ऋतु के अनुसार समजित आँकड़ों की अनियमितता में कठिनाई स्वयमेव प्रकट होती है, उदाहरणार्थ, हम कल्पना करें कि दिसम्बर 1963 तथा जनवरी 1964 के लिये प्रत्येक असमजित ऋतुनिष्ठ सूचकांक 100 प्रतिशत है तो हम यह कह सकते हैं कि कैलेंडर वर्षों में कोणाक समजन का प्रयोग किया जाना है। अब आगे कल्पना करो कि कोणाक अनुपात क्रमशः 0.5 तथा 1.5 हैं। यह दिसम्बर 1963 के समजित सूचकांक को 50 प्रतिशत तथा जनवरी 1964 के सूचकांक को 150 बना देता है। यह स्पष्ट है कि दिसम्बर तथा जनवरी के मध्य ऋतु के अनुसार समजित आँकड़ों में अत्यधिक कमी होगी। तो भी थोड़ा सा विचार किसी को यह विश्वास दिला देगा कि कोणाक में परिवर्तन पूर्णतया एक महीने के समय में नहीं होता अपितु यह कुछ महीनों की अवधि के स्थानान्तरण को प्रस्तुत करता है।

यद्यपि इस समस्या का कोई पूर्णतया सन्तोषजनक समाधान नहीं है तथापि एक बहुत धर्मसाध्य उपचार यह है कि सारी श्रेणी के प्रत्येक क्रमागत 12-मास काल के लिये कोणाक अनुपात का परिकलन किया जाए। उदाहरण के लिये यदि आँकड़े 1954 से 1964 में ले जाकर जाएँ तो पहला 12-मास काल जनवरी 1954 से दिसम्बर 1954 में होकर, दूसरा फरवरी 1954 से जनवरी 1955 में होकर जाएगा, तथा आगे भी इसी प्रकार होगा। सर्वदा इस प्रकार के 12 12-मास काल होंगे और कोणाक अनुपात की सख्या भी वही होगी। हम इन अनुपातों को सामूहिक रूप से गतिशील कोणाक अनुपात कह सकते हैं। एक 12-मास गतिशील श्रृंखला की समानता का अनुसरण करते हुए इन अनुपातों को, 120 कोणाक अनुपातों को त्यागते हुए, जुलाई 1954 से जून 1964 में से जाते हुए 2-मास गतिशील श्रृंखला पर केन्द्रित होना चाहिए। तब अन्तिम ऋतुनिष्ठ सूचकांक प्राप्त करने के लिये ऋतुनिष्ठ सूचकांकों को इन कोणाक अनुपातों के साथ गुणा किया जाता है।

यह विधि अमसाध्य है, परन्तु यह पूर्णतया सन्तोषजनक नहीं है। यद्यपि श्रेणी के मातृत्व में कोई भी तीक्ष्ण कटाव नहीं है तो भी इसमें यह दोष है कि कोई भी 12 क्रमागत ऋतुनिष्ठ सूचकांक 100 प्रतिशत पर केन्द्रित नहीं होते। प्रत्येक वर्ष के कोणाक अनुपात का परिकलन करने, अनुपात को छठे अथवा सातवें महीने पर केन्द्रित करने और एक वर्ष से दूसरे वर्ष अकण्णितोय विधि से अन्तर्वेशन करने की, पूर्व-वर्णित विधि की अपेक्षा कम शुद्ध परन्तु बहुत ही अल्प अमसाध्य विधि और है।

ऋतुनिष्ठ प्रक्षेपों का सचय—यह बहुधा सत्य है कि एक श्रेणी के ऋतुनिष्ठ विचरण के प्रतिरूप धीरे-धीरे बदल रहे हो, अपने समय में आगे पीछे हो रहे हों, कोणाक में बदल रहे हो, अथवा इन तीनों का कोई सम्मिश्रण हो। कोणाक में परिवर्तन तथा समयों में विवर्तन दिखाने वाले आँकड़ों के लिये अन्तिम सूचकांकों की प्राप्ति की विधि इस प्रकार हो सकती है—(1) ऋतुनिष्ठ ऊँचाई की उत्पत्ति के अनुसार आँकड़ों को उप-कालों में विभाजित करो; (2) फिर ऋतुनिष्ठ का प्रत्येक ऐसे उप-काल के लिये परिकलन करो, (3) इन ऋतुनिष्ठ सूचकांकों का प्रयोग करते हुए प्रत्येक वर्ष के लिये कोणाक अनुपातों

का परिकलन करो (जहां तक सम्भव हो ऊपर वर्णित अन्तर्वेशन विधि का प्रयोग करते हुए), (4) ऋतुनिष्ठ सूचकांका का उपयुक्त कोणांक अनुपातो द्वारा गुणा करो।

ऋतुनिष्ठ व्यवहार के दूसरे मर्ममश्रण अनय उपचार की मांग कर सकते हैं। ऋतुनिष्ठ विचरण को सफलतापूर्वक मापन के लिये अधिकतर बहुत अधिक पटुता की आवश्यकता पड़ती है। दुर्भाग्यवश, इसे बताने का कोई मार्ग नहीं है कि हम कब समस्या के सर्वोत्तम समाधान पर पहुँच गए हैं। प्रविधि की जटिलता इस प्रकार का आश्वामन नहीं देती कि प्राप्त परिणाम उस गति को ठीक प्रकार से मापते हैं जिसके माप के लिये हम चले हैं। विशेषतया यदि आंकड़ मौलिक रूप से विश्वस्त नहीं हैं तो विधि के अत्यधिक सूक्ष्म परिष्कार का प्रयास अधिकतर व्यर्थ होने की संभावना है।⁵

निर्माण-विधियों का तत्संगत आधार—ईस्टर के लिये समजन के अतिरिक्त, जिसकी ओर पृष्ठ 323 पर संकेत किया गया, इस अध्याय में वर्णित विधियाँ अपने द्वारा उत्पन्न किये गए परिणामों की पूर्णता पर निर्भर करन हुए स्वभाव से न्यूनाधिक अनुभवा-भित प्रकृति की हैं। विधि तभी मनोपजनक हो सकती है यदि ऋतुनिष्ठता रहित किये गए प्रांकड़े (1) विभिन्न वर्षों में अन्तर्बर्ष प्रतिरूप (चक्रीय से भिन्न) की बराबरी नहीं दिखाते, (2) अपनी गति में अत्यधिक अनियमित नहीं होते, तथा (3) 12-मास कालों में भौतिक आंकड़ों की तरह जो एक ही महत्त्व के नहीं होते।

इसके विपरीत ईस्टर समजन में अप्रैल विक्रय ऋण माच विक्रय तथा ईस्टर की तिथि के फन्तीय सम्बन्ध को बूँडने का प्रयास किया है। इस विचार को आगे ले जाते हुए दिन के प्रकाश के समय तथा उद्दीप्त लम्प के विक्रय में या तापमान तथा बर्फ के विक्रय में, या तापमान के मर्ममश्रण और वर्ष के गिरने तथा शूलोश के विनय में, एक समय में सत्यात्मक सम्बन्ध की खोजना सम्भव हो सकता है। इस प्रकार की विधि से सूचकांका का परिकलन हमें सहसम्बन्ध के क्षेत्र में बहुत दूर ले जाएगा, जिसका अध्याय 19—22 में वर्णन किया गया है। आगे भी, उदाहरण के लिए निमस के महत्त्व को विक्रय तथा किसी और कारक के महसम्बन्ध में मापना बठिन होगा।

इन दो प्रकार की विधियों के बीच स्थित वह विधि है जो अनुभवाभित विधि द्वारा एक प्रथम मन्तिकटन ऋतुनिष्ठ सूचकांक प्राप्त करती है तथा फिर इस मिद्धात पर कि ऋतुनिष्ठ गतियाँ सरल प्रतिरूप प्रस्तुत करेंगी यदि नियत समय पर्याप्त दीर्घ होगा जो सभी अनियमित गतियों को एकदम प्रभावहीन कर दे, तो ऋतुनिष्ठ सूचकांक के माप एक वक्र को आसजित कर सूचकांक को सरल बनाने का प्रयत्न करती है। ऋतुनिष्ठ वक्र की मुक्तहस्त सरलता का अभ्यास घोंडे से माथ्यकीविदों द्वारा किया जाता है। प्रगणित-तीय वक्र को जोड़ने का प्रायः पक्ष नहीं निपा जाना। न केवल तार्किक आपत्तियाँ ही उठाई जा सकती हैं अपितु सामाजिक कारण भी हो सकन हैं जो सरल पणितोय वक्र में निहित परिरेखीय सरसता में बाधा डालते हैं।

5 उच्च अध्ययन के लिए दि. जर्नल ऑफ दि. अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, पृष्ठ 59, मसूमा 308, दिसम्बर 1964, पृष्ठ 1063—1077 में प्रकाशित वं० ज० हनान द्वारा लिखित 'दि एस्टीमेशन ऑफ ए चेंजिंग सीजनल पैटर्न' देखिए।

काल-श्रेणी का विश्लेषण :

चक्रीय गतियाँ—उपनति, ऋतुनिष्ठ, एवं अनियमित गतियों के लिए काल-श्रेणी का समंजन

अध्याय 11 में यह संकेत किया गया था कि मासिक काल श्रेणियाँ प्रकारात्मक रूप से चार महत्वपूर्ण गतियों की उपज हैं—दीर्घकालिक उपनति (T), ऋतुनिष्ठ विचरण (S), चक्रीय गतियाँ (C), तथा अनियमित घटावद्वियों (I)। अध्याय 12 तथा 13 में उपनतियों के प्रकार, उचित प्ररूप तथा उपनति घासजन की विधि कैसे चुनी जाए, इस पर विचार किया गया था। अध्याय 14 और 15 में ऋतुनिष्ठ विचरणों के प्रकारों तथा ऋतुनिष्ठ विचरण के सूचकांकों के निर्धारण की ओर ध्यान दिया गया है। इस अध्याय में, हम प्रथम वार्षिक काल-श्रेणी आंकड़ों से उपनति के निरसन का विवेचन करेंगे। ऐसा करने से मासिक आंकड़ों में से ऋतुनिष्ठ विचरण और उपनति दोनों का निरसन हो जाएगा और अनियमित गतियों का सरलन हो जाएगा। अन्तिम परिणाम मुख्य रूप से श्रेणी का चक्रीय गतियों को प्रदर्शित करने वाले समजित आंकड़ों का समुच्चय होगा।

उपनति के लिए वार्षिक आंकड़ों का समंजन करना

यह वास्तव में स्पष्ट है कि वार्षिक आंकड़ों, जो प्रत्येक वर्ष के लिये केवल एक संख्या दिखाते हैं, किसी ऋतुनिष्ठ विचरण का समावेश नहीं कर सकते। न ही वार्षिक आंकड़ों अनियमित गतियाँ दिखा सकते हैं, यद्यपि यह सम्भव है कि प्रासंगिक गति (जैसे कठोर हड़ताल या प्रचण्ड अग्नि के कारण उत्पन्न गति) वार्षिक जोड़ पर प्रभाव डालने के लिये पर्याप्त महत्वपूर्ण हो।

सारणी 12.2 में 1932—1960 के समाचारपत्र विज्ञापनार्थ ऋतु रेखा उपनति का निर्धारण करने के लिये आवश्यक परिकलनों को दिखाया गया था। समीकरण के प्रयोग से प्राप्त उपनति मान 1932—1964 की सारणी 12.2 के अन्तिम स्तम्भ में दिये गए थे। चार्ट 12.3 ने दोनों प्रेक्षित वार्षिक आंकड़ों और उपनति को दिखाया। सारणी 16.1, 1932—1964 के प्रेक्षित वार्षिक आंकड़ों तथा उन्ही वर्षों के उपनति मानों को दोहराती है। सारणी 16.1 में भी हमने प्रत्येक वर्ष के उपनति मानों के प्रतिशत का परिकलन किया है। इन्हें मूल मूल्याओं में से प्रत्येक को सगत उपनति मान से भाग करके तथा 100 से गुणा करके प्राप्त किया है। परिणाम चार्ट 16.1 में दिखाये गये हैं। वार्षिक आंकड़ों

सारणी 16.1

संयुक्त राज्य के समाचारपत्र विज्ञापन के 1932—1964 के आंकड़ों का उपनति समंजन
(मूल आंकड़े और उपनति मान पक्तियों में—दस लाख में)

वर्ष	मूल आंकड़े Y	उपनति मान Y_c	उपनति का प्रतिशत $100(Y - Y_c)$
1932	1,164 8	857 4	135 9
1933	1,065 5	933 7	114 1
1934	1,178 9	1,010 0	116 7
1935	1,246 0	1,086 2	114 7
1936	1 380 0	1,162 5	118 7
1937	1,409 8	1,238 8	113 8
1938	1,225 4	1,315 0	93 2
1939	1,243 6	1,391 3	89 4
1940	1 268 6	1,467 6	86 4
1941	1,313 2	1,543 9	85 1
1942	1,241 8	1,620 1	76 6
1943	1,396 4	1,696 4	82 3
1944	1,361 3	1 772 7	76 8
1945	1 391 6	1,848 9	75 3
1946	1,729 7	1,925 2	89 8
1947	2,008 6	2,001 5	100 4
1948	2,263 3	2,077 7	108 9
1949	2,302 1	2,154 0	106 9
1950	2,440 2	2,230 3	109 4
1951	2,478 3	2,306 6	107 4
1952	2,505 4	2 382 8	105 1
1953	2,610 5	2,459 1	106 2
1954	2,581 3	2,535 4	101 8
1955	2,843 5	2,611 6	108 9
1956	2,911 0	2,687 9	108 3
1957	2,829 1	2,764 2	102 3
1958	2,685 6	2,840 4	94 6
1959	2,865 6	2 916 7	98 2
1960	2,888 6	2,993 0	96 5
1961	2,777 0*	3,069 3	90 5
1962	2,798 3*	3,145 5	89 0
1963	2,858 6*	3,221 8	88 7
1964	2,973 4*	3,298 1	90 2

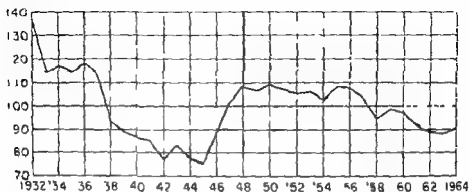
* उपनति के परिकलन के लिए प्रयोग में नहीं लाए गए ।

मूल आंकड़े सर्वे आंक करन्ट बिजनेस के विविध वर्षों से ।

उपनति मान सारणी 12.2 से ।

काल-श्रेणी की घटावदियों के केवल बहुत अपूर्ण सूचक प्रदान करते हैं, परन्तु चार्ट 16.1 बताना है कि महत्वपूर्ण घटावदी वापिक समाचारपत्र विज्ञापन वश में हुई है।

प्रतिशत



चार्ट 16.1 संयुक्त राज्य में समाचारपत्र विज्ञापन के वापिक आंकड़े 1932—1964 की उपनति के लिये समजित। 100 प्रतिशत आसार 1961—1964 के लिए दूरी हुई रेखा द्वारा दिखाया गया है क्योंकि उपनति का 1932—1960 के वर्षों के साथ मासजित किया गया था और 1964 तक बढ़ाया गया था। आरणा 16.1 के अंकित।

आरणा 16.1 में उपनति का, घटाव की अपेक्षा भाग से निरसन किया गया था। यदि मूल मलशामा में से उपनति मानो की घटा दिया जाता तो परिणाम सापेक्ष शब्दों की अपेक्षा पूर्ण शब्दों में (पकितियाँ दस लाखों में) विचलित होते। अधिकांश उद्देश्यों के लिये, जैसे कि उपनति, किमी ताकिक आधार के सम्बन्ध में, यह जान लेना अधिक उपयोगी है कि विचरण विस्तृत है अथवा लघु। इस प्रकार, 200 के उपनति मान के सम्बन्ध में निर्णय करने पर 50 का विचलन दस गुणा इतना महत्वपूर्ण है जितना तुलना में 2,000 का उपनति मान।

मासिक आंकड़ों का समजन

यद्यपि काल श्रेणी की चक्रीय गतियों के आकलनों पर पहुँचने की दूसरी विधियाँ भी हैं परन्तु इनमें से इस अध्याय के अन्त में वर्णित तथाकथित “शेष विधि” का ही सामान्यतः प्रयोग किया जाता है। इस विधि में ऋतुनिष्ठ विचरण तथा उपनति का निरसन कर चक्रीय अनियमित गतियों को प्राप्त करना निहित है। संकेत रूप में,¹

$I = T \times S \times C \times I$ की धारणा प्रायः $T + S + C + I$ की धारणा से अधिक उपयोगी है। यह इस कारण है क्योंकि S , C , और I की निरूपण पर की अपेक्षा सापेक्षिक शब्दों में उपनति के सम्बन्ध में परिमाण में अधिकतर लगभग स्थिर रहने की प्रवृत्ति होती है। आग सामान्यतः गतियाँ उस समय अधिक सार्थक होती हैं जबकि उन्हें एक दूसरे की तुलना में सोचा जाता है अपेक्षा इसके कि जब उन पर निरूपण रूप से विचार किया जाता है। इस प्रकार एक ऋतुनिष्ठ सूचकांक का निर्धारण करने के लिए जा महीनों की सापेक्षिक महत्ता में परिवर्तन के साथ बदलता है और चक्रीय गतियों की घटावदियों की प्रतिशतता की तुलना करने के लिये, एक ऋतुनिष्ठ सूचकांक का परिचलन समझ है जो कई वर्षों की अवधि तक समान रहता है। यदि ऋतुनिष्ठ गति को सापेक्ष की अपेक्षा निरूपण रूप में स्थिर समझा जाए तो चक्रीय-चक्रीय श्रेणियों की प्रतिशतता में अधिक अच्छे परिणाम प्राप्त होते हैं। उसका विवेचन पृष्ठ 333—336 पर किया गया है।

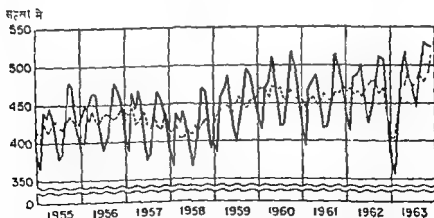
$$(T \times S \times C - I) - S = T \times C \times I \text{ तथा}$$

$$(T \times C \times I) - T = C \times I$$

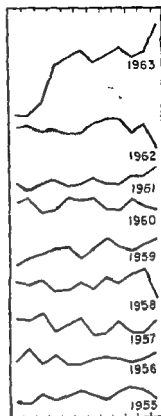
आगे, चक्रीय गतियों के प्राप्त करने के हेतु, जिन्हें कई बार चक्रीय सम्बन्धी की सजा दी जाती है, क्योंकि वे सदा प्रतिष्ठान होने के आँकड़ों का प्रायः सरलन कर दिया जाता है। यह इसलिए है क्योंकि चक्रीय अनियमित या चक्रीय गतियाँ ज़ेप रहती हैं इसलिए इस विधि को ज़ेप विधि कहा जाता है।

ऋतुनिष्ठताहीन बनाना—जैसा कि अध्याय 11 में स्पष्ट किया गया है, ऋतुनिष्ठ सूचकांक का स्वयं ऋतुनिष्ठ गति के अध्ययन के उद्देश्य से, अध्ययन किया जा सकता है, ऋतुनिष्ठ घटावद्वियों को सरल करना, अथवा उनका लाभ उठाने के उद्देश्य से ऋतुनिष्ठ परिवर्तनों को शून्य करना अथवा उनके परिणामों को न्यून करना है। दूसरी ओर, हम ऋतुनिष्ठ विचरण से निविष्ट काल-श्रेणी के अध्ययन में रुचि रख सकते हैं, और वह हम ऋतुनिष्ठ विचरण के लिये प्रेरित आँकड़ों को समझित करने में सिद्ध करते हैं।

ऋतुनिष्ठ सूचकांक का परिवर्तन और मासिक आँकड़ों के समुच्चय को ऋतुनिष्ठता-रहित बनाने में इसका प्रयोग चक्रीय गतियों के पृथक्त्व में केवल एक पग हो सकता है, हमारे पग (जिनका शीघ्र ही वर्णन किया जायेगा) उपनति में समजन और अनियमित गतियों का सरलन है। प्रायः फिर भी, केवल ऋतुनिष्ठ विचरण के लिये समझित आर्थिक तथा व्यापारिक श्रेणी के अध्ययन की इच्छा की जा सकती है। इस प्रकार व्यापारी, निर्णय करने में, उपनति एवं ऋतुनिष्ठ गतियों व अतिशीघ्र दिखाई न देने वाले समुच्चय के अनुसार विक्रय बढ़ रहे हैं (अथवा घट रहे हैं) पर अधिक विचार करने की अपेक्षा वर्ष के विशेष ऋतु के लिये माधारगुणवा प्रत्याशित विक्रय के अनुसार विक्रय की घटावद्वी पर, हो सकता है, अधिक ध्यान दे। यह रोचक बात है कि बहुत सी ऋतुनिष्ठता रहित



चार्ट 16.2 1955—1963 के लिए संयुक्त राज्य के प्रकाशकों द्वारा समाचारपत्र कागज़ की लपन (जोत रेखा) और ऋतुनिष्ठता-रहित आँकड़े (दूरी रेखा)। गारपी 16.2 के आँकड़े।



ज क मा म म जू जु अगि अ न दि

चार्ट 16 3 1955 से 1963 के लिए संयुक्त राज्य के प्रकाशकों द्वारा समाचारपत्र के कागज की खपत के ऋतुनिष्ठता-रहित आंकड़ों का वर्षानुवर्ष चार्ट। मारणी 16 2 के आंकड़ों।

श्रेणियों फेडरल रिजर्व सिस्टम के बाई ऑफ गवर्नर्स द्वारा प्रकाशित फेडरल रिजर्व बुलेटिन में तथा वाणिज्य विभाग के व्यापारिक अर्थशास्त्र कार्यालय से प्रकाशित सर्वे ऑफ करंट बिजनेस में दृष्टिगोचर होती है।

ऋतुनिष्ठ विचरण का निरसन प्रायः मूल मानों को ऋतुनिष्ठ मूचकांक से भाग करके सिद्ध किया गया है (ग्रीक परिणामों को 100 से गुणा करके) जैसा कि सारणी 16 2 में समाचारपत्र कागजात के उपभोग के आंकड़ों के लिये दिखाया गया है। वह इस प्रकार है: $(T \times S \times C \times I) - S = T \times C \times I$, इसलिये कि ऋतुनिष्ठता-रहित आंकड़ों में उपनति तथा अनियमित गणियाँ सम्मिलित हैं। मारणी 16 2 के ऋतुनिष्ठता-रहित आंकड़ों समाचारपत्र के उपभोग मूल आंकड़ों सहित चार्ट 16 2 में दिखाए गए हैं जहाँ पर यह स्पष्ट है कि ऋतुनिष्ठता-रहित आंकड़ों का वक्र दोनों में अधिक समान है। क्योंकि अवधि के अन्तर्गत केवल 9 वर्ष सम्मिलित हैं, अतः न तो मूल आंकड़ों और न ही ऋतुनिष्ठता-रहित आंकड़ों चक्रीय गणियाँ प्रदर्शित करने हैं। समाचारपत्रों के उपभोग के आंकड़ों अध्याय 14 में दृष्टान्त रूप में इसलिये नहीं चुने गए थे कि वे ऋतुनिष्ठ विचरणों के समाप्त होने के पश्चात् चक्रीय गणियाँ दिखाएँ या नहीं, वरन् इसलिए कि श्रेणी में स्पष्टतः ऋतुनिष्ठता था, जिसमें वर्षानुवर्ष कोई परिवर्तन दिखाई नहीं दिया जबकि (चार्ट 15 2 की तरह) गतिशील औसत आंकड़ों के प्रतिशत का बारह मासिक कोई चार्ट बनाकर उसका परीक्षण

सारणी 162

संयुक्त राज्य के प्रकाशको क समाचारपत्र कागज के उपभोग के
1955—1963 के आकड़ों में से ऋतुनिष्ठ विचरणों का निरमन

(मूल तथा ऋतुनिष्ठता रहित आकड़ छोट सह्य टबो में)

वर्ष तथा मास	मूल आकड़	ऋतुनिष्ठ सूचकांक	ऋतुनिष्ठता रहित आकड़ स्तम्भ 2 — स्तम्भ 3
(1)	(2)	(3)	(4)
1955			
जनवरी	384	93 2	412 0
फरवरी	365	88 7	411 5
मार्च	439	104 0	422 1
अप्रैल	432	104 8	412 2
मई	455	108 4	419 7
जून	422	99 0	426 3
जुलाई	378	89 7	421 4
अगस्त	385	92 3	417 1
सितम्बर	425	100 1	424 6
अक्तूबर	479	110 9	431 9
नवम्बर	462	108 2	427 0
दिसम्बर	419	100 6	416 5
1956			
जनवरी	407	93 2	431 3
फरवरी	398	88 7	448 7
मार्च	446	104 0	428 8
अप्रैल	462	104 8	440 8
मई	464	108 4	478 0
जून	422	99 0	426 3
जुलाई	389	89 7	433 7
अगस्त	403	92 3	436 6
सितम्बर	425	100 1	434 6
अक्तूबर	477	100 9	430 1
नवम्बर	468	108 2	432 5
दिसम्बर	444	100 6	441 4
1957			
जनवरी	408	93 2	437 8
फरवरी	387	88 7	436 3
मार्च	463	104 0	445 2
अप्रैल	447	104 8	421 8
मई	466	108 4	429 9
जून	434	99 0	438 4
जुलाई	374	89 7	416 9

सारणी 16 2 वित्त

(1)	(2)	(3)	(4)
अगस्त	386	92 3	418 2
सितम्बर	434	100 1	433 6
अक्तूबर	465	110 9	419 3
नवम्बर	453	108 2	418 7
दिसम्बर	436	100 6	433 4
1958			
जनवरी	386	93 2	414 2
फरवरी	365	88 7	411 5
मार्च	434	104 0	417 3
अप्रैल	423	104 8	403 8
मई	438	108 4	404 1
जून	409	99 0	413 1
जुलाई	365	89 7	406 9
अगस्त	388	92 3	420 4
सितम्बर	413	100 1	412 6
अक्तूबर	470	110 9	423 8
नवम्बर	465	108 2	429 8
दिसम्बर	394	100 6	391 7
1959			
जनवरी	395	93 2	423 8
फरवरी	385	88 7	434 0
मार्च	458	104 0	440 4
अप्रैल	467	104 8	445 6
मई	484	108 4	446 5
जून	429	99 0	433 3
जुलाई	400	89 7	445 9
अगस्त	423	92 3	458 3
सितम्बर	449	100 1	448 6
अक्तूबर	492	100 9	443 6
नवम्बर	488	108 2	451 0
दिसम्बर	459	100 6	456 3
1960			
जनवरी	432	93 2	463 5
फरवरी	416	88 7	469 0
मार्च	470	104 0	451 9
अप्रैल	477	104 8	455 2
मई	510	108 4	470 5
जून	462	99 0	466 7
जुलाई	420	89 7	468 2
अगस्त	420	92 3	455 0
सितम्बर	454	100 1	453 5
अक्तूबर	517	110 9	466 2
नवम्बर	497	108 2	459 3
दिसम्बर	457	100 6	454 3

सारणी 16 2 समाप्त

(1)	(2)	(3)	(4)
1961			
जनवरी	477	93 2	452 8
फरवरी	392	88 7	441 9
माच	469	104 0	451 0
अप्रैल	479	104 1	457 1
मई	486	108 4	448 3
जून	447	99 0	451 5
जुलाई	413	89 7	460 4
अगस्त	417	92 3	451 8
सितम्बर	451	100 1	450 5
अक्टूबर	517	110 9	461 7
नवम्बर	499	108 2	461 2
दिसम्बर	473	100 6	470 2
1962			
जनवरी	434	93 2	465 7
फरवरी	415	88 7	467 9
माच	481	104 0	462 5
अप्रैल	487	104 1	464 7
मई	499	108 4	460 3
जून	457	99 0	461 6
जुलाई	423	89 7	471 6
अगस्त	442	92 3	478 9
सितम्बर	479	100 1	478 5
अक्टूबर	511	110 9	460 8
नवम्बर	508	108 2	469 5
दिसम्बर	441	100 6	438 4
1963			
जनवरी	376	93 2	403 4
फरवरी	356	88 7	401 4
माच	435	104 0	418 3
अप्रैल	490	104 8	467 6
मई	516	108 4	476 0
जून	483	99 0	487 9
जुलाई	471	89 7	469 3
अगस्त	443	92 3	480 0
सितम्बर	490	100 1	489 5
अक्टूबर	579	110 9	477 0
नवम्बर	524	108 2	484 3
दिसम्बर	522	100 6	518 9

किया गया। तो भी ऋतुनिष्ठताहीन आकड़ों का वक्र यह सुभाव देता है कि ऋतुनिष्ठ सूचकांक बहुत सन्नोपजनक न हो क्योंकि तीव्र शिखर और गिरावटें बनी रहती हैं। इन परिस्थितियों में मासिक चार्टों का पुनः परीक्षण होना चाहिये। ऋतुनिष्ठता-रहित आंकड़ों में दिखाई चोटियाँ और गिरावटें जेप ऋतुनिष्ठ घटावदियों का प्रतिनिधित्व नहीं करती, वरन् जैसा कि सारणी 16.2 में देखा जा सकता है उन महीनों के असाधारण ऊँचे और नीचे मूल मानों को अऋतुनिष्ठ कारणों में प्रकट करती हैं।

ऋतुनिष्ठ का परीक्षण—ऋतुनिष्ठ सूचकांकों के परीक्षण में यह दलना है कि क्या इसके प्रयोग में श्रेणी से सभी ऋतुनिष्ठ गतियों का निरसन कर दिया है। इस उद्देश्य के लिये चार्ट 16.2 जैसा चार्ट प्रयोग में लाया जा सकता है, परन्तु एक वर्ष के पश्चात् दूसरे वर्ष का ऋतुनिष्ठता-रहित आंकड़ों का चार्ट 16.3 अधिक अच्छा है। इस चार्ट से यह देखा जा सकता है कि ऋतुनिष्ठता-रहित आंकड़ों में अभी भी उपस्थित उतार-चढ़ाव मुख्यतया अनियमित गतियाँ हैं जो श्रेणी में चर्रीय उतार-चढ़ाव की कमी के कारण दूर हो गई है। जब समजित श्रेणी में जेप ऋतुनिष्ठ गतियाँ उपस्थित हो तो वर्षानुवर्ष चार्ट का प्रत्येक वक्र एक दूसरे के साथ समानता प्रकट करेगा।

ऋतुनिष्ठ के घटाव द्वारा शोधन—कभी-कभी ऐसा होता है, जैसा कि वर्ष 1963 के चार्ट 16.3 में है कि जब ऋतुनिष्ठ सूचकांक से भाग करके ऋतुनिष्ठ का निरसन किया जाता है तो विलक्षण परिणाम प्राप्त होते हैं। विशेष रूप से ऐसी स्थिति की संभावना तब होती है जब कि ऋतुनिष्ठ गति लाक्षणिक रूप में एक अथवा अधिक महीनों में लगभग शून्य तक गिर जाती है। फिर यदि दिये हुए वर्ष में उन महीनों के लिये मूल आंकड़े वस्तुतः शून्य में ऊपर रहे तो अत्यन्त निम्न ऋतुनिष्ठ सूचकांक प्रतिशतता द्वारा भाग ऋतुनिष्ठता-रहित आंकड़ों को बहुत ही नुकीली चोटि पर ऊपर ले जाएगा। यद्यपि ऋतुनिष्ठ गति शून्य अथवा शून्य के निकट तक न गिरे, तो भी ऐसे दृष्टान्त कठिन हैं जिनमें ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप सापेक्षिक रूप की अपेक्षा निरपेक्ष रूप से एक-सा रहे। यह स्पष्ट हो जाएगा यदि गतिशील औसत की प्रतिशतताओं के विस्तृत होने की प्रवृत्ति हो जबकि मूल आंकड़े लघु तथा निम्न स्तर पर हो जबकि मूल आंकड़े उच्च स्तर पर हो।

एक सामान्य उपाय निम्न प्रकार में है। किसी भी यथोचित विधि से ऋतुनिष्ठ सूचकांक का परिकलन करो। अब ऋतुनिष्ठ सूचकांक को (प्रतिशतता विचलनों में व्यक्त) प्रतिवर्ष उस वर्ष की मूल श्रेणी के औसत मान द्वारा गुणा करके सूचकांक को मूल आंकड़ों के रूप में परिवर्तित कर दिया जाता है। तब ऋतुनिष्ठ सूचकांक को मूल आंकड़ों में से बीजगणित के अनुसार घटा कर ऋतुनिष्ठ का निरसन किया जाता है।

प्रथम दृष्टान्त में, ऐसे ढंग से जिससे कि सापेक्षिक रूप की अपेक्षा निरपेक्ष रूप में ऋतुनिष्ठ सूचकांक प्राप्त हो, सूचकांक का परिकलन करना वांछनीय हो सकता है। यह तब इस प्रकार होगा यदि ऋतुनिष्ठ गतियाँ प्रतिवर्ष प्रतिशतता विचलनों की अपेक्षा निरपेक्षतः एक जैसी प्रतीत हों। मूल आंकड़ों के चार्ट का परीक्षण यह सकेत कर सकता है कि यह ठीक है अथवा नहीं। यदि प्रमाण यह सकेत करता है कि निरपेक्ष विचलनों के सूचकांक का परिकलन किया जाना चाहिये तो यह आवश्यक है कि उन उपायों में से जिनसे पाठक पहले ही परिचित है, एक उपाय को ग्रहण करें। उदाहरणार्थ, यदि गतिशील औसत विधि का प्रयोग किया जाता है, तो गतिशील औसत को मूल आंकड़ों में बाँटने की अपेक्षा

उनमें से घटाया जाता है, और अन्तिम अभिवृद्धि का शुद्ध कारक द्वारा जमा या घटाव में कुल शून्य तर समजित करने हुए सूचकांक पहल की तरह उमी बिन्दु से बनाया जाता है। सयोगवश, इस पर ध्यान दिया जाना चाहिये कि अध्याय 14 में वर्णित युक्तियों में से कोई भी एक ऋतुनिष्ठ के परिकलन की घटाव विधि पर आधारित हो। के सम्पर्कसापक्ष विधि (अध्याय 14 में वर्णित) को निम्न प्रकार से भी सरलता से व्यवहार में लाया जा सकता है (1) प्रत्येक मास में से पिछले मास को घटा कर सम्पर्क अन्तरो को प्राप्त करो, (2) प्रतिमास इन सम्पर्क अन्तरो की औसत निकालो (3) प्रथम मास के सम्पर्क अन्तरो को शून्य रहने दो, और अन्तरो को उत्तरोत्तर योग से जोड़ दो, (4) शुद्धि कारक के उत्तरोत्तर घटाव द्वारा उपनति (ऊर्ध्वमुखी) के नियम श्रृंखला अन्तरो को ठीक करो, (5) नतन शुद्धि कारक के योग अथवा घटाव द्वारा श्रृंखला अन्तरो को योग शून्य तक समजित करो।

ऋतुनिष्ठ तथा उपनति के लिये समजन—इस भाग के अधिकांश शेषांश के दृष्टान्त के रूप में हम समाचार विज्ञापन परम्परा के आंकड़ों का प्रयोग करेंगे, जिसके लिये उपनति को अध्याय 12 में मापा गया था और जिसके एक भाग के लिये अध्याय 15 में एक गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक का परिकलन किया गया था। सामान्य प्रविधि में प्रथम, ऋतुनिष्ठ उतार-चढ़ाव को हटाना सम्मिलित है, जो

$$(T \times S \times C \times I) - S = T \times C \times I$$

प्रदान करती है, और दूसरे में

$$(T \times C \times I) - T = C \times I$$

प्रदान करने के लिए उपनति का निरसन सम्मिलित है।

हम जनवरी 1932 से दिसम्बर 1964 तक के समाचारपत्र विज्ञापन परम्परा के आंकड़ों का प्रयोग करेंगे। चार्ट 16.4 में असमजित मूल आंकड़े दिखाए गए हैं। ऋतुनिष्ठ विचरण का उन्मूलन ठीक उसी प्रकार में मिट्टा जाता है जैसे कि मूल आंकड़ों को ऋतुनिष्ठ सूचकांक द्वारा भाग देने में समाचारपत्र बाजार के उपभोग के आंकड़ों का वर्णन किया गया है। इस प्रविधि का सारणी 16.3 में मकेत किया गया है। समाचारपत्र विज्ञापन में प्रयुक्त ऋतुनिष्ठ सूचकांक के (1) 1932—1963 के लिये गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक तथा (2) 1963 के मान 1964 में दोहराए गए। 1964 के लिये 1963 के ऋतुनिष्ठ सूचकांक का प्रयोग प्रवर्तित विधि से होता है जबकि गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक का (प्रनुवर्ती आंकड़ों की अनुपलब्धि के कारण) विस्तार करना सम्भव नहीं है। गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक के 1954—1963 के भाग के निर्धारण का वर्णन पिछले अध्याय में किया गया था, और सूचकांक सारणी 15.3 में दृष्टिगोचर था। ऋतुनिष्ठ सूचकांक को लेगाचिन विधि से चार्ट 11.9 में दिखाया गया था। पत्रिका विज्ञापन के ऋतुनिष्ठता रहित आंकड़ों को सारणी 16.3 के चौथे स्तम्भ में और चार्ट 16.4 में दिखाया गया है।

अगले पग में उपनति का निरसन सम्मिलित है, प्रविधि वही है जैसी कि सारणी 16.1 में दिखायी गयी है, अनिवार्य इसके कि अब हम मासिक आंकड़ों की व्याख्या करेंगे हैं और उपनति समीकरण को अवश्यमेव मासिक पदों में रखना चाहिये। ध्यान दीजिये जबकि हमारी प्रस्तुत व्याख्या 1932—1964 के वर्षों से सम्बन्धित है उपनति समीकरण को

सारणी 16 3

संयुक्त राज्य समाचारपत्र विज्ञापन के प्रतुनिष्ठ विवरण तथा उपनति 1933—1964 के लिये आकड़ों का समन्वय

(यह बोका प्रतुनिष्ठता रनि आकड़ तथा उपनति मान दह लाख पन्निषो मे ।)

वष तथा मास	मल आकड़ $T \times S \times C \times I$	प्रतुनिष्ठ सचकाफ	प्रतुनिष्ठता रहित आकड़ $T \times C \times I$ स्तम्भ (2) — स्तम्भ (3) $\times 100$	उपनति मान T	कत्रीय अनियमित प्रतिभातताएँ $C \times I$ स्तम्भ (4) — स्तम्भ (5)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1933					
जनवरी	78 0	87 1	89 6	74 8	119 8
फरवरी	72 5	83 5	86 8	75 4	115 1
माच	76 4	106 5	71 7	75 9	94 5
अप्रल	91 1	108 8	83 7	76 4	109 6
मई	94 6	111 2	85 1	76 9	110 7
जून	93 2	103 3	90 2	77 5	116 4
जुलाई	78 3	86 5	90 5	78 0	116 0
अगस्त	86 3	88 7	97 3	78 5	123 9
सितम्बर	92 6	98 9	93 6	79 1	118 3
अक्तूबर	106 0	112 0	94 6	79 6	118 8
नवम्बर	99 8	108 5	92 0	80 1	114 9
दिसम्बर	96 7	105 0	92 1	80 7	114 1
1934					
जनवरी	82 5	86 2	95 7	81 2	117 9
फरवरी	80 8	84 0	96 2	81 7	117 7
माच	103 6	106 5	97 3	82 2	118 4
अप्रल	107 5	108 7	98 9	82 8	119 4
मई	112 1	112 2	99 9	83 3	119 9
जून	103 6	102 2	101 4	83 8	121 0
जुलाई	83 2	85 4	97 4	84 4	115 4
अगस्त	87 7	87 3	100 5	84 9	118 4
सितम्बर	96 4	99 3	97 1	85 4	113 7
अक्तूबर	108 8	112 1	97 1	86 0	112 9
नवम्बर	107 0	108 7	98 4	86 5	113 8
दिसम्बर	105 7	107 4	98 4	87 0	113 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1963					
जनवरी	197 7	84 7	233 4	65 6	87 9
फरवरी	190 3	82 11	229 8	266 2	86 3
मार्च	238 7	101	234 7	266 7	88 0
अप्रैल	241 1	103 9	237 1	267 2	86 9
मई	268 7	110 9	242 3	267 8	90 5
जून	243 1	01 0	240 7	268 3	89 7
जुलाई	212 5	89 8	236 6	268 11	88 0
अगस्त	233 1	98 2	237 4	269 4	88 1
सितम्बर	246 7	101 8	242 3	270 0	89 7
अक्तूबर	267 7	110 1	243 1	270 4	89 9
नवम्बर	258 4	110 0	234 9	270 9	86 7
दिसम्बर	260 6	105 1	248 0	271 5	91 3
1964					
जनवरी	210 6	84 7	248 6	272 0	91 4
फरवरी	210 4	82 8	254 1	272 5	93 2
मार्च	248 0	101 7	243 9	2 31	89 3
अप्रैल	265 1	103 9	255 1	273 6	93 2
मई	275 9	110 9	248 8	274 1	90 8
जून	247 0	101 0	244 6	274 7	89 0
जुलाई	226 5	89 8	252 2	275 2	91 6
अगस्त	238 0	98 2	242 4	275 7	87 9
सितम्बर	248 2	101 8	243 8	276 2	88 3
अक्तूबर	265 0	110 1	240 7	276 8	87 0
नवम्बर	276 4	110 0	251 3	277 3	90 6
दिसम्बर	262 3	105 1	249 6	277 8	89 8

सर्वे आफ कर- बिजनेस के विभिन्न जको मे समाधारण विभाषण परम्परा ।

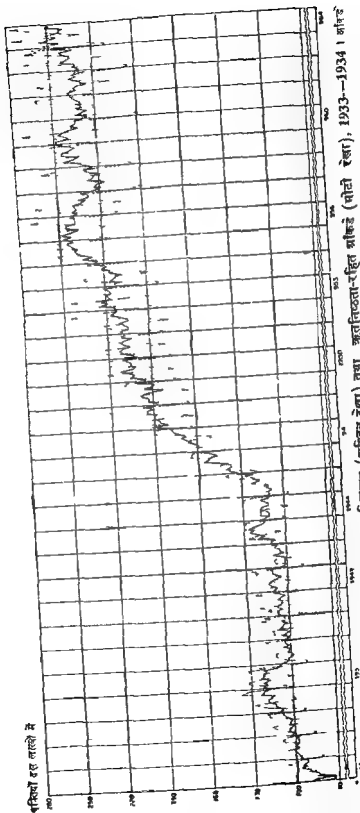
अनुनिष्ठ सूचकांक वायस था मे 1933—1953 के लिए बनने हुए न । दियाए सारणी 15 3 से 1954—1963 के लिये बनल हुए 1964 मे वही जो 1963 में । समीकरण मे उपनति मान पृष्ठ 342 पर दिने गए ।

1932—19 0 के काल मे आयोजित किया गया था और उमे 1964 तक बढ़ाया गया था । पृष्ठ 249 पर उपनति को मामिक सम्बन्ध मे इस प्रकार पाया गया

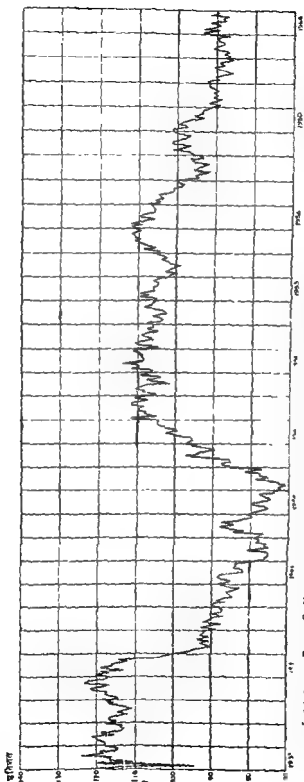
$$Y = 100.6987 + 0.57971$$

उदगम जुलाई 1946 1 इकाइया एक मास ।

सारणी 16 3 के स्तम्भ 5 मे प्रयोजित उपनति मान इस समीकरण मे प्राप्त किय गए । प्रथम सारणी के स्तम्भ 6 मे चन्द्रीय अनियमित माना का उत्तरन बन बनिये मा सी 16 3 के स्तम्भ 4 के अनुनिष्ठता रहित माना मे स प्रत्यक्ष को मगन उपनति मान $[(T \times C \times I) - T - C \times I]$ द्वारा विभाजित किया जाना है । इन चन्द्रीय अनियमित माना का चार 16 5 मे दियाया गया है । यहाँ ध्यान देना आवश्यक है कि सारणी 16 3 के स्तम्भ 6



चार्ट 16.4 समुक्त राज्य में समाचारपत्र वितरण (संयुक्त राज्य) तथा भारत 16.3 के और उम सारणी में देखा गए वर्षों (जिन्हें दिखाया नहीं गया) की काय सूचियों से।



चार्ट 16.5. अत्युच्च गतियों तथा उन्नति के लिये समन्वित संयुक्त राज्य में संस्थापक व्यवस्थापन, 1933-1964 (जैसे मार्ग 16.3 से और उन मार्गों में से छोटे रूप में) के लिए कार्य मूल्यों के (क्रिस्टियाना मही मही) मार्ग 16.3 के लिये चक्रे को भी देखें।

में प्रदर्शित मान हम नाश्वी में पक्वियाँ नहीं हैं, वरन् प्रतिशतनाश्वी हैं। जब ऋतुनिष्ठ सूचकांक से भाग करके ऋतुनिष्ठ गनियों का निर्गमन किया जाता है (जो प्रतिशतनाश्वी को एक श्रेणी है), तो ऋतुनिष्ठना-गृहित आँकड़ों को सर्वदा उन्हीं इकाइयों में दिखाया गया है जैसे कि प्रारम्भिक आँकड़े दिखाए गए थे। उदाहरित, तो भी, सर्वदा मूल इकाइयों के रूप में है, इस प्रकार कि जब श्रेणी की उपनति का निर्गमन किया जाता है तो फलित आँकड़े प्रतिशतताएँ होती हैं।

सारणी 16 3 में चक्रीय अनियमित गनियों को प्रथम ऋतुनिष्ठ विचरण तथा फिर उपनति का निर्गमन करके प्राप्त किया गया था। सवेनाश्वरी में प्रविधि थी

$$(T \times S \times C \times I) - S = T \times C \times I, \text{ ऋतुनिष्ठना-गृहित आँकड़े, और}$$

$$(T \times C \times I) - T = C \times I, \text{ चक्रीय अनियमित गनियाँ।}$$

यदि वाञ्छित हो तो अवश्य ही हम पहले उपनति और फिर ऋतुनिष्ठ विचरण का निर्गमन कर सकते थे, इस प्रकार

$$(T \times S \times C \times I) - T = S \times C \times I, \text{ उपनति के बिना समजित आँकड़े तथा}$$

$$(S \times C \times I) - S = C \times I, \text{ चक्रीय अनियमित गनियाँ।}$$

दूसरी सम्भावना उपनति और ऋतुनिष्ठ मानों को एक साथ गुणा करने (ऋतुनिष्ठ प्रतिशतताओं को दशमलव अनुपातों के रूप में प्रयुक्त करके) और दोनों गतियों का एक ही साथ निर्गमन करने में, निहित है। संकेताक्षरों में, यह है

$$(T \times S \times C \times I) - (T \times S) = C \times I, \text{ चक्रीय अनियमित गनियाँ।}$$

सारणी 16 4, 1963 के समानांतरपत्र विज्ञापन परम्परा के लिये इन तीनों सम्भावित प्रविधियों को व्यक्त करती है। ध्यान दीजिये कि तीन प्रविधियों से अन्तिम परिणाम, जिन्हें सारणी 16.4 के प्रत्येक भाग के स्तम्भ 6 में दिखाया गया है, या तो पूर्णतया भिन्न हैं या मिनिकटन के कारण कभी-कभी 0 1 तक भिन्न हैं।

ऋतुनिष्ठ विचरण और उपनति का समजन करने की तीनों प्रविधियों में से प्रथम वर्णित प्रविधि का ही प्रायः अधिकतम प्रयोग होता है क्योंकि ऋतुनिष्ठ विचरण के लिये समजित श्रेणी का अध्ययन करने की तथा चक्रीय अनियमित गतियों पर ध्यान देने की प्रायः इच्छा की जाती है। क्योंकि कोई मासिक श्रेणी को केवल उपनति के लिये समजित करने में कठिनाता में पड़ि लेगा, अतः दूसरी प्रविधि प्रायः प्रयुक्त नहीं की जाती। यदि विश्लेषण का एकमात्र उद्देश्य चक्रीय अनियमित गतियों को प्राप्त करना है (या तो अन्तिम उद्देश्य के रूप में या चक्रीय गतियों को प्राप्त करने के एक पथ के रूप में), तो सारणी 16 4 में दिखाई गई तीसरी विधि दूसरी दोनों विधियों से थोड़ा कम समय लेने वाली है, क्योंकि अधिकांश प्रकार के परिकल्पन-यत्र गुणाओं की श्रेणी को अधिक शीघ्रता से कर सकते हैं जो दूसरी विधियों में विद्यमान विभाजन की दो श्रेणियों में से एक को प्रतिस्थापित करती है।

तथापि चक्रीय अनियमित गतियाँ प्राप्त की जाती हैं, उन मा ों को प्रायः “प्रसामान्य” की प्रतिशतताओं के रूप में अभिलिखित किया जाता है। शब्द “प्रसामान्य” का प्रयोग प्रायः भूगोलात्मक, व्यापार, मनोविज्ञान, मासिकी, तथा अन्य क्षेत्रों में किया जाता है, और

इसे सर्वदा एक ही अर्थ में प्रयुक्त नहीं किया जाता। इस उदाहरण में, "प्रसामान्य" शब्द श्रेणी की सम्युक्त उपनति और ऋतुनिष्ठ गतियों की ओर संकेत करता है, भाव यह है कि दीर्घ-काल की दृष्टि से एक उद्योग के लिये सतत प्रकार से बढ़ना (या घटना) प्रसामान्य है, और लघु-काल की दृष्टि से ऋतुनिष्ठ विचलन का विद्यमान होना प्रसामान्य है। सम्युक्त रूप से लिए जाने पर दोनों गतियाँ "प्रसामान्य" हैं।

अनियमित गतियों का समरेखण—पहले ही निरक्षित शक्तियाँ के अतिरिक्त, शक्तियों के समूह की पारस्परिक क्रिया मुख्यतया उन अनियमित गतियों के लिये उत्तरदायी है जो प्रायः ऋतुनिष्ठ विचरण एवं उपनति के लिये समजित श्रेणी के वक्र में दिखाई जाती हैं। समाचारपत्र विज्ञापन परम्परा में अनियमित उतार-चढ़ाव चार्ट 16.5 में स्पष्ट हैं। कभी अनियमित उतार-चढ़ाव उत्पन्न हो सकते हैं क्योंकि ऋतुनिष्ठ सूचकांक जिसे प्रयुक्त किया गया था, इतना श्रेष्ठ नहीं जितना कि वांछित था। समाचारपत्र विज्ञापन परम्परा के लिये ऋतुनिष्ठ सूचकांक पर पूर्व विचार से यह संकेत मिल जाता है कि वह सतोपजनक था।

सारणी 16.4

1963 के लिए सम्युक्त राज्य समाचारपत्र विज्ञापन की चक्रीय-अनियमित गतियाँ प्राप्त करने के लिए तीन विधियाँ

I. ऋतुनिष्ठ विवरण के लिए और फिर उपनति के लिए समजन।

मास (1)	मूल आंकड़े $T \times S \times C \times I$ (2)	ऋतुनिष्ठ सूचकांक S (3)	ऋतुनिष्ठता-रहित आंकड़े $T \times C + I$ [स्तम्भ (2) - स्तम्भ (3)] $\times 100$ (4)	उपनति मान T (5)	चक्रीय-अनियमित प्रतिशतताएँ $C \times I$ स्तम्भ (4) - स्तम्भ (5) (6)
जनवरी .	197.7	84.7	233.4	265.6	87.9
फरवरी .	190.3	82.8	229.8	266.2	86.3
मार्च . . .	238.7	101.7	234.7	266.7	88.0
अप्रैल .	241.1	103.9	232.1	267.2	86.9
मई	268.7	110.9	242.3	267.8	90.5
जून . . .	243.1	101.0	240.7	268.3	89.7
जुलाई . .	212.5	89.8	236.6	268.8	88.0
अगस्त . .	233.1	98.2	237.4	269.4	88.1
सितम्बर .	246.7	101.8	242.3	270.0	89.7
अक्तूबर . .	267.7	110.1	243.1	270.4	89.9
नवम्बर .	258.4	110.0	234.9	270.9	86.7
दिसम्बर .	260.6	105.1	248.0	271.5	91.3

II. उपनि के लिए और फिर ऋतुनिष्ठ विचरण के लिए समझन।

मास	मूल आंकड़े $T \times S \times C \times I$	उपनि मान T	उपनि प्रानिन $S \times C \times I$ लम्ब (2) - लम्ब (3)	ऋतुनिष्ठ सूचकांक S	चक्रीय-प्रानि- मिन प्रतिशतताएँ $C \times I$ लम्ब (4) ÷ लम्ब (5) (6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
जनवरी	197.7	265.6	74.4	84.7	87.9
फरवरी	190.3	266.2	71.5	82.8	86.3
मार्च	238.7	266.7	89.5	101.7	88.0
अप्रैल	241.1	267.2	90.2	103.9	86.8
मई	268.7	267.8	100.3	110.9	90.5
जून	243.1	268.3	90.6	101.0	89.7
जुलाई	212.5	268.8	79.1	89.8	88.0
अगस्त	233.1	269.4	86.5	98.2	88.1
सितम्बर	246.7	270.0	91.4	101.8	89.8
अक्टूबर	267.7	270.4	99.0	110.1	89.9
नवम्बर	258.4	270.9	93.4	110.0	86.7
दिसम्बर	260.6	271.5	96.0	105.1	91.3

III. मनुष्य उपनि तथा ऋतुनिष्ठ गतियों के लिए समझन।

मास	मूल आंकड़े $T \times S \times C \times I$	उपनि मान T	ऋतुनिष्ठ सूचकांक S	"मामान्य" मान $T \times S$ लम्ब (3) × लम्ब (4) (5)	चक्रीय-प्रानि- मिन प्रतिशतताएँ $C \times I$ लम्ब (2) ÷ लम्ब (5) (6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
जनवरी	197.7	265.6	84.7	224.8	87.9
फरवरी	190.3	266.2	82.8	220.4	86.3
मार्च	238.7	266.7	101.7	271.2	88.0
अप्रैल	241.1	267.2	103.9	277.6	86.8
मई	268.7	267.8	110.9	297.0	90.5
जून	243.1	268.3	101.0	271.0	89.7
जुलाई	212.5	268.8	89.8	241.4	88.0
अगस्त	233.1	269.4	98.2	264.6	88.1
अक्टूबर	246.7	270.0	101.8	274.9	89.8
सितम्बर	267.7	270.4	110.1	297.7	89.9
नवम्बर	258.4	270.9	110.0	289.0	86.7
दिसम्बर	260.6	271.5	105.1	285.3	91.3

आंकड़े नारंगी 16.3 के नीचे दिए गए सजी हैं।

एक श्रेणी में प्रति-समरेखण के मूलभूत मय के बिना अनियमित घट-बढ़ का पूर्ण-तया निरसन नहीं किया जा सकता। तथापि चक्रीय गतियों के स्पष्टतर समाधान के लिये, अल्पविधि गतिशील श्रौत के प्रयोग से अनियमित गतियों को समरेखित किया जा सकता है। चार्ट 165 के परीक्षण से यह दिखाई देता है कि अनियमित गतियों में से अधिकांश एक मास की अवधि की है, यद्यपि कभी कभी, जैसे कि 1934 के प्रथमार्ध में, वे एक मास से अधिक ठहरती हुई दिखाई देती हैं। इन गतियों को समरेखित करने के लिये, हम द्वि-मासीय गतिशील श्रौत का प्रयोग कर सकते हैं। अग्रवाद यह है कि इस प्रकार की श्रौत के मानों को महीनों के प्रत्येक युग्म के बीच आलेखित किया जाना चाहिये। यदि हमें तीन महीनों की श्रौत निकालनी हों तो श्रौत उचित रूप से मध्य के महीने के सामने आएगी, परन्तु हमें एक अन्य गम्भीर स्थिति का सामना करना पड़ेगा। यदि प्रथम और तृतीय मास ऊँचे हैं और द्वितीय मास नीचा, तो परिणामतः श्रौत ऊँची होगी, यदि पहला और तीसरा महीना नीचा और दूसरा महीना ऊँचा हो तो श्रौत नीची होगी। अतः कभी-कभी एक त्रैमासिक श्रौत श्रेणी में विपरीत गतियाँ उत्पन्न करेगी। दोनों पूर्ववर्ती कठिनाइयों पर त्रैमासिक गतिशील श्रौत भारत 1, 2, 1 के प्रयोग द्वारा, जो वास्तव में एक केन्द्रित द्विमासिक गतिशील श्रौत है विजय प्राप्त की जा सकती है। सारणी 165 बताती है कि किस प्रकार यह श्रौत प्राप्त की जाती है। पहले चक्रीय अनियमित मानों के लिये एक त्रैमासिक गतिशील योग भारत 1, 2, 1 प्राप्त किया जाता है, और तब गतिशील योग मानों में से प्रत्येक की गतिशील श्रौत पर पढ़ने के नियम 4 में भाग किया जाता है। प्रत्येक योग को अलग-अलग प्राप्त करने और त्रैमासिक अनुयोगों का उपयोग न करके जैसाकि हमने सारणी 145 में 13—मास भारत गतिशील योग के परिकलन में किया था, गतिशील योगों को एक मबलन यन्त्र के द्वारा प्राप्त करना चाहिये। गतिशील श्रौतों को, गतिशील योगों को, 4 द्वारा भाग करने की अपेक्षा, 0.25 में गुणा करके प्राप्त करना चाहिए, क्योंकि जब सतत गुणक का उपयोग किया जाना है तो अधिकांश परिकलन यन्त्र प्रति शीघ्र परिणाम प्रदान करेगे। ध्यान दीजिये कि सारणी 165 के स्तम्भ में वही अंकड़े हैं जो सारणी 163 के स्तम्भ 6 में हैं। वास्तविक व्यवहार में सारणी 165 के स्तम्भ 3 और 4 सारणी 163 के अतिरिक्त स्तम्भों के रूप में सम्मिलित किये जायेंगे। इस पुस्तक में छपे पृष्ठ पर इतनी बड़ी सारणी दिखाने में कठिनाई के कारण यहाँ दो विभिन्न सारणियाँ प्रदर्शित की गई हैं। ध्यान दीजिये कि श्रेणी के प्रथम तथा अन्तिम महीने के लिये कोई त्रैमासिक गतिशील श्रौत एक नहीं होगा।

त्रैमासिक गतिशील श्रौत भारत 1, 2, 1 के प्रयोग से चक्रीय अनियमित मानों को समरेखित करने का परिणाम चार्ट 166 में दिखाया गया है। यह स्पष्ट है कि यह वक्र चार्ट 165 के वक्र की अपेक्षा अधिक समरेखित है, यद्यपि कुछ स्थल ऐसे हैं जहाँ पर गतिशील श्रौत इतनी कम अवधि को है कि वह अनियमित घट-बढ़ों का पूर्णतया समरेखण नहीं कर सकती। एक श्रेणी से अनियमित गतियों का प्रायः पूर्णतया निरसन नहीं किया जाता। उनके पूर्णतया निरसन के लिये सम्भवतः मुक्तहस्त समरेखण अथवा तीन महीने से अधिक अवधि वाली गतिशील श्रौत के प्रयोग की आवश्यकता पड़े। किसी भी दशक में, समरेखण प्रविधि को चक्रीय गतियों के मोड़ बिन्दुओं को बड़ा-छिपाना नहीं चाहिए। क्योंकि चार-मास गतिशील श्रौत में वही कमियाँ हैं जो कि दो-मास गतिशील श्रौत में, तो व्यावहारिक

सारणी 16.5

संयुक्त राज्य समाचार पत्र विनापन के आंकड़ों की त्रैमासिक गणितों का परिचय
1933—1964

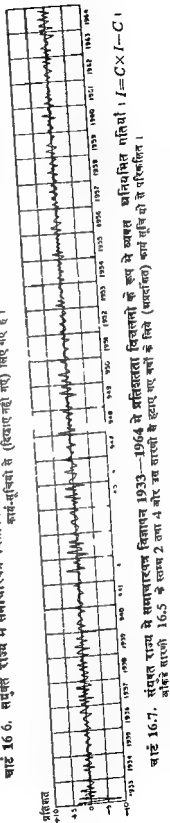
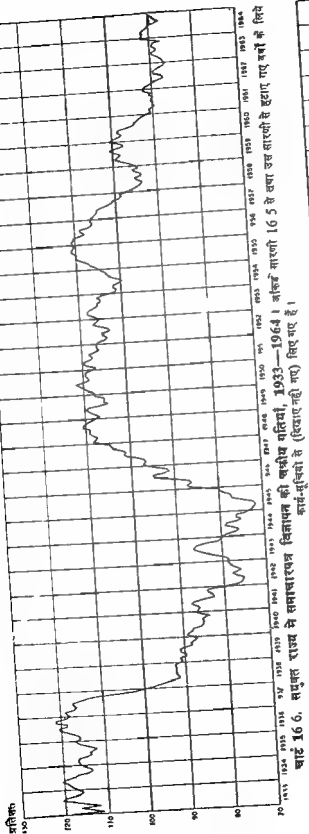
वर्ष तथा मास	त्रैमासिक आनयमित प्रतिशतनाए $C \times I$	त्रैमासिक गति शील या न्यून (2) क		त्रैमासिक प्रतिशतनाए C सम (3) — 4
		1	2	
(1)	()	(3)		(4)
1933				
जनवरी	119.8	474.6		118.7
फरवरी	119.1	444.5		111.1
मार्च	124.7	415.7		103.4
अप्रैल	109.6	424.4		106.1
मई	110.7	447.4		111.9
जून	116.4	499.5		114.9
जुलाई	116.0	479.5		118.1
अगस्त	127.9	452.1		120.5
सितम्बर	115	479.3		119.8
अक्टूबर	118.8	470.8		117.7
नवम्बर	114.9	467.7		115.7
दिसम्बर	114.1	461.0		115.3
1934				
जनवरी	117.9	476.6		116.9
फरवरी	117	471.7		117.9
मार्च	118.4	475.9		118.5
अप्रैल	119.4	477.1		119.3
मई	119.9	480.2		120.1
जून	121.0	477.3		119.3
जुलाई	115.4	470.2		117.6
अगस्त	118.4	465.9		116.5
सितम्बर	113.7	458.7		114.7
अक्टूबर	117.9	453.3		113.3
नवम्बर	113.8	455.6		113.4
दिसम्बर	113.1	457.9		114.5
1963				
जनवरी	87.9	347.7		86.9
फरवरी	86.5	348.5		87.1
मार्च	88.0	349.2		87.3
अप्रैल	86.9	352.3		88.1
मई	90.5	357.6		89.4
जून	89.7	357.9		89.5
जुलाई	88.0	353.8		88.5

(1)	(2)	(3)	(4)
अगस्त ...	88 1	353 9	88 5
सितम्बर	89 7	357 4	89 4
अक्टूबर	89 9	356 2	89 1
नवम्बर	86 7	354 6	88 7
दिसम्बर ...	91 3	360 7	90 2
1964			
जनवरी	91 4	367 3	91 8
फरवरी ..	93 2	373 1	91 8
मार्च	89 3	365 0	91 3
अप्रैल	73 2	366 5	91 6
मई ..	90 8	363 8	91 0
जून ...	89 0	360 4	90 1
जुलाई	91 6	360 1	90 0
अगस्त ...	87 9	355 7	88 9
सितम्बर ..	88 3	351 5	87 9
अक्टूबर	87 0	352 9	88 2
नवम्बर	90 6	358 0	89 5
दिसम्बर . .	89 8		...

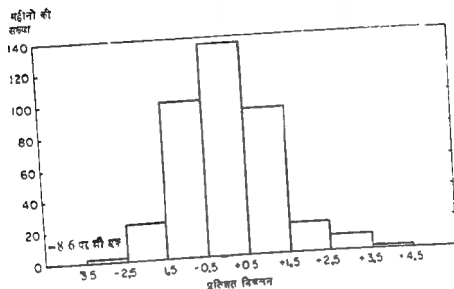
चक्रीय अनियमित प्रतिकलनताएँ मार्गणी 16 3 में ।

गतिशील औमन, जो मार्गणी 16 5 में प्रयुक्त औमन से अगली अधिक लम्बी अवधि की है, एक (भारत) पाँच-मास गतिशील औमन होगी । पाँच मास गतिशील औसत मानों को प्रत्येक पाँच मास के समूह के तीसरे महीने के मापन रखा गया है । महीनों को प्रायः 1, 2, 4, 2, 1 भारत किया जाता है जो मध्य के महीने को अधिकतम और अन्त के महीनों को अल्पतम भार प्रदान करता है । क्योंकि इस भाग प्रतिरूप का योग 10 बनता है, तो परिकलन यन्त्र के प्रयोग के बिना गतिशील योगों में गतिशील औसतों का परिकलन किया जा सकता है ।

अनियमित गतियाँ—अनियमित गतियों को स्वयमेव सारणी 16 5 के स्तम्भ 2 में दिखाए गए चक्रीय अनियमित मानों को चक्रीय मानों द्वारा, जिन्हें उगी सारणी के स्तम्भ 4 में दिखाया गया है, भाग करके प्राप्त किया जा सकता है । अनियमित गतियों का परिकलन नहीं दिखाया गया है, केवल चार्ट 16 7 इनको महीना बार करके प्रदर्शित करना है, और चार्ट 16 8 अनियमित विचरणों का बारबारता बटन प्रस्तुत करना है । यदि अनियमित गतियाँ यादृच्छिक प्रकार की हो तो उनमें प्रामाण्य वक्र की रचना की आशा की जा सकती थी । यद्यपि चार्ट 16 8 का वक्र लगभग सममित है ($\beta_1=0.1169$), यह तुल्यकुदी है जिसमें $\beta_2=3.41$ । यदि -8.6 के विचरण को, जिसे चार्ट 16 8 में नहीं दिखाया गया है, परिकलनों में जोड़ लिया जाता है तो तिरछापन और तुल्यकुदी दोनों बहुत बढ जाते हैं, क्योंकि $\beta_1=0.6226$ तथा $\beta_2=10.83$ । यह एक समय श्रेणी की अनियमित गतियों के निम्ने प्रत्याशित बारबारता बटन के प्रकार का-या है, क्योंकि छोटे-छोटे उतार-चढ़ावों के प्रतिरूप यहाँ माधारणतया और भी है, जिनका स्वभाव प्रासंगिक है, और जिनके प्रभाव कई महीनों तक निरन्तर (या सचयी) रह सकते हैं । समाचारपत्र विज्ञापन के पत्रिके इस



दृष्टि में "ग्रन्थे आचरण" के हैं, चार्ट 16.8 की शून्य रेखा² के एक ही ओर विचलन पाँच महीने के लिये एक समय में केवल एक बार, चार महीनों के लिए एक समय में केवल दो बार, और तीन महीनों के लिए एक समय में चौदह बार निरन्तर चलते जाते हैं।



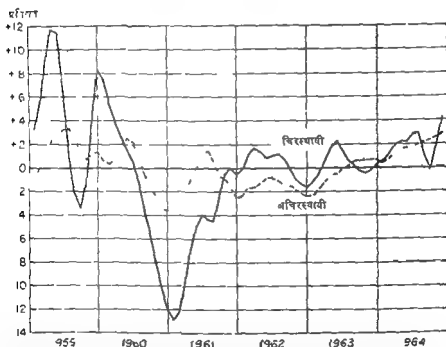
चार्ट 16.8. संयुक्त राज्य में समाचारपत्र वित्तापन की अनियमित गतियों का बारवारता घटन, 1932-1964। अनियमित गतियाँ $I = C \times I - C$ हैं और उन्हें प्रति-शतता विचलन में व्यक्त किया गया है। सारणी 16.5 के स्तम्भ 2 और 4 तथा उन वर्षों की कार्य सूचिका में (प्रदर्शित नहीं किया है) जिनको सारणी से हटा दिया गया है, आँकड़ों का परिवर्तन किया गया है।

चक्रीय गतियों की तुलना करना—चक्रीय गतियों को एक काल श्रेणी में सीमित करने की इच्छा करने का एक अन्य कारण एक या अधिक श्रेणियों में चक्रीय गतियों से उनकी तुलना करने की अभिलाषा है। कभी-कभी यह भी सोचा जा सकता है कि एक श्रेणी अधिक या कम दृढ़ता से दूसरी के चक्रीय मोड बिन्दुओं³ पर उसके पूर्व चलती है। तथापि जब दो श्रेणियाँ अपने उतार-चढ़ावों के कोणांक के सम्बन्ध में जिन्हें पूर्णान्को में व्यक्त किया गया है, एक दूसरे में नहीं मिलती तो उन उतार-चढ़ावों के समय की तुलना करने में कुछ कठिनाई का अनुभव किया जाता है। जितना अधिक स्पष्ट अन्तर विस्तारों में होगा, उतना ही अधिक महत्वपूर्ण उनके अन्तर में किसी प्रकार का समझन करना होगा।

2. चार्ट से यह देखना सुभव नहीं। उन आँकड़ों से जिनके ऊपर चार्ट आधारित है गणनाएँ की गई थी।

3. अपना-परचता सम्बन्धों का अध्याय 22 में विवेचन किया गया है।

दृष्टान्त के रूप में हम चिरस्थायी निर्माणों के सूचकांक और जनवरी 1959 से दिसम्बर 1964 के अचिरस्थायी निर्माणों के सूचकांक का प्रयोग करेंगे। दोनों फेडरल रिजर्व मिस्टम क गवर्नर का परिपद द्वारा प्रकाशित किये जाते हैं। अनियमित उतार चढ़ावों के समरेखण और चक्रीय विचलनों के रूप में व्यक्त किया जाना चाहिए। चार्ट 16.9 उपरति तथा ऋतुनिष्ठ गतियों के नियममजित इन दो श्रृंखलाओं को दर्शाता है। चक्रीय विचलन वही बताने हैं जो कि चक्रीय प्रतिशतनाई केवल मानों को अलग प्रकार से व्यक्त किया जाता है उदाहरण के लिए 102.5 है + 2.5 101.2 है 1.7 100 है 98.3 है 1.7 96.4 है -3.6 इत्यादि। यद्यपि चार्ट 16.9 में दो श्रृंखलाएँ चक्रीय उतार चढ़ावों के दृष्टिकोण से स्पष्ट हैं, सभ्यता नहीं तथापि यह स्पष्ट है कि चिरस्थायी निर्माणों का सूचकांक अचिरस्थायी निर्माणों के सूचकांक से अधिक शीघ्रता दर्शाता है।



चार्ट 16.9 चिरस्थायी निर्माणों के उत्पादन के फेडरल रिजर्व तथा सूचकांक अचिरस्थायी निर्माणों के सूचकांक के चक्रीय विचलन, 1959—1964। आंकड़ों के स्रोतों के लिये सारणी 16.6 की टिप्पणी देखें।

चक्रीय गतियों के विस्तार को अधिक सरलता से सुलना करने की एक सम्भव विधि दो श्रेणियों के लिए विभिन्न ऊर्ध्वाधर पैमानों के प्रयोग में मन्विहित है। जब कि यह सीधा-सादा हल है, तो भी यह निराकरण करना सुगम नहीं है कि दोनों ऊर्ध्वाधर पैमानों परस्पर किस प्रकार का सम्बन्ध रखें, उदाहरणार्थ यदि ऊर्ध्वाधर अन्तरों पर विजय प्राप्त करने के लिए अधिकतम उतार-चढ़ावों का प्रयोग किया जाए तो कुछ भागों में अधिक विस्तार वाली श्रेणी को अत्यधिक संकुचित किया जा सकता है। एक अधिक सन्तोषजनक विधि

सारणी 16 6

अधिरस्थायी निर्माणों के उत्पादन के फडरल रिजर्व सूचकांक के चक्रीय विचलनों के लिए s परिकलन तथा s के सम्बन्ध से चक्रीय विचलन 1959—1964

मूल सूचक x को से अक्टूबर 1961 में से 1957=100 और उस तिथि के पश्चात् 1957—1959=100

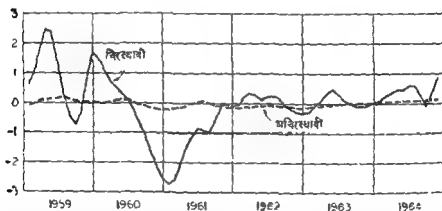
वर्ष तथा मास	चक्रीय विचलन*	स्तम्भ (2) के y वर्ग	चक्रीय विचलन s पदों में स्तम्भ (2) — s
(1)	(2)	(3)	(4)
1959			
जनवरी	0 7	0 49	—0 04
फरवरी	+0 1	0 01	+0 01
मार्च	+1 4	1 96	+0 08
अप्रैल	+2 3	5 29	+0 13
मई	+2 6	6 76	+0 15
जून	+3 2	10 24	+0 18
जुलाई	+3 3	10 89	+0 19
अगस्त	+2 5	6 25	+1 14
सितम्बर	+1 3	1 69	+0 07
अक्तूबर	+0 7	0 49	+0 04
नवम्बर	+1 1	1 21	+0 06
दिसम्बर			
1964			
जनवरी	+0 6	0 36	+0 03
फरवरी	+0 5	0 25	+0 03
मार्च	+0 8	0 64	+0 05
अप्रैल	+1 3	1 69	+0 07
मई	+1 6	2 56	+0 09
जून	+1 7	2 89	+0 10
जुलाई	+1 8	3 24	+0 10
अगस्त	+2 0	4 00	+0 11
सितम्बर	+2 2	4 84	+0 12
अक्तूबर	+2 5	6 25	+0 14
नवम्बर	+2 6	6 76	+0 15
दिसम्बर	+2 9	8 41	0 16
योग	+1 6	223 56	

* चक्रीय विचलनों के जोड़ की जांचा शून्य के बहुत नजदीक हो सकती है यदि उसी साल में आने वाले आंकड़ों के साथ जैसे कि विचारार्थीन आंकड़ हैं यूनान वगैरह द्वारा उपनि की जोड़ा गया है। क्रुनिष्ठता रहित आंकड़ फडरल रिजर्व बुलटिन के विभिन्न अंक में। उपनि तथा अनियमित गतिशीलता को द्वारा हटाया गया।

प्रत्येक श्रेणी को उसी के मानक विचलन के सन्दर्भ में अभिव्यक्त करने तथा केवल एक ऊर्ध्वाधर पैमाने का प्रयोग करने में सन्निहित है।

सारणी 16.6 अचिरस्थायी निर्माणों के सूचकांक के लिए s का मान परिकल्पित करने की प्रविधि का संकेत करती है। s को प्राप्त करने का सूत्र ऐसा है जैसा कि अध्याय 10 के अवर्गित घाटकों को मापन के लिए प्रयोग में लाया गया था। जैसा कि सारणी 16.6 की पादटिप्पणी में दिखाया गया है, अचिरस्थायी निर्माणों के सूचकांक के लिए $s \approx 1.724$ है। चिरस्थायी निर्माणों के सूचकांक के लिए इसी प्रकार के परिकल्पनों से $s = 4.785$ प्राप्त होता है। सारणी 16.6 का अन्तिम स्तम्भ अचिरस्थायी निर्माणों के सूचकांक से, जहाँ $s = 1.774$ के रूप में अभिव्यक्त है, चक्रीय विचलनों को दर्शाता है। चिरस्थायी निर्माणों के सूचकांक के लिए इसी प्रकार के परिकल्पन दिए गए थे। दोनों श्रेणियाँ चार्ट 16.10 में दिखाई गई हैं, जहाँ यह स्पष्ट है कि दोनों श्रेणियों के उतार-चढ़ावों का विस्तार इस दृष्टांत में अब बहुत समान है। यद्यपि काल-श्रेणी के चक्रीय उतार-चढ़ावों के प्रसामान्य रूप से बटन की प्राप्ति नहीं की जा सकती, तथापि इस बात पर ध्यान देना रुचिकर होगा कि दोनों श्रेणियों के लिए मान ± 3 मानक विचलनों के भीतर है। यह सदा सत्य मिट्ट नहीं होगा, ± 4 के मान, या इससे भी अधिक, कभी-कभी प्राप्त होते हैं।

मानक
विचलन



चार्ट 16.10 चिरस्थायी निर्माणों के उत्पादन तथा अचिरस्थायी निर्माणों के उत्पादन के सूचकांक के मानक विचलनों की इकाइयों में चक्रीय विचलन, 1959—1964। बॉकडों के खोले के लिए सारणी 16.6 की टिप्पणी देखिये।

ऐसे चार्ट को, जैसा कि चार्ट 16.10 है, कभी-कभी चक्रीय चार्ट कहा जाता है क्योंकि इसका उद्देश्य चक्रीय गतियों की तुलना को सुगम बनाना है। इस प्रकार के चार्ट के ऊर्ध्वाधर पैमाने को जब अतकनीकी प्रकाशन में देखा जाता है, तो इस बात का विशेष जिक्र किए बिना कि मान s के सम्बन्ध में हैं, इसको “चक्रीय मान” का नाम दे दिया जाता

4. सामान्य वक्र की अध्याय 23 में विवेचना की गई है। s की विशेषता का विमर्श यहाँ संकेत किया गया है पृष्ठ 199—201 पर वर्णन किया गया था।

है। यह लोप मामान्यतया एक जाना-बूझा लोप है, क्योंकि सम्भव है कि समाचारपत्र अथवा पत्रिका के पाठको ने δ के अर्थ को न समझा हो।

दो श्रेणियों के विभिन्न मात्राओं में उतार-चढ़ावों का, परन्तु वार्षिक आँकड़ों से सम्बन्धित, एक और अधिक मंचित चित्रण चार्ट 22.4 और 22.7 में दिया गया है, जो परिवहन और मार्गजनिक उपयोगिताओं और ठेके के निर्माण में कर्मचारियों की संख्या के आँकड़ों को दिखाते हैं, पहले उपनति में विचलनों के रूप में और फिर δ के सम्बन्ध में उपनति से विचलनों के रूप में।

चक्रीय गतियों के आकलन की अन्य विधियाँ

यद्यपि चक्रीय गतियों की अलग करने की अवशेष विधि में विस्तृत परिकलन करना पड़ता है, तथापि यह सर्वाधिक प्रयुक्त विधि है। तीन अन्य विधियों का संक्षिप्त विवरण यहाँ दिया जाएगा।

प्रत्यक्ष विश्लेषण—एक सम्भावना, प्रत्यक्ष महीने को, पिछले वर्ष के सगत महीने की प्रतिशतता के रूप में व्यक्त करने में निहित है। इस क्रिया का परिणाम मोटे रूप से ऋतुनिष्ठ विचरण तथा दीर्घकालिक उपनति का निरमन करना है। तथापि कुछ अवशेष उपनति रहेगी, क्योंकि यदि उपनति ऊर्ध्वगामी है तो प्रतिशतताओं की 100 से ऊपर रहने की सम्भावना रहेगी, परन्तु यदि उपनति निम्नगामी होगी तो प्रतिशतताओं की प्रवृत्ति 100 से कम होने की होगी। यदि अवशेष उपनति का निरमन कर भी दिया जाता है तो परिणाम "चक्र" पूर्व विवेचित उतार-चढ़ाव के प्रकार में कुछ भिन्न होगा, प्रतिशतताएँ चक्रीय स्तर की अपेक्षा चक्रीय परिवर्तन प्रस्तुत करती हैं। इस प्रकार, एक वर्ष का (अथवा अन्य) काल ऊँचा हो सकता है इसलिए नहीं कि यह उच्च स्तर पर था अपितु इसलिए कि पिछला वर्ष विशेष रूप से निम्न था। इस विधि में, व्यापारी के अधिकतर अभिप्रेत प्रदत्त महीने को एक वर्ष पहले के उसी महीने के साथ समानान्तर बनाने का लाभ है।

प्रत्यक्ष विधि का एक भिन्न रूप प्रत्येक मास को कुछ पहले वर्षों के लिए सगत महीने की औसत की प्रतिशतता के रूप में व्यक्त करता है। वर्षों की सराया के विषय में सोचना श्रेणी में चक्रों की लम्बाई पर निर्भर करता है, चक्रों की औसत लम्बाई की प्रायः प्रयोग में लाया जाता है। चक्रीय गतियाँ प्राप्त करने में पहले इसमें अलग-अलग चक्रों की लम्बाई से सम्बन्धित निर्णय लिया जाता है। साथ ही, यह कम होता है कि आर्थिक श्रेणी में चक्र एक-ही विधि (या विन्धार) के हो जिसका परिणाम आँकड़ों की गम्भीर विकृति (टोड-मरोड) हो सकता है।

ह्रात्मक विश्लेषण—जब श्रेणी में चक्रीय गतियाँ लगभग उतनी ही अवधि और विस्तार की हों तो नियमित लहराती हुई गतियों वाली एक ज्या-कोटिज्या अथवा समान प्रकार के चक्र को आसज्जित किया जा सकता है। इस प्रकार के चक्र को चक्रीय अनियमित आँकड़ों अथवा अनियमित गतियों के समरेखण के बाद के आँकड़ों के साथ जोड़ा जा सकता है। क्योंकि नागराजिक विज्ञान तथा व्यापार में पर्याप्त नियमित कालान्तर एवं विस्तार की चक्रीय गतियों वाली श्रेणी दुर्लभ होती है, इसलिए हम इस अन्य में ह्रात्मक श्रेणी के आमजन की विवेचना नहीं करेंगे।⁵

5 एक ज्या-कोटिज्या चक्र के आसज्जित विधि का वर्णन मूल वर्षों की पुस्तक के प्रथम संस्करण में पृष्ठ 554—560 पर, किया गया था।

निर्देश-चक्र विश्लेषण—जब कई काल-श्रेणियों का अध्ययन किया जा रहा है, तो वास्तव में, प्रत्येक श्रेणी की चक्रीय गतियों का दूसरी प्रत्येक विचाराधीन श्रेणी की चक्रीय गतियों के साथ तुलना करना सम्भव हो जाएगा। एक प्रविधि, जिसमें "निर्देश-तिथियाँ" आती हैं, आर्थिक अनुसंधान के राष्ट्रीय व्यूरो द्वारा एवं साधन के रूप में निमित्त की गयी है, जो न केवल प्रत्येक श्रेणी की तिथियों के मानक समुच्चय के साथ तुलना करने और विस्तार तथा संकोच के मध्य सामान्य व्यापार में अलग-अलग श्रेणी के व्यवहार का अध्ययन करने की अनुमति देता है, अपितु विभिन्न अलग-अलग श्रेणियों के लिए परिणामों की तुलना करने की भी अनुमति देता है। निम्नलिखित वर्णन अति सरल है, परन्तु इससे पाठक को प्रविधि का सामान्य ज्ञान प्राप्त हो जाना चाहिए।

प्रथम पग निर्देश-तिथियों का चयन है, जो व्यापार चक्रों के गर्त एवं चोटियों की तिथियाँ हैं। किसी सम्भव मध्यावाह्य को दूर करने के लिये यह स्पष्ट करना अच्छा होगा कि 'व्यापार चक्रों' का अर्थ सामान्य व्यापार गतिविधि में चक्रीय उत्तार-चढ़ाव है, न कि किसी एक पक्ष या क्षेत्र में चक्र। बहुत बड़ी मात्रा में आर्थिक काल-श्रेणी का परीक्षण करने के पश्चात् और 'व्यापार दृश्य के प्रेक्षकों के समकालीन विवरणों' का अध्ययन करने के पश्चात् निर्देश तिथियों का, जिनका प्रयोग सभी अलग-अलग श्रेणियों में किया जाता है, चयन किया गया था।

अगला पग प्रत्येक श्रेणी के लिए प्रत्येक दो आगामी निर्देश गतों के बीच चक्रीय प्रतिफल को प्राप्त करने के हेतु अव्यवितक श्रेणी के अंकड़ों को क्रमबद्ध करना है। विभिन्न श्रेणियों के परिणामों की तुलना करने के योग्य बनाने के लिए प्रत्येक अवधि सभी श्रेणियों के लिए बराबर है। प्रत्येक श्रेणी की प्रक्रिया निम्न प्रकार से चलती है :

- (1) ऋतुनिष्ठ विवरण के लिए अंकड़ों को समजित किया गया है।
- (2) ऋतुनिष्ठतापूर्वक समजित अंकड़ों को "निर्देश-चक्र वृत्तखण्डों" में विभक्त किया जाता है। ये वृत्तखण्ड निकटवर्ती निर्देश गतों के बीच मध्यान्तरो के अनुरूप हैं।
- (3) प्रत्येक वृत्तखण्ड के लिए, वृत्तखण्ड में सभी मूल्यों की प्रतिशतताओं की औसत के रूप में मासिक मूल्यों का वर्णन किया गया है। ये "निर्देश चक्र मन्बन्धी" हैं। ध्यान दीजिए कि इस पग के परिणामस्वरूप सभी श्रेणियाँ प्रतिशतता अवस्था में हैं बिना इस विचार के कि मौलिक इकाई क्या है। इस पर भी ध्यान दीजिए कि यह पग अन्तः चक्र उपनति का निरसन कर देता है क्योंकि प्रत्येक चक्र के सापेक्षों की औसत 100 है, परन्तु यह आन्तरिक चक्र उपनति का निरसन नहीं करता। आन्तरिक चक्र उपनति का सम्मिलित होना वांछनीय समझा जाता है। क्योंकि यह "व्यापार चक्र के दौरान क्या घटता है, इसको स्पष्ट करने तथा इसका वर्णन करने में सहायता करता है।"
- (4) व्यापार चक्र में उन्हीं नौ अवस्थाओं के अनुरूप प्रत्येक निर्देश चक्र वृत्तखण्ड को नौ अवस्थाओं में तोड़ा जाता है, और नौ अवस्थाओं में से प्रत्येक के लिए निर्देश चक्र सापेक्षों की औसत ली जाती है। नौ अवस्थाएँ इस प्रकार हैं -

- I. प्रारम्भिक गर्त पर केन्द्रित तीन महीने।
- II. प्रसारकाल का प्रथम तिहाई।
- III. प्रसारकाल का दूसरा तिहाई।
- IV. प्रसारकाल का अन्तिम तिहाई।

- V. चाँटी पर केन्द्रित तीन मास ।
- VI. सकुचन काल का प्रथम तिहाई ।
- VII. सकुचन काल का दूसरा तिहाई ।
- VIII. सकुचन काल का अन्तिम तिहाई ।
- IX. सीमान्त गतं पर केन्द्रित तीन मास ।

प्रत्येक निर्देश चक्र दृष्टवर्ण के लिपि नौ अवस्थाओं वाली ओमतें एक श्रेणी में अनियमित गतियों को कम करने में काम करती है और विचाराधीन विशिष्ट श्रेणी के लिए एक निर्देश चक्र प्रतिरूप देती हैं ।

आर्थिक अनुसंधान का राष्ट्रीय दृष्टि भी विशिष्ट चक्र विश्लेषण का प्रयोग करता है । यह प्रविधि पूर्ववर्णित प्रविधि से इस दृष्टि से भिन्न है कि इसमें मोड़ बिन्दु, अवस्थाएँ और प्रतिक्रिया स्वयमेव प्रत्येक स्वतन्त्र श्रेणी में निर्धारित किए जाते हैं । इस पुस्तक में विशिष्ट चक्र विश्लेषण की ओर हम और अधिक ध्यान नहीं देंगे, केवल यह संकेत करेंगे कि चार्ट उन विशेष श्रेणी के लिए तैयार किए जा सकते हैं जिसमें विशिष्ट चक्र और निर्देश चक्र दोनों इसलिए दिखाए जाते हैं ताकि दोनों की तुलना की जा सके । चक्रों की दूसरे साधनों से भी तुलना की जा सकती है जिसमें “अग्रता” तथा “पश्चता” एवं “समविन्यास के सूचकांक” का परिकल्पन सम्मिलित है ।

सूचकांक-निर्माण के मूल तत्त्व

सूचकांको का अर्थ तथा प्रयोग

सूचकांक सम्बद्ध चरो के समूह की मात्रा के अन्तरो को मापने के लिए युक्तियाँ हैं। इन अन्तरो का सम्बन्ध चाहे वस्तुओं की कीमतों से हो, उत्पादित, क्रय-विक्रय की गई या उपभोग की गई वस्तुओं की भौतिक मात्रा से हो, या "बुद्धिमत्ता", "गौरव" या "कार्य-क्षमता" जैसे मन्तव्यों से हो। ये तुलनाएँ समय की अवधियों में हो सकती हैं; स्थानों में हो सकती हैं, समान वस्तुओं जैसे व्यक्तिगत, स्कूलों या वस्तुओं में हो सकती हैं। इन प्रकार हमारे पास या तो विभिन्न समयों के या विभिन्न देशों के या स्थानों के निर्वाह स्तरों की तुलना करने वाले सूचकांक हो सकते हैं, अथवा विभिन्न वर्षों में उत्पादन की भौतिक मात्रा के या विभिन्न स्कूल पढ़ाई की कार्यक्षमता के सूचकांक हो सकते हैं। सूचकांको के कुछ उपयोगों का नीचे वर्णन किया जाता है।

1. समय की अवधि में कीमत स्तर में परिवर्तन कदाचित् सूचकांक का सबसे अधिक प्रतिष्ठ प्रकार है। पर्याप्त समय से इस प्रकार के सूचकांको का प्रयोग होता रहा है और वर्तमान समय में इनका बहुत प्रयोग किया जा रहा है। कीमत सूचकांको का एक प्रयोग, जिसमें पाठक पहचानें हो परिचित है, भौतिक मात्राओं में बदलने के लिये मूल्य श्रेणी की अपसृष्टि है। पीछे सारणी 11.1 का उल्लेख करते हुए हमें उपभोक्ता कीमत सूचकांक से विभक्त करने में पता चलता है कि साप्ताहिक मजदूरी को साप्ताहिक वास्तविक मजदूरी में बदला जा सकता है। इसी प्रकार से हम निर्माण खर्चों के एक सूचकांक द्वारा अपसृष्टि करने से भौतिक आधार प्रवृत्ति निर्माण मीट्रो के मूल्य को प्रस्तुत करने वाली काल-श्रेणी में बदलने की इच्छा कर सकते हैं।

कीमत शक्तियों का, उनके कारण को खोजने के लिए या आर्थिक समाज पर उनके प्रभाव को खोजने के लिये, अध्ययन किया जा सकता है। इस प्रकार आर्थिक सम्बन्धों का अध्ययन करने के लिए यह प्रथा है कि कीमत-स्तर में परिवर्तनों की मूल्य श्रेणी के परिवर्तनों, जैसे स्वर्ण, बैंक रिजर्व, बैंक निक्षेप, बैंक नामे, तथा उत्पादन की भौतिक मात्रा से तुलना की जाए। इस प्रकार के अध्ययनों में कीमत सापेक्षों का न केवल प्रामाण्य परिवर्तन आता है अपितु निम्नलिखित भी आते हैं : (क) कीमत मापेको का विश्लेषण, (ख) कीमत मापेको के बारम्बारता बंटनों का आकार, (ग) इस प्रकार की प्रतिष्ठताओं की सामाजिक अवस्थाओं में परिवर्तन (कीमतों का विस्थापन), (घ) विक्रय करने के लिये प्रस्तुत मात्रा के परिवर्तनों के साथ कीमत में परिवर्तन, (ङ) कीमत में परिवर्तनों के साथ वर्षों या उत्पादन की मात्रा में परिवर्तन (माँग अथवा पूर्ति की लोच),

(च) वारवारता जिनके साथ विभिन्न कीमतें बदलती है, (छ) माँग में परिवर्तनों के साथ कीमत परिवर्तनों का परिमाण ।

कीमत स्तर में परिवर्तनों को, उन्हें नियन्त्रित करने के लिए मापा जा सकता है । अतः 1933—34 में सामान्य कीमत स्तर को बढ़ाने के लिए मोने की अधिकृत कीमत को बढ़ाना एक आशिक प्रयास मात्र था । सोने की कीमत बढ़ाये जाने के बाद यदि सूचकांक उच्च कीमत-स्तर दर्शाते, तो परिणाम को इस बात का संकेत माना जा सकता था कि स्वर्ण मोने प्रभावपूर्ण थी ।

कई बार सरकार का प्रभाव, कीमत स्तर को बढ़ाने, घटाने अथवा स्थिर रखने के लिए नहीं अपितु दूसरे की अपेक्षा कीमतों के एक समूह को बढ़ाने के लिए प्रयोग में लाया जाता है । इस प्रकार संयुक्त राज्य सरकार ने कृषि सम्बन्धी कीमतों को औद्योगिक कीमतों की अधिकृत 'ममानता' तब बढ़ाने के लिए बहुत सी युक्तियाँ विचारी तथा कुछ का प्रयोग किया । समानता सूचकांक का वर्णन अध्याय 18 में किया गया है ।

द्वितीय विश्व युद्ध से लेकर बढ़ती हुई सट्टा में ऐसे नामूलिक-सौदा समझौते किये गए हैं जो उपभोक्ता कीमत सूचकांक में परिवर्तनों से उत्पन्न स्वतः मजदूरी समझौतों की व्यवस्था करते हैं । थोक कीमत सूचकांक पर आधारित इसी प्रकार के समझौतों को बनाने के लिए कुछ व्यावसायिक सौदों का भी कार्यान्वित किया गया है । उस प्रकार के समझौतों को प्रायः 'प्रसारक (या प्रसार) खण्ड' कहा गया है । इन समझौतों या सौदों के सामान्यतया दो भाग होते हैं एक प्रयुक्त किये जाने वाले सूचकांक का, प्रायः संयुक्त राज्य ब्यूरो ऑफ़ लेबर स्टैटिस्टिक्स द्वारा निर्मित सूचकांक का निर्देश करता है, दूसरा आधार राशि की परिभाषा करता है, जिसे सूचकांक में प्रतिशतता परिवर्तनों से गुणा किया जाता है । अधिकतर मजदूरी सौदा में जिनमें प्रसारक खण्ड होते हैं, ऐसी व्यवस्था होती है कि कोई निम्नगामी समझौता मौलिक आधार राशि से कम नहीं होगा । अम सत्यिकी ब्यूरो ने यह अनुमान लगाया है कि लगभग 35 00 000 श्रमिक उसी ब्यूरो द्वारा प्रकाशित ब्यूरो ने यह अनुमान लगाया है कि लगभग 35 00 000 श्रमिक उसी ब्यूरो द्वारा प्रकाशित उपभोक्ता कीमत सूचकांक से सम्बद्ध प्रसारक पदा वाले ठेकों के अन्तर्गत आ जाते हैं । विभिन्न क्षेत्रों के बीच कीमत कीमत तुलनाओं के उदाहरण प्रचलित नहीं हैं । इस प्रकार की तुलनाएँ करना बहुत कठिन है, क्योंकि विभिन्न स्थानों पर उत्पन्न की गई और अथवा उपभोग की गई वस्तुओं की सापेक्षिक महत्ता बहुत अधिक भिन्न रहती है । इस प्रकार के सूचकांक का एक सचिकर उदाहरण समार भर के 45 नगरों के लिए "संयुक्त राष्ट्र कर्मचारी वर्ग का निर्वाह व्यय" है । इस सूचकांक में, न्यूयार्क नगर = 100 । तथापि सूचकांक का सम्बन्ध केवल संयुक्त राष्ट्र के कर्मचारी वर्ग से है और सामान्य जनसंख्या के निर्वाह व्यय से इसका सम्बन्ध नहीं है ।

2 कुछ संस्थाएँ समय की एक अवधि में आने वाले भौतिक परिवर्तनों की तुलना करने वाले सूचकांकों के सकलन करती हैं । ये व्यापार, औद्योगिक उत्पादन, कारखाना उत्पादन, विप्रेय, वस्तुओं का भण्डार, आयात तथा निर्यात, इत्यादि के भौतिक परिमाणों का वर्णन करते हैं । काल-श्रेणी के विश्लेषण में हमने पहले ही इस प्रकार के सूचकांक का प्रयोग किया है । ये दीर्घकालीन उपनियमों अतुल्य विचरणों, तथा व्यापार क्षेत्रों के ऐतिहासिक अध्ययन, में अत्यधिक उपयोगी हैं, तथा उन व्यक्तियों के लिए जो वर्तमान व्यापार स्थितियों में परिचित रहना चाहते हैं, अत्यवश्यक हैं ।

3 अधिकतर पूर्व-सूचना देने वाली संस्थाओं के द्वारा पूर्व-सूचना देने वाले सूचकांक का सकलन किया जाता है। यद्यपि बहुत से सूचकांक सिद्धान्त में ठीक दिखाई देते हैं, और व्यवहार में भी जब उन्हें वास्तव में प्रयोग की गईं तो पूर्व-अवधियों पर लागू किया जाता है, दुर्भाग्य से उनमें से अधिकतर वर्तमान प्रयोग में विफल रहते हैं। पूर्व-सूचना देने वाले सूचकांक के कुछ सांख्यिकीय रूपों का विवरण अध्याय 22 में दिया गया है।

4 सूचकांक के दूसरे प्रकार स्वभाव में भिन्न और सरलता में कम हैं। एक प्रकार के उदाहरण के लिए, 1966 में ओहियो राज्य विश्वविद्यालय के अपराध-विज्ञानविदों ने डा० वास्टर सी० रैकलैंस के नेतृत्व में, जिन्होंने 24 प्रश्नों की एक सरल परीक्षा का प्रयोग किया एक "अपराध विभव" के सूचकांक का निर्माण किया।

सूचकांक के निर्माण में समस्याएँ

सूचकांक की रचना में जिन समस्याओं का एक मारियकी-विद् को सामना करना पड़ता है, वे हैं

- (1) जिस उद्देश्य के लिए सूचकांक का सकलन किया जा रहा है, उसकी परिभाषा।
- (2) सूचकांक में सम्मिलित करने के लिए श्रेणी का चयन।
- (3) आंकड़ों के स्रोतों का चुनाव।
- (4) आंकड़ों का संग्रह।
- (5) आधार का चयन।
- (6) आंकड़ों को मिलाने की विधि।
- (7) भारित करने की प्रणाली।

आंकड़ों को इकट्ठा करने तथा परिकलन करने से पूर्व यह जानना महत्वपूर्ण है कि हम किसे मापने का प्रयास कर रहे हैं और यह भी कि हम अपने मापों का किस प्रकार प्रयोग करना चाहते हैं। विचाराधीन उद्देश्य के लिये उपयुक्त प्रकार में बनाया गया सूचकांक एक अत्यन्त उपयोगी तथा शक्तिशाली साधन है, यदि यह उचित प्रकार से सकलित और रचित न हो तो यह हानिकारक हो सकता है। यदि हम निजी आवासों के निर्माण की लागत में परिवर्तनों का जानना चाहते हैं तो हमें भारी निर्माण इस्पात की कीमतों को एकत्रित नहीं करना चाहिए। इसी प्रकार से यदि हम घरेलू कपड़े की लागत में परिवर्तनों का मापना चाहें तो हमें रुई की कीमतों को प्रति गॉंठ के हिसाब से एकत्रित नहीं करना चाहिए। परचून व्यापार की प्रगति को मापने के लिए हमें विभागीय भण्डार विक्रयों के प्रतिदर्शों का प्रयोग न करना चाहिए न कि थोक काम करने वालों तथा थोक विनिर्माताओं के आंकड़ों को।

जब हम उपभोक्ता के कल्याण का माप करने का प्रयास उसकी मुद्रा आय को वास्तविक आय में बदल कर अर्थात् अपस्फीति करके (देखें सारणी 11.1) कर रहे हों

1. मुनास्टरि प्रैस "एन इक्वेल आन क्राइम पोटेन्सियल", पेंसिल्वेनिया स्टेट्स एन्ड स्ट्रिप्स, अप्रैल 8 1966, पृष्ठ 10।

तो अपस्फोति कारक के रूप में थोक-कीमत श्रेणी का प्रयोग स्पष्ट हो नुटिपूर्ण होगा। और यदि हम उपभोक्ता को प्राप्त वस्तुओं के उत्पादन का माप करना चाहें तो हम औद्योगिक उत्पादन के सूचकांक का प्रयोग नहीं करें अपितु विभिन्न उपभोक्ता वस्तु उद्योगों से सूचकांक का सकलन करने का प्रयास करेंगे।

उपर्युक्त मातृ समस्याएँ एक जैसी महत्त्वपूर्ण नहीं हैं और न ही वे सदा एक दूसरे से स्वतन्त्र हैं। इस प्रकार, भागित करने के साधारण ढंग में कीमत सूचकांक के लिए, सूचकांक के प्रत्येक उपसमूह में विभिन्न भार प्रयुक्त करने वाली प्रणाली की अपेक्षा एक भिन्न तथा वस्तुओं की अधिक विशाल सूची की आवश्यकता होगी। इसी प्रकार, जैसे बाद में व्याख्या की जाएगी, प्रयोग की जाने वाली भागित प्रणाली आंशिक रूप से आंकड़ों को मिलाने के ढंग पर निर्भर करती है। भागित करने के दोनो ढंग तथा प्रणाली को एक सूत्र में सम्मिलित करना तथा उसी भाग में दोनो यशों की व्याख्या करना सुविधाजनक है। ऐसे ही ऊपर बताई गई समस्या 2 और 3 पर एक साथ विचार करना चाहिए। यदि कीमत सार्वभौम के व्यवहार को पहले विचारता जाता है तो इन बातों की अधिक पूर्ण समझ प्राप्त हो सकती है।

मूल्य-मापकों के व्यवहार का एक दृष्टान्त

संयुक्त राज्य का श्रमिक आंकड़ों सम्बन्धी ब्यूरो वर्तमान समय में लगभग 2,200 पृथक्-पृथक् वस्तुओं या श्रेणी वाली श्रेणी कीमतों के सूचकांक का संचालन करता है। हम सूचकांक का वर्णन आगामी अध्याय में किया गया है। यह ब्यूरो बहुत से समूहों तथा उप-समूहों के थोक कीमत सूचकांक तथा पृथक्-पृथक् वस्तुओं के कीमत-मापकों को प्रकाशित करता है।

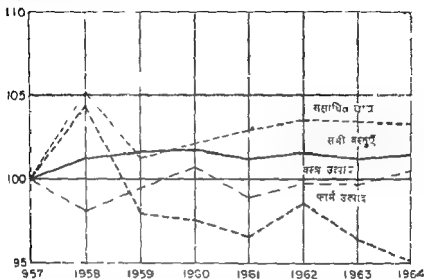
सभी वस्तुओं को मिलाकर तथा तीव्र श्रुत्य उप समूहों के लिए सूचकांक को चार्ट 17.1 में दिखाया गया है। तुलना को सरल बनाने के लिए चारों सूचकांक को प्रवाहित आधार, 1957—1959=100 की अपेक्षा 1957=100 के साथ दिखाया गया है। प्रत्येक सूचकांक को उसके 1957 के मूल्य से भाग करके यह प्राप्त किया जाता है। एक अन्य प्रमुख उप-समूह "फार्म उत्पादन तथा तैयार भोजन के अतिरिक्त सभी वस्तुएँ" का चार्ट 17.2 में विश्लेषण किया गया है, जिसमें इन मुख्य वर्ग के 13 विभिन्न भिन्न उपवर्गों के परिमर को दिखाया गया है।

चार्ट 17.2 में, किसी एक वर्ष में परिमर को दिखाने के लिये समूह सूचकांक को विवरणों को छोड़ा गया है। चित्र उस उप-समूह के निच है जो समूह सूचकांक में ऊपर प्रतिशतता बिन्दुओं की उच्चतम संख्या का पञ्जीकरण करता है और उस उपसमूह के लिये जो समूह सूचकांक से सबसे अधिक नीचे रहता है। 1963 तथा 1964 में निविष्ट उत्पादनों का मुख्य सूचकांक अन्य उपसमूहों से इतना अधिक बढ़ गया, कि इसे हल्की टूटी हुई रेखा में दिखाया गया है, 1963 और 1964 के ठोस वक्र पर बिन्दु, उच्चतम उपसमूह से प्रगते उपसमूह का प्रतिनिधित्व करते हैं।

चार्ट 17.2 में विशेष उचित की बात यह है कि हम आधार वर्ष से जितना आगे जाएंगे उप-समूह कीमतों की समूह सूचकांक से उतना ही अधिक परे हटने की प्रवृत्ति

होगी। तथापि, यदि समूह सूचकांक कम हो जाए और 100 पर पहुँच जाए तो यह बिल्कुल सम्भव है कि उपसमूह सूचकांक पुनः एक दूसरे के निकट खिंच जाएँ।

प्रतिगत

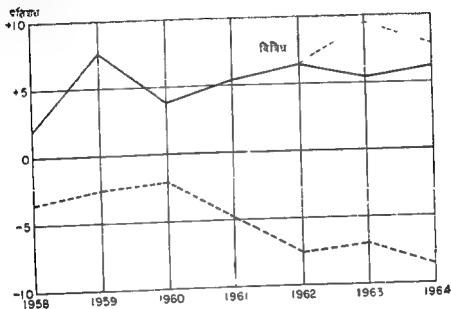


चार्ट 17.1 समुक्त राज्य अम सार्विकी व्यूरो के सभी वस्तुओं, फार्म उत्पाद समाधित लाघ, तथा वस्त्र उत्पाद एवं सिले वस्त्रों के धोक कीमत सूचकांक, 1957—1964। अको को 1957—1959=100 से 1957=100 में बदल दिया गया है ताकि भारी धेणियों के व्यवहार की सरलता से तुलना की जा सके। आकड़े स्टैटिस्टिकल ऐडमिनिस्ट्रेशन ऑफ दि युनाइटेड स्टेट्स के विभिन्न अका तथा समुक्त राज्य वाणिज्य विभाग, व्यापार अर्थशास्त्र बाजारों के सर्वे आफ करन्ट बिजनेस, जून 1965 पृष्ठ 58 में।

दूसरी बात जिसका प्रायः प्रसंग आता है, परन्तु यहाँ अध्ययन किए गए सीमित काल की आवृत्त करने वाले आंकड़े जिसकी पुष्टि नहीं करते, यह है कि जब कीमत उपनति ऊर्ध्वगामी है तो सूचकांक की मघटक श्रेणी के कीमत सापेक्षों का वटन भी अवश्यमेव तिरछा होगा। बहुत से व्यक्ति इस विचार के हैं कि यह कीमत सापेक्षों के बारवारता बढनो की स्वाभाविक विशेषता है, क्योंकि कीमतें अनिश्चित ऊँचाई तक चढ़ सकती हैं परन्तु केवल शून्य तक गिर सकती हैं।¹ दूसरी ओर, यह सुभाव दिया जा सकता है कि कीमतों

2 यह अवसर सत्य नहीं है, जैसा कि हम निम्नलिखित उदाहरणों से देख सकते हैं। (1) मयूक्त राज्य अमरीका के राजकोष पत्र, प्रायः 90 दिन के पत्र, प्रायः वेंको यह दूसरे निवेशकों को मिलिकाटा पर बेच दिए जाते हैं—अथ त उन्हें प्रत्यक्ष मूल्य से कम पर बेचा जाता है। खेर प्रत्यक्ष मूल्य पर तीन मास बाद उन्हें छुड़ाया जाता है। अन्तर निवेशक के लाभ या राजकोष की कीमत को मापता है। एक वर्ष में हुडियों की 12 श्रेणियाँ अन्तिम मूल्य से अधिक पर राजकोष से विक्रय की गईं जिसका यह प्रभाव हुआ कि उन्होंने कृणात्मक कीमत दी। हुडी केता, कृणात्मक लाभ प्राप्त करते हुए हुडियों को पास रखने के अधिकार के लिए थोड़ा सा प्रीमियम देते थे। (2) एक अन्य वर्ष न्यूयार्क नगर का एक धातु-वस्तुओं का निर्माता व्यापारियों का मँगनेशियम छीलन तथा अन्य मँगनेशियम कतरन बेचने में सफल हुआ। बाद में उसी वर्ष वह इसे न बेच सका अपितु उसे ठेल भर कर फिक्काने पड़े। इस प्रकार रद्दी माल की, वर्ष के शरम्भ में जो उसने घनात्मक कीमत प्राप्त की थी वर्ष के अन्त में यह कीमत कृणात्मक या शून्य से कम हो गई।

और कीमत सापेक्षों पर, गणित शास्त्र के नियमों की अपेक्षा अर्थशास्त्र के नियमों का अधिक प्रभाव होता है। कीमत-वृद्धि तथा कीमत-संकोच की सीमाएँ निश्चित रूप से व्यक्तियों द्वारा विभिन्न कीमतों पर खरीदने और बेचने की इच्छा से प्रभावित होती हैं। तथापि कीमत परिवर्तन की दिशा सम्भवतः एक सूचकांक के अवयवों की विषमता की दिशा पर कुछ प्रभाव डालती है।



चार्ट 17.2 "काम उत्पाद तथा सहायित खाद्य के प्रतिशत सभी वस्तुओं" के लिये संयुक्त राज्य अर्थ सांख्यिकी ब्यूरो के थोक कीमत सूचकांक से अधिकतम विचलन, उसी सूचकांक के 13 उप-समूहों द्वारा प्रदर्शित, 1958—1964। विचलन अत्यधिक भिन्न उप-समूहों तथा प्रत्येक वर्ष के "अर्थवस्तु" सूचकांक में अन्तर को प्रस्तुत करते हैं, उदाहरणार्थ, 1962 में अर्थ 107.4—100.8 = +6.6 तथा 93.3—100.8 = -7.5। हल्की दूदी रेखा 1962 तथा 1963 के विविध उत्पादों के लिए दियाए गए विचलनों का अनुसरण करती है जो उन्हीं वर्षों में उमने कम उच्चतम उप-समूह में (गहरी रेखा से प्रदर्शित) विशेष रूप से अलग हो गई थी। आंकड़े स्टैटिस्टिकल एन्स्ट्रूक्ट ऑफ दि युनाइटेड स्टेट्स, 1964, पृष्ठ 352—353, तथा सर्वे ऑफ करन्ट बिजनेस जून 1965, पृष्ठ 58 में।

सूचकांकों के लिये आंकड़े

यद्यपि सूचकांकों की रचना करने में घरो को जोड़ने की विधि पर्याप्त महत्ता रखती है तथापि यह उस समय महत्त्वहीन है जब कि आंकड़ों का जो कि सूचकांक का कच्चा मान है, चयन करने की समस्या को नुलना की जानी है। इस बात पर बहुत अधिक जोर नहीं डाला जा सकता। आंकड़े अवश्यमेव सही, समान, तथा प्रतिदर्श प्रतिनिधि होने चाहिए। एक प्रतिदर्श के प्रतिनिधि होने की आशा तब तक नहीं की जा सकती जब तक कि उमने मंदों की पर्याप्त संख्या सम्मिलित न की जाए। इस विचार को अन्य शब्दों में इस

प्रकार वर्णित किया जा सकता है विश्वन्त सूचकाको को प्राप्त करने के लिये प्रसंगानु-
कूल मदों के पर्याप्त बड़े प्रतिदर्शों का अवश्य चुनना चाहिये।

जैसाकि हम पहले देव चुके हैं, कीमत सूचकाक के लिये चुनी जाने वाली वस्तुएँ
और चुनी जाने वाली दर का प्रूप इस बात पर निर्भर करता है कि किस वस्तु को मापा
जा रहा है। थोक कीमत सूचकाक के लिए थोक कीमतें चाहिए। उपभोक्ताओं के द्वारा
दी जाने वाली कीमतों के सूचकाक के लिए केवल भोजन की परचून कीमतों की ही
आवश्यकता नहीं होती। वरन् किराया, गैस एवं विद्युत् दरें, ऋपड़े की कीमतें, यातायात,
शुल्करी सहायता इत्यादि की भी आवश्यकता होती है, जो उन व्यक्तियों की श्रेणी पर
लाग होती है जिनके लिये रहन-महन की लागत सुनिश्चित की जानी है। एटलान्टा,
जार्जिया में फ्रेम भवनों को बनाने का परिवर्तनशील लागत के सूचकाक में एटलान्टा में
बनाए गए फ्रेम भवनों में प्रयुक्त वस्तुओं तथा श्रम की मदों को सम्मिलित करना चाहिये।
कीमतें एटलान्टा में प्रयुक्त वस्तुओं की कीमतें होनी चाहिये और मजदूरी गटलान्टा में
प्रयुक्त श्रमिक की मजदूरी होनी चाहिये। य उदाहरण एवं तर्क का संकेत करते हैं कि
हर समय उस उद्देश्य को त्रिमूर्ति के लिये सूचकाक का संकलन किया जा रहा है, मस्तिष्क में
रचना इतना महत्त्वपूर्ण क्यों है। सूचकाक का उद्देश्य तथा यह किसका माप करना चाहता
है, ये बाने आधार के चयन, प्रयुक्त भारों, तथा प्रयुक्त सूत्रों को भी प्रभावित करेंगी।

सूचकाक के लिये जब आंकड़ों के स्रोतों का चयन करें तो हम नियमित रूप से
प्रकाशित की जाने वाली दलों पर निर्भर कर सकते हैं या व्यापारियों, उत्पादकों, निर्यात-
कर्ताओं या अन्यो में, जोकि आवश्यक आधारभूत जानकारी रखते हैं, मामयिक विशेष रिपोर्टें
प्राप्त की जा सकती हैं। इन दानों में से किसी भी परिस्थिति में हमें यह निश्चय कर लेना
चाहिये कि आंकड़े मापी जाने वाली वस्तु से सुनिश्चित सम्बन्ध रखते हैं। इस प्रकार,
यदि भोजन के परचून कीमत परिवर्तनों को मापा जा रहा है तो सुपर बाजारों, मूल लाला
भण्डारों, स्वतन्त्र भण्डारों तथा अन्य महत्त्वपूर्ण निर्गमों से दरें प्राप्त की जानी चाहिए।
इन विभिन्न स्रोतों का बिना मोचे-ममके मिश्रण नहीं कर देना चाहिये अपितु मिश्रण करते
समय उन्हें उचित रूप से भारित कर लेना चाहिये। मास की प्रथम तारीख की दरों, मास
के मध्य की दरों, तथा सामान्य दरों को सामान्य रूप से एक सूचकाक में नहीं मिलाना
चाहिये।

जा वर्णित अभी किया जाना है वह आंशिक रूप से इस पुस्तक के पूर्व अध्यायों में,
विशेष रूप से अध्याय 2 में, वर्णित सिद्धान्तों का अनुप्रयोग है। सूचकाको के आंकड़ों के
उचित चयन का बड़ा महत्त्व इन सिद्धान्तों को आपस में एक साथ लाने को न्यायसंगत
बनाता है, यद्यपि इसमें कुछ पुनरावृत्ति निहित है।

परिशुद्धता—कुछ सांख्यिकीय आंकड़ा पर जो कि परिशुद्धत मुद्रित दृष्टिगोचर होते
हैं, निर्भर नहीं किया जा सकता। यदि आंकड़ों की सूचना देने वाला व्यक्ति या कम्पनी
आंकड़ों का प्रयोग परिचानन प्रयत्न कर के लिये करती है तो वे परिशुद्ध हो सकते हैं,
परन्तु यदि किसी बाह्य एजेंसी को देने के लिये आंकड़ों के सांख्यिकीय विवरण मात्र हैं
तो उनका संकलन मूलतः लापरवाह तथा उदासीन विधिको द्वारा किया जा सकता है जिनकी
स्वै वेबल शीघ्रातिशीघ्र प्रपत्र को मस्तिष्क-चिह्नों से भरने की होती है। अतः सांख्यिकी-विद्
के लिये यह ज्ञात कर लेना उचित है कि आंकड़े किस प्रकार एकत्रित किये गए हैं और उसे
अपने स्रोत का चयन विवेक से करना चाहिए।

तुलनीयता—वास्तव में एक ही वस्तु के मानक घेड़ विभिन्न तिथियों के बीच तुलनीय होते हैं, तथापि एक 1914 की मोटर गाड़ी की आधुनिक मोटर गाड़ी से तुलना नहीं की जा सकती। न ही एक 'मानक' मोटर गाड़ी की कीमत विभिन्न वर्षों के लिए परिकलित की जा सकती है क्योंकि एक मानक से अधिक में इस प्रकार की मानक मोटर गाड़ी सामान्यतः प्राप्त नहीं होती। उच्च विनिर्मित वस्तुओं के सम्बन्ध में जिनको आगामी वर्षों में विकसित किया जाता है कीमत दरो की ऊर्ध्वगामी प्रवृत्ति अधिकतम होती है, परन्तु यह कुछ कृषि सम्बन्धी वस्तुओं में भी पाई जाती है क्योंकि इनके उत्पादन में पूर्ववर्ती की अपेक्षा उत्तरवर्ती वर्षों में अधिक मसाधन अपेक्षित होता है। अतः यह सम्भव है कि अधिकांश की कीमत सूचकांक की ऊर्ध्वगामी प्रवृत्ति हो।

एक इसी प्रकार की समस्या उस समय उत्पन्न हो जाती है जब कोई वस्तु विस्तृत प्रयोग के बाद हट जाती है और नगभग वही हनु पूरा करने वाली भिन्न वस्तु के द्वारा उसका स्थान ग्रहण कर लिया जाता है। उदाहरणार्थ 100 वर्ष पुराने रेल के डिब्बे को सुप्रवाही वातानुकूलित गाड़ियाँ, दबाव वाले वायुयानों, तथा डीलकम बसों ने मात कर दिया है। यदि वाशिंगटन डी० सी० से फ्लिडेलफिया का किराया दोनों समयों में वही मिलता है तो भी हमें यह परिणाम नहीं निकाल लेना चाहिये कि उसी सेवा की लागत उतनी ही रही है क्योंकि सेवा भी बदल गई है। अब यात्रा में कम समय लगता है और इसे अब बहुत अधिक सुख-सुविधा से किया जाता है।

प्रतिनिधित्व—क्योंकि सूचकांक प्रायः प्रतिदर्शों से प्राप्त किये जाते हैं अतः हमें अवश्यमेव इस प्रकार का प्रतिदर्श प्राप्त करने का प्रयत्न करना चाहिये जो कि उस जनसंख्या के अनुरूप व्यवहार करे जिससे कि इसे लिया गया है। सम्भवतः इसे प्राप्त करने का सबसे मन्तोपजनक ढंग यह है कि मूल आकड़ा को समूहों और उपसमूहों में बाँट लो और इनमें से प्रत्येक में से प्रतिनिधि प्रतिदर्श चुनो। समूहों और उपसमूहों में स्तरीकरण का प्रयोग इसलिए किया जाता है क्योंकि विभिन्न आर्थिक कारणों से प्रभावित वस्तुओं के विभिन्न समूहों और उपसमूहों से यह आशा की जा सकती है कि वे इस प्रकार के व्यवहार के प्रति-रूपों का प्रदर्शन करें जो कि प्रत्येक समूह के लिए भिन्न हो और जो दूसरे समूहों और उपसमूहों का प्रदर्शन करने में भी भिन्न हो। उदाहरणार्थ, यदि धोके कीमतों का एक सूचकांक बनाया जा रहा है तो हमें भवन-निर्माण के पदार्थों की गतियों में भिन्न भोजन की कीमत (प्रयत्न मात्रा) की गतियों की आशा करनी चाहिये। इसका एक कारण यह है कि जहाँ भोजन की मांग लोचहीन है वहाँ भवन निर्माण के पदार्थों (जो दर तक चलने वाली वस्तुएँ हैं और भोजन के अतिरिक्त किये जा सकते हैं) की मांग लोचशील है। इसके अतिरिक्त, अल्पकाल में भोजन की पूर्ति पर्याप्त मात्रा में मौसम के ऊपर निर्भर करती है जबकि भवन-निर्माण के पदार्थों की पूर्ति संरचना करने वालों के चेतन नियन्त्रण पर निर्भर करती है।

एक समूह से वस्तुओं का चयन करते समय यह वाछनीय है कि हम उन वस्तुओं को लें जिनकी प्रवृत्ति समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति के अधिक अनुरूप हो वगैरें कि केन्द्रीय प्रवृत्ति का निर्धारण किया जा सके। उन वस्तुओं का चयन कर लेने के पश्चात् जो कि हम समूह की जिससे कि उनको लिया गया है, पर्याप्त प्रतिनिधि हैं, यह निश्चिन करना वाछनीय है कि क्या प्रत्येक समूह के निम्ने आनुपातिक प्रतिनिधित्व प्राप्त कर लिया गया है। उपर मूल्य के आधार पर यदि एक समूह (या समूहों) के प्रतिदर्शों का सारा समूह में वट्टन कम या बहुत अधिक अनुपात हो तो समूह प्रतिदर्श में वस्तुओं की जोड़ा जा सकता है या वस्तुओं

को कम किया जा सकता है। जब इस प्रकार का समझन न किया जा सकता हो (उदाहरणार्थ यदि समूह "मरवनात्मक इस्पान" है और प्रतिदर्श समूह का 100 प्रतिशत भाग है), तो विकल्पस्वरूप उचित भारों का प्रयोग किया जा सकता है।

कई बार प्रतिदर्श के प्रतिनिधित्व के एक अन्य परीक्षण का प्रयोग किया जा सकता है क्या प्रतिदर्श के मूल्य परिवर्तन जनसंख्या के परिवर्तनों से मेल खाते हैं? इस परीक्षण को केवल सम्पूर्ण प्रतिदर्श पर ही लागू नहीं करना चाहिये अपितु उन विभिन्न समूहों और उप-समूहों पर भी लागू करना चाहिये जिनमें इसे विभक्त किया गया है।³

पर्याप्तता—अध्याय 24 में यह दिखाया जाएगा कि यादृच्छिक प्रतिदर्श के अक-गणितीय माध्य की विश्वसनीयता प्रत्यक्ष रूप से सम्मिलित मदों की संख्या के वर्गमूल से सम्बन्धित है। तदनन्तर परिमित जनसंख्या में प्रतिदर्श में, सम्मिलित मदों का अनुपात जितना अधिक होगा (देख परिशिष्ट छ, परिच्छेद 24.2) उतना ही प्रतिदर्श का माध्य अधिक विश्वस्त होगा। प्रयुक्त मदों की पूर्ण संख्या का ठोक नया निश्चित शब्दों में विवरण नहीं दिया जा सकता। जैसा कि सभी भ्रमी देखा गया है, विभिन्न घटक समूहों से सामान्य-तया (वस्तुओं) मदों का चयन कर लिया जाता है ताकि प्रतिदर्श स्तरित हो न कि यादृच्छिक। तदनन्तर समूहों, से मदों का चयन करते समय, सर्वप्रथम साधारणतया अधिक महत्वपूर्ण मदों को चुना जाता है उनके पश्चात् उतनी ही उपयुक्त मदों को सम्मिलित करते हैं जितनी कि माघन अनुमति देते हों। इस प्रकार प्रत्येक स्तर में से मदों को यादृच्छिक नहीं लिया जाता है। इन दो स्थितियों के परिणामस्वरूप, साधारण विश्वस्तता-सूत्र अनुप्रयुक्त नहीं होते।

इस अध्याय के जेप भाग में प्रयुक्त सूचकांक दृष्टान्तों के लिये पाँच नीबू फलादि का चयन किया गया है। पनोरिडा अमूरफल, कैलिफोर्निया नीबू, तथा सतरे की तीन किस्में। पाँच फलों की कीमत प्रमुख मण्डियों में प्रति पेट्री नीलामी की कीमतें हैं। इन छकों के प्रयोग में कुछ कृतिमता आ जाती है, क्योंकि कुल उत्पादन का प्रयोग किया गया जिसमें न केवल "मूल्य वाले उत्पादन" को ही सम्मिलित किया गया अपितु फार्म पर उपयोग किए गए, दान में दिए गए, या न बीने गए या अधिक परिस्थितियों के कारण प्रयोग में न लाए गए तथा रम निकालने, राखि आदि के लिये प्रयोग किये गए फल भी सम्मिलित थे। इस कारण में इस अध्याय के आयामों पृष्ठों में संकलित विभिन्न सूचकांकों को वर्णन किये गए विभिन्न मूल्यों तथा भारत प्रक्रियाओं के व्यवहार के उदाहरण मात्र समझना आवश्यक है।

प्रत्येक फल के लिये ऋतु एक वर्ष के फूल खिलने से प्रारम्भ होती है और आगामी वर्ष फसल के पूर्ण होने पर समाप्त होती है। जैसा कि सारणी 17.1 के नीचे वर्णित है, "1959" 1958—1959 फसल वर्ष का संकेत करता है, और इसी प्रकार अन्य वर्षों के लिए है। निम्न संकलनों में प्रयुक्त फल, उनकी ऋतुएँ तथा प्रति पेटिका भार इस प्रकार हैं :

3 यह परीक्षण इरविंग फिशर की "कुल मूल्य क्सीटी" के समान है जो इस बात की व्याख्या करती है कि माता सूचकांक के साथ गुणा करने से कीमत सूचकांक की जनसंख्या के कुल मूल्य परिवर्तन के अनुपात के बराबर होता चाहिये।

समाहृत कीमत सूचकांक

सूचकांक की रचना करने के दो ढंग हैं (1) कुल मूल्य के परिकलन द्वारा, (2) मापेक्षो की कीमत निकाल कर। प्रथम विधि के द्वारा, जैसी कि इस परिच्छेद में व्याख्या की जाएगी, कीमतों और मात्राओं को तुलनीय बना लिया जाता है, और वे स्वचालित रूप में भारित होकर डालन मूल्य में आ जाती हैं और तब उनको समाहार मूल्यों में जोड़ दिया जाता है। आयायी परिच्छेद में मापेक्षो की कीमत निकालने की विधि का वर्णन किया जाएगा। वहाँ पर यह दिखाया जाएगा कि दोनों विधियाँ, कुछ विशेष परिस्थितियों में, समान परिणाम प्राप्त करने की कवच वैकल्पिक विधियाँ माने हैं। समाहृत विधि परिणाम को सीधे प्राप्त करती है और ऐसा पारणाम उपस्थित करती है जिसका माध्याग्न्य और स्पष्ट अर्थ हो, मापेक्षो का प्रयोग करने वाली विधि अधिक गोंयमोल है और इसका अर्थ भी अधिक तकनीकी है। तथापि कई ऐसी परिस्थितियाँ हैं जिनमें समाहृत विधि लागू नहीं होती और तब मापेक्षो की कीमत का ही आग रह जाता है।

साधारण समाहार—सारणी 17। साधारण समाहृत कीमत सूचकांक की रचना का वर्णन करती है। प्रत्येक वस्तु की कीमतों को किसी प्रदत्त वर्ष में केवल आपस में जोड़ लिया जाता है ताकि उस वर्ष के नियम सूचकांक प्राप्त हो। तब प्रायः सुगमतापूर्वक किसी वर्ष को आधार बना लिया जाता है, जिस 100 के बराबर निश्चित कर लेते हैं। इस दृष्टान्त में सभी सूचकांकों को 1959 की संख्या की प्रतिशतता के रूप में अन्तिम पंक्ति में अभिव्यक्त किया गया है, तथा उनको अंको में से प्रत्येक को आधार अवधि के मूल्य (डालर 32.85) से विभक्त करके और 100 से गुणा करके प्राप्त किया गया है।

यह बिल्कुल स्पष्ट हो जाना चाहिये कि जो प्रभाव कोई वस्तु साधारण समाहृत सूचकांक पर डालती है वह दर की प्रति इकाई कीमत पर निर्भर करता है। इस उदाहरण में प्रमुख मंद वपनिवर्ण बदलती है, परन्तु अग्ररफल किसी भी वर्ष प्रमुख नहीं है। प्रस्तुत की गई प्रत्येक वस्तु की वाणिज्यिक इकाई द्वारा एक समाहृत सूचकांक का भारित किया जाना तबसगत नहीं है क्योंकि यह विभिन्न वस्तुओं की वास्तविक महत्ता के विचार को दृष्टिहीन कर देता है, यह इस प्रकार से यादृच्छ है कि विभिन्न वस्तुओं के सापेक्षिक प्रभाव का निर्धारण उन कारकों द्वारा किया जाता है जो कीमत सूचकांक के उद्देश्य के लिये बिल्कुल अयोग्य हैं। यदि मंद वस्तुएँ प्रति पाउंड कीमत में कर दी जाएँ तो किसी भी प्रकार से समस्या का समाधान नहीं होगा, क्योंकि कुछ वस्तुएँ, जैसे हीरे, प्रति पाउंड बहुत अधिक मूल्यवान हैं जबकि वे हमारे आर्थिक जीवन में बहुत अधिक महत्वपूर्ण नहीं, जबकि कोयला जो कि अत्यधिक महत्वपूर्ण है प्रति पाउंड अपेक्षितया सस्ता है। साथ ही कुछ वस्तुएँ, जैसे विद्युत् शक्ति या मानव श्रम, को पाउंड आधार पर नहीं बदला जा सकता। एक दूसरा समाधान है आधार वर्ष में एक डालर से जितनी मात्रा खरीदी जा सकती है उसे दर की इकाई के रूप में ले लो। परन्तु यह भी अधिक तर्कसगत नहीं है, क्योंकि प्रति वर्ष यदि प्रत्येक वस्तु पर वही मुद्रा-मात्रा व्यय की जाए तो यह बहुत असाधारण होगा।

भारित समाहृत सूचकांक की रचना का विचार करने से पूर्व यह सहायक हो सकता है कि जिस ढंग का हमने अभी प्रयोग किया है उसका चिह्न रूप में वर्णन करें। सूत्र है

$$P = \frac{\sum p_n}{\sum p_o}$$

जबकि P का अर्थ है कीमत सूचकांक p पृथक्-पृथक् वस्तु की कीमत का संकेत करता है, पदांक h आधार काल का, जिसमें कीमत परिवर्तनों को मापा जाता है, संकेत करता है, और पदांक h प्रदत्त काल का संकेत करता है जिसकी तुलना आधार से की जा रही है। अब यदि एक विशेष वर्ष के लिये (जैसे 1964 1959 आधार के साथ) सूत्र की व्याख्या करनी हो तो इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$P_{59\ 64} = \frac{\sum p_{64}}{\sum p_{59}}$$

भारित समाहार—प्रत्येक वस्तु का मूचकांक पर उचित प्रभाव हो इसके लिये यह शिक्षाप्रद है कि कीमतों के साधारण समाहार की अपेक्षा जानबूझ कर भीतर समाहार का प्रयोग किया जाए जैसा कि हम देख चुके हैं जिसमें गुप्त भार करना आ जाता है। भारित समाहत मूचकांक की रचना के लिये विशिष्ट वस्तुओं की निश्चित मात्राओं की एक सूची ले ली जाती है और यह निर्धारण करने के लिये कि प्रत्येक वर्ष वर्तमान कीमतों पर वस्तुओं के इस समाहार की क्या कीमत है गणना की जाती है। स्पष्ट ही प्रत्येक विधि इकाई कीमत को इकाइयों की संख्या से गुणा करने और परिणामित मूल्यों का प्रत्येक वर्ष के लिये जोड़ना मान है। 1959 में उत्पादित मात्राओं को गुणकों के रूप में प्रयुक्त करने की प्रविधि का विश्लेषण सारणी 17.2 में किया गया है। यहाँ तक के तक को समझ लेने के पश्चात् पाठक अब यह अनुभव करने लगेगा कि कीमत के समाहत मूचकांक वस्तुओं के स्थिर समाहार के बदलते हुए मूल्य को मापते हैं। क्योंकि कुल लागत या मूल्य बदलता रहता है जबकि समाहार के संघटक नहीं बदलते अतः परिवर्तन, अवश्यमेव कीमत परिवर्तनों के कारण है। यह प्रतीत होता है कि इस प्रकार का मूचकांक खोजी गई उसी वस्तु को

सारणी 17.1

नींबू फलादि कीमतों के साधारण समाहत सूचकांक की रचना 1959—1964*
(कीमत प्रति पेटिका की दर में)

फल	1959	1960	1961	1962	1963	1964
अमूरफल, पलोरिडा	4 41	4 32	4 49	5 88	6 09	5 94
नींबू, कैलिफोर्निया	7 10	7 22	7 18	8 56	7 28	8 38
सतरे, कैलिफोर्निया, नेवल	7 66	9 24	10 26	9 22	7 72	7 20
सतरे, कैलिफोर्निया, वेंलेन्मिया	8 36	7 48	7 94	7 62	9 34	6 68
सतरे, पलोरिडा	5 32	6 48	5 09	7 73	7 78	6 18
समाहार	\$32 85	\$34 74	\$34 96	\$39 01	\$38 21	\$34 38
मूचकांक (1959 का प्रतिशत)	100 0	105 8	106 4	118 8	116 3	104 7

फसल वर्ष 1958—59 को 1959 का नाम दिया गया है और इस प्रकार से दूसरे वर्षों को भी क्योंकि अधिकतर बिनाई और परिणामित विपणन बाढ़ के वर्ष में होता है।

ऑनरड अयुक्त राज्य कृषि विभाग क एग्रोकल्चरल स्टैटिस्टिक्स, 1964, पृष्ठ 171, तथा 1965 पृष्ठ 172, तथा संयुक्त राज्य कृषि विभाग से प्राप्त व्यवहार द्वारा।

सारणी 17 2

नीबू फलसदि कीमतों के समाहित मूचकाको की रचना 1959—1964 1959* में उत्पादन द्वारा भारत

(माताएं सहस्र टेटिकाओ में मूल्य सहस्र डॉलरों में)

फल	1959 उत्पादन	निश्चित वर्ष की कीमत पर 1959 की मात्रा का मूल्य					1964
		1959	1960	1961	1962	1963	
मगरफल पनोरिडा	30 500	134 505	131 760	136 945	179 340	185 745	181 170
नीबू कलिकोनिया	17 100	121 410	123 462	122 778	146 376	124 488	143 298
सतर कलिकोनिया	13 500	103 410	124 740	138 510	124 470	104 220	97 200
सतर कैलिकोनिया	17 300	144 628	129 404	137 362	131 826	161,582	115 564
सतर पलेोरिडा	91 500	486 780	592 920	465 735	707 295	711 870	565 170
समाहार मूल्य		990 733	1 102 286	1 001 330	1 289 307	1 287 905	1 102 720
मूचकाक (1959 का प्रतिशत)		100 0	111 3	101 1	130 1	130 0	111 3

* फसल वर्षों के सम्व ॥ से सारणी 17 1 की टिप्पणी देखें ।

फसल वर्षों के सम्व ॥ से सारणी 17 1 की टिप्पणी देखें । फसल की रिपोर्ट देने वाला बोर्ड

सारणी 17 1 के कीमत आंकड़ों और एग्रीकल्चरल स्टैटिस्टिक्स के विभिन्न वर्षों से उत्पादन आंकड़ों तथा सरकार या वृष्टि विभाग

एग्युल प्राय समरी दिसम्बर 1965 पन्ठ 97 पर जाधारित ।

मापता है यदि हम निर्वाह व्यय में परिवर्तनों का निर्धारण करना चाहते हैं, अर्थात् वस्तुओं और सेवाओं की स्थिर "बाजार टोकरी" की लागत का निर्धारण करना चाहते हैं। समाहत कीमत सूचकांक के लिये सामान्य सूत्र निम्नलिखित है

$$P = \frac{\sum p_n q}{\sum p_0 q}$$

सकेत-चिह्न वही है जिनका पहले प्रयोग हो चुका है, परन्तु एक नया सकेत-चिह्न जोड़ दिया गया है q वस्तु की उत्पादन क्रय-विक्रय की गई, या उपभोग की गई मात्रा का सकेत करता है (अर्थात् मात्रा भार या गुणक)। क्योंकि सारणी 17.2 में रचित सूचकांक आधार वर्ष मात्राओं में भागित किये गए थे, अतः हम सूत्र को अधिक निश्चित रूप से इस प्रकार लिख सकते हैं

$$P = \frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_0}$$

सारणी 17.1 तथा 17.2 की तुलना करके यह दिखाई देगा कि सरल समाहत सूचकांक में विशिष्ट मदों का महत्त्व वर्षानुवर्ष बदला क्योंकि उनकी कीमतें वर्षानुवर्ष बदली, परन्तु जब आधार-वर्ष मात्रा भारों का प्रयोग किया गया तो फ्लोरिडा मन्तरे सबसे अधिक महत्त्वपूर्ण बन गए।

भारों का चयन—यद्यपि पिछले दृष्टान्त में 1959 की मात्राओं को भार के रूप में प्रयुक्त किया गया तथापि यह मूल प्रविधि कई सम्भव प्रणालियों में से एक है। जैसे 1964 की मात्राओं को भारों के रूप में लेना इतना ही सरल रहता। यदि विपणन की गई प्रत्येक वस्तु की मात्रा वर्षानुवर्ष एक ही अनुपात में बदले तो भार किस अवधि का सकेत करते हैं, इसका कोई अन्तर नहीं पड़ेगा क्योंकि परिणाम एक जैसे होंगे। वास्तव में, तो विभिन्न वस्तुओं की सापेक्षिक महत्ता निरन्तर परिवर्तित हो रही है, और यह अशत विभिन्न वस्तुओं की सापेक्षिक कीमतों में परिवर्तन के कारण है जोकि स्वयं पूर्ति और माँग में परिवर्तनों का परिणाम है। इसमें एक बहुत बड़ी कठिनाई निहित है जिसके माँग में परिवर्तनों का परिणाम है। इसमें एक बहुत बड़ी कठिनाई निहित है जिसके लिये कोई पूर्णरूपेण सन्तोषजनक हल नहीं है। उत्तर आशिक रूप से इस बात पर निर्भर करता है कि विश्लेषणकर्ता इस विषय में क्या सोचना है कि कीमत सूचकांक का क्या कार्य है।

एक विचार यह है कि इस प्रकार का सूचकांक वस्तुओं के सतत समाहार की परिवर्तनशील लागत को मापता है। एक दूसरा विचार विश्लेषण के वस्तु-स्तर में नहीं अपितु सन्तुष्टि स्तर से सम्बद्ध है, यह है कि सूचकांक को दो अवधियों से या दो स्थानों पर समान सन्तुष्टि या उपयोगिता प्रदान करने वाली वस्तुओं के समुदाय की बदलती हुई लागत को मापना चाहिये। इस प्रकार, बताना कीजिए कि हम दो अवधियों में (या स्थानों पर) एक ही प्रकार के दो मनुष्य समूहों के निर्वाह व्यय की तुलना करते हैं, और इन समूहों में दोनों अवधियों (या स्थानों) में एक-सी रीति तथा धनान्द की क्षमता है तथा आय भी जो सन्तुष्टि की समान मात्रा का क्रय करेगी और करती है। वस्तुएँ वाम्बव में भिन्न होंगी, परन्तु यदि व्यय पहले वर्ष 6,000 डॉलर तथा दूसरे वर्ष 6,600 डॉलर है

तो हम इस परिणाम पर पहुँच सकते हैं कि निर्वाह व्यय में 10 प्रतिशत वृद्धि हुई है। इसमें कोई संदेह नहीं कि किसी न भी इस प्रकार का सही माप नहीं किया है। यद्यपि वस्तुओं के स्थिर समाहार के केवल परिवर्तनशील मूल्य को मापना सम्भव दिखाई देता है, तथापि विश्लेषणकर्ता को ऐसी वस्तुओं की सूची चुननी चाहिए जो विभिन्न समयों में समान मनुष्य प्राप्त करने की लागत के सम्बन्ध में परिचित दिशा के झुकाव की निश्चितता को दूर कर दे। इस कठिन समस्या का समाधान करने के लिए निम्नलिखित सुझाव दिए गए हैं।

1 आधार अवधि मात्राओं का भारों के रूप में प्रयोग करें—यही विधि है जिसका प्रयोग हमने व्यापकतात्मक उद्देश्यों के लिये सारणी 17.2 में किया है। तथापि, यदि दो अवधियों के बीच क्रय करने वाले व वातावरण तथा रुचियों में कोई परिवर्तन नहीं भी है तो उन वस्तुओं का नय अपेक्षनता कम हो जायगा जिनकी कीमतें अपेक्षनता बढ़ी हैं और उन वस्तुओं का नय अपेक्षनता बढ़ जायगा जिनकी कीमतें अपेक्षनता गिर गई हैं। यह पूर्णरूपेण सम्भव है कि इस प्रकार का सूचकांक कीमत स्तर में वृद्धि दिखाए, जबकि जिन वस्तुओं की कीमत गिनी है उनकी क्रय की गई सापेक्ष मात्राएँ बढ़ाकर एक प्रभुत्व व्यक्ति अन्तर्गत कुल लागत पर वस्तुतः सन्तुष्टि की वही मात्रा खरीदे। तब, इस प्रकार के सूचकांक में एक अर्थ में ऊँचगामी झुकाव है। यह कहा जा सकता है कि यह सूचकांक कीमत परिवर्तन की उच्च सीमा को अंकित करता है। यह विधि कभी कभी लम्पस की विधि के नाम से जानी जाती है, और जैसा कि पहले वर्णन किया जा चुका है इसे संकेत चिह्न में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$P = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}.$$

2 प्रदत्त अवधि मात्राओं का प्रयोग करें—अर्थात् ऐसे भारों का प्रयोग करें जो उस वर्ष से सम्बन्धित हैं जिसकी आधार वर्ष में तुलना की जाती है। इस विधि में प्रत्येक वर्ष या प्रायः और अधिक बार, भारों के एक नय समुच्चय का चयन करना पड़ता है। परन्तु प्रायः प्रचलित मात्रा भारों को प्राप्त करना असम्भव है, और यदि वे प्राप्य भी हैं तो सकलन का श्रम लगभग दुगुना हो जाता है। तत्पश्चात् यद्यपि प्रत्येक अवधि प्रत्यक्ष रूप में आधार वर्ष से तुलना योग्य है तो भी विभिन्न वर्षों की आपस में तुलना करना माध्य नहीं क्योंकि वस्तुओं का समाहार प्रत्येक वर्ष बदलता रहता है।

यदि हम उपभोक्ताओं की कीमतों के एक सूचकांक के लिये 1966 को आधार वर्ष मान लें तो आधार-वर्ष भार विधि प्रश्न का उत्तर देती है यदि 1966 में एक महीने का मिरा निर्वाह-व्यय 500 डालर हो तो मुझे इस वर्ष उन्हीं प्रकार से रहने के लिये कितना व्यय करना पड़ेगा? प्रदत्त वर्ष विधि एक भिन्न प्रश्न का उत्तर देती है यदि मैं वर्तमान जीवन स्तर 1966 में 500 डालर प्रति मास में चला सकता था तो मुझे इस वर्ष कितना व्यय करना पड़ेगा? इस प्रकार का प्रश्न पृच्छने में एक मेटा-नैतिक धारणा यह है कि जिन वस्तुओं की कीमतें गिर गई हैं उनको अनुचित भार प्रदान किया गया है। कीमत में सापेक्ष कमी उनके बढ़ हुए न्य के लिए जिम्मेवार हो सकती है और यद्यपि हम कीमत-परिवर्तन को मापने का प्रयास कर रहे हैं, तथापि हमारे भारों का आंशिक रूप से सापेक्ष कीमत परिवर्तनों द्वारा निर्धारण किया जाता है। इस प्रकार इस विधि के विषय में कहा जा सकता है कि इसकी निम्नगामी नति है और यह कीमत परिवर्तन के निम्न स्तर को

अंकित करती है। इसे कई बार पाजे की विधि के नाम से जाना जाता है और इसका निम्नलिखित सूत्र है।

$$P = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n}$$

3. आधार तथा प्रदत्त वर्षों की औसत (या कुल) मात्राओं का प्रयोग करो—यह एक मध्यम मार्ग है यद्यपि यह एक ऐसा हल है जिसकी किसी भी ज्ञान दिशा में कोई सामान्य नति नहीं है। परन्तु पुनश्च, विधि 2 के समान, हमारे पास विवर्तनशील भार है और उसका परिणाम यह है कि विभिन्न वर्षों में आपस में तुलनीयता की कमी है। इस विधि का सुभाव अग्रज अर्थशास्त्री मार्शल और ऐजवर्थ ने स्वतन्त्र रूप से दिया था और सूत्र

$$P = \frac{\sum p_n (q_0 + q_n)}{\sum p_0 (q_0 + q_n)}$$

को कभी-कभी मार्शल-ऐजवर्थ सूत्र के नाम से जाना जाता है।

4. उन मात्राओं की सब वर्षों के लिए इकट्ठी औसत निकालो जो सूचकांक में सम्मिलित है—यद्यपि यह ऐतिहासिक अध्ययन के लिए सभवतः एक उत्तम समाधान है तथापि यदि सूचकांक को अद्यतन रखा जाना है तो यह योजना अव्यावहारिक है, क्योंकि इसका अर्थ है भारों का प्रचलित परिशोधन और सूचकांक के पूर्ण समुच्चय का सतत पुनः परिकलन।

5. उन अनेक वर्षों की, जिनको प्ररूपी समझा जाता है, मात्राओं की इकट्ठी औसत निकालो—यह भी एक बीच का समाधान है, परन्तु यह व्यावहारिक है और बहुधा प्रयोग में लाया जाता है। तथापि प्रयुक्त मात्राओं की सूची अन्तोगत्वा अप्रचलित बन जाएगी। जब इस प्रकार की बात हा तब एक नया सूचकांक बनाया जा सकता है और उसे पुराने से जोड़ा जा सकता है। ऐसा करने वाली विधियों के विषय में अग्रामी अध्याय में विचार किया जाएगा। 1959, 1960, और 1961 की औसत मात्राओं का भारों के रूप में प्रयोग करके, 1964 की नीबू फलादि कीमतों के सूचकांक की रचना का वर्णन सारणी 17.3 में किया गया है। आधार वर्ष भारों का प्रयोग करने वाले सूचकांक में यह सूचकांक केवल 1.2 प्रतिशतता बिन्दु भिन्न है। इस विज्ञेय सूचकांक के लिए मूल निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$P = \frac{\sum p_{59-61} q_{59-61}}{\sum p_{59-61} q_{59-61}}$$

वास्तव में, परिणाम वही है चाहे औसत मात्रा या कुल मात्रा भारों का प्रयोग किया जाय।

6. महत्तम समायवर्तक का निर्धारण करो—भार प्रत्येक वर्ष के लिए समान प्रत्येक वस्तु की मात्राएँ, आधार तथा प्रदत्त वर्ष के लिए या तुलना किये जाने वाले सब वर्षों के लिए, हैं। दूसरी स्थिति में इसका अर्थ होगा कि किसी वस्तु के लिए किसी भी तुलना किये जाने वाले वर्ष में विषय की न्यूनतम मात्रा ली जाएगी। तब, सामान्यतया ली गई विभिन्न वस्तुओं की मात्राओं में से प्रत्येक उसी वर्ष के लिए नहीं होगी। पूर्वः वर्णित विधि 1 और

सारणी 173

1959 1960 तथा 1961 में उपादन* द्वारा आरित नौवू फलसवि कीमतों के 1964 के समाहित मूचकांक की रचना

(उपान्त गृह्य वेदिक-आ 1 मू य सत्य सारणी में)

कन	उपादन			औसत उत्पादन 1959 1961	औसत उत्पादन 1959 1961	कीमत प्रति टेटरा		निम्न वनों की कीमत पर 1959 1961 के औसत उत्पादन का मूल्य	
	1959	1960	1961			1959	1964	1959	1964
समूहकन वनोरिडा	30 500	31 600	35 000	97 100	32 370	4 41	4 44	142 752	192 278
नौवू वनिकोर्निया	17 100	13 600	15 200	45 900	15 300	7 10	8 18	108 630	128 214
सतरे वनिकोर्निया नैन	13 500	9 000	7 600	30 100	10 030	7 66	7 20	76 830	72 216
सतरे वनिकोर्निया वनिसया	17 300	16 000	13 100	46 400	15 470	8 36	6 68	129 325	103 340
सतरे वनोरिडा	91 500	86 700	113 400	291 600	97 200	5 32	6 18	517 104	600 696
समाहार मूल्य								974 645	1 096 744
मूचकांक (1959 का प्रतिशत)								100 0	112 53

* मूचकांक यही है, तीन वनों के लिए प्रयुक्त भार वाले कुल या औसत उत्पादन है। वसत वनों से सम्बन्धित सारणी 171 की टिप्पणी देखें।
 * मूचकांक सारणी 172 के नीचे दिये गए खातों से

2 में निहित प्रकार की अभिवृत्ति में वृद्धि के लिए इस उत्तम युक्ति का सुभाव जे० एम० केम्स द्वारा दिया गया है। इसकी आलीनता इसका गुण है - यह युक्ति उत्तम प्रपास से बचती है जिते पूर्ण रूप से नहीं किया जा सकता। तथापि, यदि उन मात्राओं का सूत्र जो कि विभिन्न अवधियों में समान है कुल वर्षों की तुलना में कम है, या यदि वे विभिन्न अवधियों में योग का एक परिवर्तनशील अनुपात रखती है, या यदि वस्तुओं के इस समाहार से प्राप्त मन्तुष्टि बढ़ती है, तो विधि परिशुद्ध नहीं है और वह विधि 5 में भी कम सही हो सकती है।

7 दो सूचकांक बनाओ, प्रत्येक भागों के भिन्न समुच्चय के साथ, और साधारणतया जमावितोय विधि से दोनों की इष्टतम औसत निकालो—भारित करने के लिये चुने हुए दोनों ढग साधारणतया आधार तथा प्रदत्त वर्षों भार है। तब मूल निम्नलिखित बनता है

$$P = \sqrt{\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n}}$$

इसे प्रायः फिशर का "घादर्श" सूचकांक कहा जाता है, क्योंकि यह सगुण व्यवहार के निश्चित परीक्षणों के अनुसार है जिसे डविग फिशर उचित समझते थे। दूसरी ओर, यह निश्चित रूप में कहना कठिन है कि इस प्रकार का सूचकांक क्या मापता है।

किसी एक भार करने वाली विधि के लिये, जिसमें प्रत्येक सूचकांक के लिये भारों का विभिन्न समूह प्रयुक्त होता है, यह सामान्य आलोचना की जाती है कि यद्यपि एक सूचकांक की विधिपूर्वक आधार वर्ष के सूचकांक के साथ तुलना की जा सकती है तथापि तात्त्विक आधार पर अन्य दो वर्षों के सूचकांकों की (जैसे कि 1963 और 1964) एक दूसरे के साथ तुलना नहीं की जा सकती। यह आलोचना, प्रदत्त-वर्ष भारों पर, आधार तथा प्रदत्त-वर्ष भारों की औसत पर, जब तुलना किये गए केवल दो वर्षों में चुनी गई मात्राएँ समान हो तो महत्तम समापवर्तक विधि पर, और "आदर्श" सूचकांक पर लागू होती है। यह आधार-वर्ष भारों पर, सभी वर्षों के औसत भारों पर, प्रत्येक भारों पर, या जब सभी वर्षों में समान मात्राओं का प्रयोग किया जाता है तो महत्तम समापवर्तक विधि पर लागू नहीं होती।

यद्यपि भार-चुनाव का सिद्धांत रोचक है तथा इसमें उच्चकोटि का तात्त्विक विश्लेषण निहित है, तथापि इसकी व्यावहारिक महत्ता का अत्यधिक अनुमान लगाना सरल है। नीचे फसाद प्रौढों से प्राप्त निम्नलिखित परिणामों पर विचार करो :

भार करने का ढग	1964 सूचकांक
सरल समाहत	104.7
1959 मात्रा भार (आधार वर्ष भार) ..	111.3
1959—1961 औसत मात्रा भार	112.5
1964 मात्रा भार (प्रदत्त-वर्ष भार).....	111.2
"आदर्श" सूचकांक.....	111.2

इस स्थिति में साधारण तथा भारित सूचकांक में बहुत ही अधिक भिन्नता है, परन्तु भार करने की विधियों में बहुत कम अन्तर है। भारित करने की विभिन्न विधियों काफ़ी मिलती-जुलती हैं क्योंकि परस्पर सापेक्ष भारों की महत्ता चारों प्रणालियों में लगभग एक-ही है। तथापि यदि दोनों कीमतें और मात्राएँ अपने सापेक्ष विस्तार में बहुत अधिक भिन्न होती तो विभिन्न भारों ने सुस्पष्ट विभिन्न परिणाम दिये होते। यदि सभी कीमतें एक ही दिशा में गतिमान हो और एक ही अनुपात में बदलें तो इससे कोई अन्तर नहीं पड़ेगा कि भार करने की कौनसी विधि चुनी गयी है। परन्तु यदि ऐसा होता है कि वे वस्तुएँ जिनकी अवधि के मध्य सापेक्ष महत्ता बहुत अधिक बढ़न रही है और जिनमें औसत से काफ़ी भिन्न कीमत परिवर्तन हो रहे हैं तो भार करने का मामला महत्वपूर्ण बन जाता है। यह प्रायः कम महत्वपूर्ण है कि बिल्कुल ठीक भारों का प्रयोग किया जाता है या केवल अनुमानित भारों का। इस प्रकार मारणी 17.4 बिल्कुल मारणी 17.3 जैसी है सिवाय इसके कि मात्रा भारों का एक एक तक पूर्णांकन किया गया है परन्तु परिणामों में केवल 1.17 का अन्तर है। इसका कारण यह है कि पूर्णांकन ने भारों की साक्षेप महत्ता को अधिक नहीं बदला। सभी व्यावहारिक उद्देश्यों के लिये, साधारणतया पर्याप्त सभी परिणाम प्राप्त होंगे यदि कुछ अधिक महत्वपूर्ण वस्तुओं की यथार्थ रूप से भारित किया जाता है और अनेक महत्वहीन वस्तुओं को पूर्णांकित भाग दिये जाते हैं।

यद्यपि भारों का चयन करने में केवल सन्निकट परिशुद्धता आवश्यक है तथापि व्यवहार में कीमत दरों की परिशुद्धता बहुत अधिक महत्व की है। वास्तव में यह इस बात का परिणाम है कि कुछ कीमतें वर्षानुवर्ष काफ़ी परिवर्तन दिखा सकती हैं जबकि अन्यो में परिवर्तन बहुत कम होता है। यह वैसा ही है जैसे कि हम कहे कि एक दूधरे के प्रति कीमतों का अनुपात वर्षानुवर्ष में बदलता है।

कई वर्षों में अनेक परिवर्तन आते हैं वस्तुओं की सापेक्ष महत्ता बहुत अधिक बदल जाती है, पुरानी वस्तुएँ प्रयोग से हट जाती हैं और उनका स्थान नई वस्तुएँ ले लेती हैं, वस्तु के मॉडल, स्टाइल, अथवा ग्रेड अप्रचलित हो जाते हैं और उनका विनिर्माण बन्द हो जाता है। इनका स्थान नए मॉडल, स्टाइल अथवा ग्रेड ले लेते हैं; विपणन केन्द्र बदल जाते हैं और नए केन्द्र की कीमत दरों के लिए पुराने केन्द्र की कीमत दरों का स्थान ले। आवश्यक है, समुद्रगट तक परिवहन मुक्त युक्त कीमत दरों की वजाय सुपुर्दगी कीमतें आ सकती हैं या इसके विपरीत हो सकता है। इन परिस्थितियों में से किसी एक में प्रत्येक सूचकांक को मूल आधार के प्रतिशत के रूप में नहीं अपितु पूर्ववर्ती अवधि के प्रतिशत के रूप में वर्णित करना वाञ्छनीय हो सकता है। इस प्रकार के सूचकांक में तुलना किये जाने वाले किसी एक या दोनों वर्षों या मामों से सम्बन्धित भारों का उपयोग करते हुए, ऊपर दिये गए सूत्रों में से किसी एक का प्रयोग किया जा सकता है।

5. इंग्लिश फिशर प्रस्तुत करते हैं कि मात्राओं का गुणक 1, 10, 100 या 1,000 तक करना चाहिये। यह वास्तव में काम को बहुत सुगम कर देता है। किसी मात्रा का 1 और 10 (उदाहरणार्थ) के बीच पूर्णांकन करने हुए विभक्त करने वाला बिन्दु इन दो अंकों का अकमन्यतीय माध्य नहीं है अपितु ज्यामितीय माध्य 3.1623 है, क्योंकि इसमें लघुतम सापेक्ष त्रुटि है।

सारणी 174

1959, 1960 तथा 1961 में एक अक तक पूर्णोक्ति औसत उत्पादन* द्वारा
भारत नीबू फलादि कीमतों के 1964 के समाहित सूचकांक की रचना

(उत्पादन महक पत्रिकाओं में मध्य सहस्र दानरो में)

फल	औसत उत्पादन 19५०-६)	कीमत प्रति पट्टा		निम्न वर्षों की कीमतों पर 1959-19५1 के औसत उत्पादन का मूल्य	
		पूर्णांक	1959	1964	19५9
अमूरफल पनोरिडा	३० ०००	\$4 41	\$5 94	132,300	178,200
नीबू, कैलिफोर्निया	20 ५००	7 10	8 38	142 000	167 600
सतरे, कैलिफोर्निया, नेबल	10 ०००	7 66	7 20	76 600	72,000
सतरे कैलिफोर्निया कैलिफोर्निया	2 000	8 36	6 63	167 200	133 600
सतरे, पनोरिडा	100 000	5 ३2	6 18	५32 000	618 000
समाहार मूल्य				1 0५० 100	1 169,40
सूचकांक(1959 का प्रतिशत)				100 0	111 36

* फल वर्षों के सम्बन्ध में सारणी 17 1 की शिपणी देखें।

आंकड़ सारणी 17 1 और 17 2 के नीचे दिए गए मालों में।

प्रत्येक उत्तरोत्तर गुणा के क्रम द्वारा इन आंकड़ अलग प्रतिशतताओं को मूल आधार के साथ श्रुततावद्ध कर दिया जाता है। इसे सूचकांक की जिम श्रुतता सूचकांक कहा जाता है, आणामी अंशय में व्याख्या की जायगी। जब एक वस्तु का दूसरी वस्तु में प्रतिस्थापन करत है, या जब भारों का बदलन है तो केवल एक अवधि के निचे परस्पर व्यापी आंकड़ा की आवश्यकता पडती है जब कि प्रत्यक्ष तुलना केवल वनदान अवधि और पिछली अवधि की कीमतों (या मात्राओं) के बीच में की जाती है।

कीमत सापेक्षों की औसतें

कीमत मापनों की औसत निकाल कर सूचकांक की रचना में दो आधारभूत पग उठान पडन हैं।

1 प्रत्येक श्रेणी के निचे वास्तविक कीमतों को आधार अवधि की प्रतिशतताओं में बदलो—इन प्रतिशतताओं का कीमत मापनों के नाम से पुकारा जाता है, क्योंकि इन्हें टालगे और सारा में नहीं बलितु आधार अवधि में मूल्यवद्ध प्रतिशतताओं के रूप में व्यवह किया जाता है। सारणी 17 5 के ऊपरी भाग में 1९59 में 1964 तक के पांच नीबू फलादि के कीमत मापनों का दिया गया है। मापनों की इन श्रेणियों में ३

प्रत्येक का प्रदत्त वर्ष की कीमत को आधार वर्ष की कीमत से विभक्त करके परिकलन किया गया था।

सारणी 17 5

कीमत सापेक्षों के साधारण अकगणितीय माध्य के प्रयोग द्वारा नीबू फलादि कीमतों के सूचकांक की रचना, 1959—1964*

वस्तु	1959	1960	1961	1962	1963	1964
आमूरफल पनोरिडा	100 0	98 0	101 8	133 3	138 1	134 7
नीबू, कैलिकोनिया	100 0	101 7	101 1	120 6	107 5	118 0
सतर, कैलिकोनिया नवल	100 0	120 6	133 9	120 4	100 8	94 0
सतर, कैलिकोनिया बेनेन्सिया	100 0	89 5	95 0	91 1	111 7	79 9
सतर, एलोरिडा	100 0	121 8	95 7	145 3	146 2	116 2
योग	100 0	531 6	527 5	510 7	499 3	542 8
औसत (1959 का प्रतिशत)	100 0	106 3	105 5	122 1	119 9	108 6

*फल वर्षों के सम्बन्ध में सारणी 17 1 की टिप्पणी देखें।

सारणी 17 1 व आकृष्टों पर आधारित।

2 प्रत्येक वर्ष के लिये अलग अलग कीमत सापेक्षों की औसत निकाला, इस प्रकार सूचकांक की श्रृंखला प्राप्त करो। सारणी 17 5 के निम्न भाग में सापेक्षों का साधारण अकगणितीय माध्य प्रयोग में लाया गया है। इस विधि की श्रुति यह है कि प्रत्येक सापेक्ष (जिस वस्तु को वह प्रस्तुत करता है उसकी महत्ता की उपेक्षा करते हुए) आधार अवधि में इसकी प्रतिशतता में वृद्धि या कमी के अनुसार प्रदत्त वर्ष के सूचकांक को प्रभावित करता है। चार्ट 17 3 में कीमत सापेक्षों की पाँच श्रृंखलाएँ तथा सूचकांक को दिखाया गया है। इस चार्ट से यह देखा जा सकता है कि 1961 और 1963 में दो सापेक्षों में कमी हुई, जबकि तीन में वृद्धि हुई परन्तु सूचकांक में कमी हुई क्योंकि दो सापेक्षों में तीन की अवस्था जिनमें कि वृद्धि हुई प्रतिमतुलन की अपेक्षा अधिक कमी आई। जिन दो सापेक्षों में कमी आई हो सकता है उन्होंने सूचकांक के लघु अवयवों का प्रस्तुत किया हो तथा परिणाम वही प्राप्त हुआ हो। यह सकेत करना उचित हो सकता है कि कीमत सापेक्षों का साधारण अकगणितीय माध्य भारत समाहृत सूचकांक के समान है, जहाँ भार, आधार वर्ष में 1 00 डॉलर (या किसी विनिष्ट रकम) द्वारा खरीदी जा सकने वाली प्रत्येक वस्तु की मात्राएँ हैं। यह आधार वर्ष कीमतों से व्युत्क्रमों द्वारा भाँति करने के समान है।

वास्तव में अकगणितीय माध्य से भिन्न औसतों का प्रयोग सम्भव है, उदाहरणार्थ, रेखागणितीय माध्य माध्यिका, अथवा हरात्मक माध्य, और इस विषय पर बाद में कुछ ध्यान दिया जाएगा। तथापि सापेक्षों के भारों का प्रयोग अधिक महत्वपूर्ण है। ये भार समाहृत विधि के साथ प्रयुक्त मात्रा भारों के विपरीत मूल्य भार होने चाहियें। शीघ्र ही इसका कारण स्पष्ट हो जाएगा। आधार वर्ष 1959 में प्रत्येक फल के मूल्य से भारत सारणी 17 5 के सापेक्षों के साथ नीबू फलादि कीमतों के सूचकांक का परिकलन सारणी 17 6 में दिखाया गया है। जैसा कि उस सारणी से स्पष्ट है, प्रविधि में निम्नलिखित आते हैं

(1) सापेक्षों को उनके भारों से गुणा करना, (2) इन गुणनफल को वर्षानुवर्ष जोड़ना, तथा

सारणी 17 6

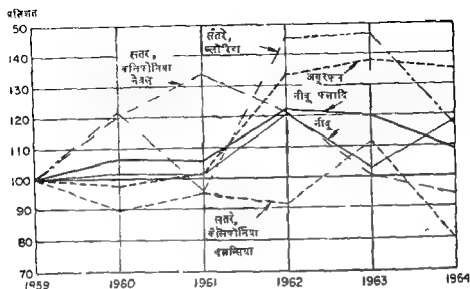
आधार वष (1959) सूच्यों द्वारा भारत कीमत सूचकांक के प्रयोग द्वारा नीचे क्लासि कीमती के सूचकांक की रचना 1959 1964*

(मूल संख्या 1959 में)

वर्ष	निर्दिष्ट वष के मूल सूचकांक 1959 के मूल से गणना				
	1959	1960	1961	1962	1963
समस्त सूचकांक	134 505	131 815	136 926	179 295	185 751
जीव सूचकांक	121 410	123 474	122 746	146 420	124 445
समान सूचकांक	103 410	124 712	138 466	124 506	104 237
समान सूचकांक	144 628	129 442	137 397	131 756	161 549
समान सूचकांक	486 780	592 898	465 848	707 291	711 672
योग	990 733	1 102 341	1 001 383	1 289 268	1 287 654
सूचकांक (1959 का प्रतिशत)	100 0	111 3	101 1	130 1	130 0
					1 102 843
					111 3

* यह सूचकांक मूल सूचकांक 17 1 की डि. रचना देखा ।

सारणी 17 5 में दी गई सूचकांक और सारणी 17 2 में 1959 के कीमत सूचकांक पर आधारित ।



चार्ट 17.3 नीवू फलादि कीमतों के साधारण अल्पस्थित्य औसत सूचकांक तथा पाँच फलों में से प्रत्येक के कीमत सापेक्ष, 1959—1964। 1959=100 आंकड़े सारणी 17.5 में।

(3) प्रत्येक वर्ष के इन योगों को भागों के जोड़ में विभक्त करना। परिणाम वही है जैसे कि आधार-वर्ष-मात्रा भारों के साथ समान सूचकांक के लिये प्राप्त हुए थे (सारणी 17.2), यद्यपि सत्याओं का पूर्णिकन किया गया था। यह इसी प्रकार होना चाहिए यह साधारण रूप से प्रदर्शित किया जा सकता है। आइए पहले हम एक अकेली वस्तु प्लोरिडा सतरे लें और दिखाएँ कि (क) आधार वर्ष (1959) मूल्य भार को जब प्रदत्त वर्ष (1964) सापेक्ष पर लागू प्रयुक्त किया गया है तो यह वही परिणाम उत्पन्न करता है जैसा कि (ख) आधार वर्ष (1959) की मात्रा को प्रदत्त वर्ष (1964) की कीमत से गुणा करके आता है। अर्थात्

(क). . 1964 का कीमत सापेक्ष है डॉलर 6.18—डॉलर 5.32

= 1.1617, या 116.17 प्रतिशत,

आधार वर्ष मूल्य गुणा 1964 कीमत सापेक्ष है . . .

डॉलर $486,780,000 \times 1.1617 =$ डॉलर 565,492,326।

(ख).....आधार-वर्ष मात्रा गुणा प्रदत्त वर्ष कीमत है.....

$91,400,000 \times$ डॉलर 6.18 = डॉलर 565,470,000।

(सारणी 17.6 में 1964 के प्लोरिडा सतरे के लिये डॉलर 565,638,000 दिखाया गया है क्योंकि 1964 सापेक्ष 116.2 लिया गया था।)

यह सम्बन्ध सच्चा है, न केवल प्रत्येक अलग वस्तु के नियम अथवा वस्तुओं के समूहों के लिये भी। सकेत चिह्नों में

$$\frac{\sum p_n p_o q_o}{\sum p_o q_o} = \frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o}$$

स्पष्टतः जो कुछ अधिक सुगमतापूर्वक आधार-वर्ष-मात्रा भारों के माध्य समाहारों का प्रयोग करके सीधे ढंग में प्राप्त किया जा सकता है उसे आधार-वर्ष मूल्य भारों के साथ सापेक्षों की भारित औसत की विधि से प्राप्त करना प्रायः एक गोलमोल विधि है। तदनुसार अधिकतर व्यक्तियों को एक समाहित सूचकांक का अर्थ, सापेक्षों की एक औसत से अधिक स्पष्ट दिखाई देता है। तो फिर सर्वदा समाहित विधि का प्रयोग क्यों नहीं किया जाना चाहिये? एक कारण यह है कि कीमन सापेक्ष स्वरूप कभी-कभी व्यय करने के योग्य होते हैं, केवल इस कारण से नहीं कि पाठक के लिये एक धैर्य विशिष्ट महत्ता रखती हो परन्तु

6. अधिक सामान्यतया, कीमन सूचकांकों के सम्बन्ध में निम्नलिखित सम्बन्धों का वर्णन किया जा सकता है

(1) आधार वर्ष मूल्यों (p_o, p_o) द्वारा भारित सापेक्षों की अवगणितीय औसत आधार वर्ष मात्राओं के साथ भारित समाहित सूचकांक के बराबर है।

(2) इसी प्रकार आधार वर्ष कीमतों तथा प्रदत्त वर्ष मात्राओं (p_n, p_n) के गुणा द्वारा भारित सापेक्षों की अकगणितीय औसत प्रदत्त वर्ष मात्राओं के साथ भारित समाहित सूचकांक के बराबर है।

(3) प्रदत्त वर्ष मूल्यों (p_n, p_n) द्वारा भारित सापेक्षों की हरात्मक औसत प्रदत्त वर्ष मात्राओं के साथ भारित समाहित सूचकांक के बराबर है। इस प्रकार,

$$1 - \frac{\sum \left(\frac{1}{p_n - p_o} p_n q_n \right)}{\sum p_n q_n} = 1 - \frac{\sum \left(\frac{p_o}{p_n} p_n q_n \right)}{\sum p_n q_n}$$

$$= \frac{\sum p_n q_n}{\sum \left(\frac{p_o}{p_n} p_n q_n \right)} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n}$$

(4) इसी प्रकार, यह दिखाया जा सकता है कि आधार वर्ष मात्राओं और प्रदत्त वर्ष कीमतों (p_n, p_n) के गुणा द्वारा भारित सापेक्षों की हरात्मक औसत आधार वर्ष मात्राओं के साथ भारित समाहित सूचकांक के बराबर है।

इन सामान्य बातों का वर्णन सूचकांकों की रचना में प्रथमप्रदर्शकों के रूप में किया जा सकता है, जब सूचकांकों की रचना सापेक्षों से की जाती है

(क) यदि सापेक्षों की अकगणितीय औसत का प्रयोग करना वांछनीय है तो मूल्य-भार आधार कीमतों तथा वांछित मात्राओं के गुणनफल होने चाहिये।

(ख) यदि मूल्य भारों के प्रयोग वाले सापेक्षों की औसत का प्रयोग करना वांछनीय है जो कि प्रदत्त-वर्ष कीमतों तथा किसी अवधि की मात्राओं का गुणनफल है, तो हरात्मक औसत का प्रयोग किया जाना चाहिये।

जिस भी परिस्थिति में प्रदत्त वर्ष कीमतों वाले मूल्यों के साथ सापेक्षों की अकगणितीय औसत का प्रयोग नहीं करना चाहिये, क्योंकि यह बहुत ही अनिश्चित भार केवल इसलिये प्रदान करती है क्योंकि इसकी कीमन बर गैर है। ऐसी प्रविधि का परिणाम अर्थव्यवस्था की अनिश्चितता है।

इसलिए कि सापेक्षों के समूहों का अध्ययन प्रतिदर्श के चुनाव में अथवा समूह सूचकांक के निर्माण के निर्धारण में सहायता कर सकता है। वारम्बारता वदनों के सम्बन्ध में यह दृष्टिकोण हुआ कि एक औसत किसी स्थिति का पूर्ण चित्र प्रदान नहीं करती। दूसरे तरीके भी प्रयोग किये जाने योग्य हो सकते हैं। अन्य कारण यह है कि जोड़ी जाने वाली श्रेणी को कई बार केवल सापेक्षों के रूप में ही प्राप्त किया जा सकता है, अथवा उनका अर्थ केवल सापेक्षों के रूप में ही हो सकता है क्योंकि जैसा कि मात्रा सूचकांक की अवस्था में है एक श्रेणी विभिन्न भौतिक इकाइयों में अभिव्यक्त कई उपश्रणियों से बनी हो सकती है। सापेक्षों का प्रयोग कीमत सूचकांक का बनाने की अपेक्षा मात्रा सूचकांक (भाग्य वरण किया जाएगा) की रचना में अधिक सामान्य है क्योंकि मात्रा सूचकांक के समष्टि स्वयं बहुधा सूचकांक या सापेक्ष होने हैं।

वस्तु भार बनाम समूह भार—मूल्य भारों से सम्बन्धित वही व्यावहारिक शिक्षा दी जा सकता है जाकि मात्रा भारों के सम्बन्ध में दी गई थी—केवल सन्निकट परिशुद्धता आवश्यक है। तब भी जब वस्तुओं की सीमित संख्या चुनी जाती है ता निम्नलिखित विचार महत्वपूर्ण बन जाता है। क्या किसी प्रदत्त वस्तु के लिये चुने गए मूल्य भार का बाजार से सम्बन्धित उस वस्तु का मूल्य होना चाहिये या उसे वस्तुओं के उस कुल समूह का संकेत करना चाहिये जिसे कि वस्तु प्रस्तुत करती है? हम प्रश्न का उत्तर यह है कि जब तक विभिन्न समूहों के लिये आनुपातिक मूल्य प्रतिनिधित्व प्राप्त करने के लिये कुछ समूहों में मदों की संख्या में पर्याप्त वृद्धि व्यावहारिक न हो (और कदाचित् दूसरों की संख्या में कमी), तब तक विभिन्न मदों के भारों का समझन करना निश्चित रूप से अच्छा है ताकि हम प्रकार का समूह प्रतिनिधित्व प्राप्त कर लिया जाए। अत्यधिक सन्तोषजनक परिणाम तब प्राप्त होंगे यदि हम जितना अधिक सम्भव हो उतनी वस्तुओं को प्रत्येक समूह से चुन तथा साथ ही उचित से कम प्रतिनिधित्व प्राप्त तत्वों को अतिरिक्त भार दें।

वही परिणाम प्राप्त करने के लिये दूसरी विधि यह है कि प्रत्येक समूह के लिये उतनी अधिक वस्तुएँ चुन ली जाएँ जितनी सुविभाजन हो ताकि पृथक् समूह सूचकांक का परिकलन किया जाए और तब उचित भारों का प्रयोग करते हुए समूह सूचकांक को एक सामान्य सूचकांक में जोड़ दिया जाए। क्योंकि समूह सूचकांक सापेक्ष हैं मत उनका जोड़ कोई नई समस्या प्रस्तुत नहीं करता। आगे इस बात का ध्यान रखें कि विभिन्न समूहों से उन समूहों के मूल्य अनुपात में वस्तुओं की संख्या का चुनाव करने के लिये वस्तुओं को भारित करने को एक प्रकार से एक विकल्प के रूप में समझा जाना चाहिये।

औसतों के प्रकार—ज्यामितीय माध्य—कई बार यह तक प्रस्तुत किया जाता है कि ज्यामितीय माध्य का प्रयोग कीमत सापेक्षों की औसत निकालने के लिये किया जाना चाहिये। आइये हम केवल दो वस्तुओं का प्रयोग करने वाला साधारण उदाहरण लें जिसमें दो देशों के बीच कीमत स्तर का माप आता है। क देश को आधार के रूप में प्रयुक्त करते हुए और यह प्रदर्शित करते हुए कि समान्तर माध्य के अनुसार ख देश में कीमत स्तर क देश से 25 प्रतिशत ऊँचा है, हम निम्नलिखित परिणाम प्राप्त करते हैं।

वस्तु	क देश		ख देश	
	इकाई कीमत	कीमत सापेक्ष (प्रतिशत)	इकाई कीमत	कीमत सापेक्ष (प्रतिशत)
गेहूँ (बुशल)	\$0 80	100	\$1 60	200
कपास (पाउंड)	12	100	06	50
समान्तर माध्य	..	100		125
गुणोत्तर माध्य	.	100	.	200

आइए, अब यह देखें कि उस समय क्या होता है जब देश ख को आयात के रूप में लिया जाता है और देश क में कीमत स्तर को देश ख के कीमत स्तर के सापेक्ष के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है।

वस्तु	क देश		ख देश	
	इकाई कीमत	कीमत सापेक्ष (प्रतिशत)	इकाई कीमत	कीमत सापेक्ष (प्रतिशत)
गेहूँ (बुशल)	\$0 80	50	\$1 60	100
कपास (पाउंड)	12	200	06	100
समान्तर माध्य		125		100
गुणोत्तर माध्य	..	100	.	100

इन सकलनों से, समान्तर माध्य इन बात का संकेत करता है कि क देश में कीमत स्तर ख देश के कीमत स्तर से 25 प्रतिशत ऊँचा है।

दोनों सारणियों में परिवर्तनों के परिणाम अलग-अलग प्रतीत होते हैं। तथापि, वे समान्तर माध्य की त्रुटि के कारण असंगत नहीं हैं, प्रकृत उन छिपे हुए भारों के कारण जो कि दोनों स्थितियों में बराबर नहीं हैं। जब क देश आयात था, तो यह पूर्वकल्पना बन गई थी कि क देश में शीत कपास और गेहूँ की मांगें 1 डालर (या मुद्रा की अन्य विशिष्ट मात्रा) के द्वारा शीत कपास की इकाइयों की संख्या (8½ पाउंड) तथा गेहूँ की इकाइयों की संख्या (1½ बुशल) होगी तथा वही भार ख देश के लिये लागू होंगे।

अर्थात्, क देश के लिये

गेहूँ के $1\frac{1}{4}$ बुशल 0 80 डालर की दर से = \$1 10, सापेक्ष = 100,
कपास के $8\frac{1}{2}$ पाउंड 12 की दर से = 1 00; सापेक्ष = 100,

और ख देश के लिए

गेहूँ के $1\frac{1}{4}$ बुशल 1 60 डालर की दर से = \$2 00, सापेक्ष = 200,
कपास के $8\frac{1}{2}$ पाउंड 06 की दर से = 50, सापेक्ष = 50।

इस आधार पर, ख देश में कीमत स्तर क देश से 25 प्रतिशत ऊँचा है।

जब ख देश आधाग था तो यह पूर्व-कल्पना धर ली गई थी कि ख देश में क्रय की गई गेहूँ और कपास की मात्राएँ 1 00 डालर (या मुद्रा की अन्य निदिष्ट मात्रा) द्वारा क्रय की गई कपास की इकाइयों की संख्या ($16\frac{2}{3}$ पाउंड) और गेहूँ की इकाइयों की संख्या ($\frac{5}{4}$ बुशल) होगी, और क देश के लिये वही भार लागू होगा।

जब दश के लिए, इसमें प्राप्त होता है

गेहूँ के $\frac{5}{4}$ बुशल 1 60 डालर की दर से = \$1 00, सापेक्ष = 100,
कपास के $16\frac{2}{3}$ पाउंड 60 की दर से = \$1 00, सापेक्ष = 100,

और क देश के लिये

गेहूँ के $\frac{5}{4}$ बुशल 0 80 डालर की दर से = \$0 50, सापेक्ष = 50,
कपास के $16\frac{2}{3}$ पाउंड 12 की दर से = 2 00, सापेक्ष = 200।

भारो के इस समूह का प्रयोग संकेत करता है कि क देश में कीमत स्तर ख देश से 25 प्रतिशत ऊँचा है।

अब, कई बार ज्यामितीय माध्य का पक्ष लिया जाता है क्योंकि यह उस प्रकार की स्थितियों में जैसी कि ऊपर की दो सरणियों में दिखाई गई है सगत परिणाम प्रदान करता है। परिणाम इसलिये सगत है क्योंकि दोनों में से किसी एक देश के आधार के साथ दूसरे देश का सूचकांक 100 है, जैसा कि सरणियों में देखा जा सकता है। परन्तु सुगोत्तर माध्य केवल उसमें अन्तर्निहित पूर्व-धारणा के कारण सगत परिणाम प्रस्तुत करता है। अर्थात् क्रय की गई वास्तुओं का मूल्य दोनों देशों में एक ही अनुपात में है। इसका यह अर्थ है कि क देश में ख देश की अपेक्षा गेहूँ की मात्रा अधिक क्रय की जाएगी, और ख देश में क देश की अपेक्षा कपास की मात्रा अधिक क्रय की जाएगी।

पूर्वगामी अनुच्छेदों में जो सूचकांक बनाये गये थे, उनके लिये भारो का कोई विशिष्टीकरण नहीं किया गया था। हम पहले ही देख चुके हैं कि सापेक्षों को उचित प्रकार से चुने हुए मूल्यों से भारित करना चाहिये, और अभी दिये गए दृष्टान्तों के लिये उन भारो का, दो देशों में विक्रय की गई वस्तुओं के वास्तविक मूल्य के आधार पर, निर्धारण किया जाना चाहिये।

गुणोत्तर माध्य के लिये दूसरा तर्क इस दृढ़ कथन पर आधारित है कि मापेक्षों के बारम्बारता वटन की प्रवृत्ति एक सामान्य वटन बनाने की होती है जब उन्हें बहुगुणीय X पैमाने वाले कागज पर लेखाचित्रित किया जाता है। इस प्रकार का बारम्बारता वटन, किन्तु कीमत मापेक्षों का नहीं, चार्ट 23 13 और 23 14 में दिखाया गया है। तर्क इस प्रकार चलता है कीमत का दुगनापन उतने ही महत्त्वपूर्ण अपमर्गण को प्रस्तुत करता है (और उतना ही घटित हो सकता है), जितना कि उसके पहले स्तर के आधे तक गिरावट, यह आधार वर्ष में उसी प्रकार $\frac{1}{2}$ गुणा बढ़ सकता है जिस प्रकार कि आधार वर्ष में $\frac{1}{2}$ गुणा गिर सकता है, यह उसी प्रकार अनन्त तक बढ़ सकता है जिस प्रकार कि शून्य तक गिर सकता है। अतः परिणामी बारम्बारता वटन ज्यामितीय ढंग से सामान्य होने लगता है, और गुणोत्तर माध्य, जो बहुतक इस प्रकार के वटन के साथ एक रूप हो जाता है, उचित औसत है। यह दलील तर्कसंगत है परन्तु उन धारणाओं पर आधारित है जो पूर्णतया भिन्न नहीं हैं। हमें विश्वास नहीं कि कीमत उसी प्रकार से दुगुनी हो सकती है जिस प्रकार से आधी रह सकती है, या उसी प्रकार से 50 प्रतिशत बढ़ सकती है जिस प्रकार एक-तिहाई गिर सकती है, और जब तक इस प्रकार का मन्तुलन स्थापित नहीं होता तब तक गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करने का उचित आधार हमारे पास नहीं है।

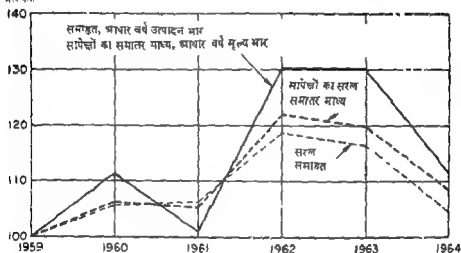
यह नहीं मोचना चाहिये कि गुणोत्तर माध्य का कभी भी प्रमाण नहीं किया जाना चाहिये, केवल मान यह मन्देह किया जाता है कि क्या इसमें समान्तर माध्य से अधिक कोई अन्तर्निहित सामान्य अच्छाई है। लेखकों का यह विश्वास है कि औसत का प्रयोग, बहुत अधिक मात्रा में सूचकांक के वांछित प्रयोग द्वारा निर्धारित किया जाता है। जैसाकि प्राय होता है यदि हम दो विभिन्न समयों में या दो विभिन्न स्थानों पर उन्हीं वस्तुओं के क्रय के लिये आवश्यक मुद्रा की मात्रा की तुलना करना चाहें (या कदाचित् उन्हीं वस्तुओं और वातावरण के साथ एक जैसे व्यक्तियों के लिये मन्तुष्टि की बराबर मात्रा की), तो भारित समान्तर माध्य का प्रयोग किया जाना चाहिये। जैसा कि दिखाया जा चुका है, ऐसा इसलिए है कि इस प्रकार के सूचकांक को भारित समान्तर सूचकांक भी माना जा सकता है। दूसरी ओर यदि प्राथमिक उद्देश्य कीमत मापेक्षों का अध्ययन है, जिसमें उनका औसत व्यवहार भी सम्मानित है, तो गुणोत्तर माध्य उपयोगी हो सकता है।

बहुलक, माध्यिका, तथा हरान्मक माध्य बहुतक के प्रयोग का समर्थन प्रायः कभी भी नहीं किया जाता, इनका प्राथमिक कारण यह है कि कीमत मापेक्षों के समूह में माध्यगुणतया कोई स्पष्ट परिभाषित बहुलक विद्यमान नहीं होगा। माध्यिका का शायद ही कभी प्रयोग किया जाना है परन्तु यदि वृद्ध मापेक्षों के प्रतिनिधि-चित्र या परिणुद्धता के सम्बन्ध में मन्देह है तो माध्यिका उचित हो सकता है। वास्तव में इस प्रकार

के सन्देह के उत्पन्न होने का वास्तविक अर्थ यह हो सकता है कि आधारभूत आँकड़े ठीक प्रकार से एकत्रित नहीं किये गये थे। ह्रासक माध्य के प्रयोग का मुभाव उस समय दिया गया है (अध्याय 18 देखें), यदि इस प्रकार की इच्छा है कि कीमत सूचकांक के व्युत्क्रम का मुद्रा की भ्रम शक्ति के सूचकांक के रूप में प्रयोग किया जाए।

चार प्रकार के कीमत सूचकांकी की तुलना—मात्रा सूचकांकी पर प्रारम्भ में विचार करने से पूर्व यह उचित है कि हम एक क्षण के लिये रुकें और उन चार प्रकार के कीमत सूचकांकी के परिणामों की तुलना करें जिनका वर्णन किया जा चुका है। चार्ट 17.4 में ये

प्राप्त



चार्ट 17.4 नीचे फलादि कीमतों के विभिन्न विधियों में प्राप्त। 1959—1964 के सूचकांक, आकड़े सारणी 17.1, 17.2, 17.5, तथा 17.6 से।

चारों सूचकांक दिखाए गये हैं, परन्तु इनमें चार की अपेक्षा तीन वक्र हैं क्योंकि दो सूचकांक परस्पर मिल जाते हैं। जैसा कि हम पहले से जानते हैं, वे दो वक्र जो समान हैं आधार-वर्ष मात्रा भारों के साथ समाहित और आधार-वर्ष मूल्यों द्वारा भारित सापेक्षों की अक-गणितीय औसत हैं। अभी तीनों वक्रों की सामान्य सहमति की ओर ध्यान दें, यद्यपि इनकी मात्रा में (उदाहरणार्थ 1962 और 1963 में) कुछ महत्वपूर्ण भिन्नता है और दिशा में एक भिन्नता है। सापेक्षों की सरल समाहित और सरल अकगणितीय औसत, जिन दोनों में एक सम्बन्धी त्रुटियाँ हैं, चार वर्षों में पर्याप्त ऊँची उठने में असफल रही हैं और सरल समाहित तो 1961 में गलत दिशा में चली।

मात्रा सूचकांक

समाहित प्रकार—मात्रा (भौतिक परिमाण) का समाहित सूचकांक कीमत सूचकांक का प्रतिरूप है। इस प्रकार सरल समाहित मात्रा सूचकांक की रचना में सूत्र

$$Q = \frac{\sum q_n}{\sum q_0}$$

निहित है और सारणी 17.7 इस प्रकार के नीचे फलादि के मात्रा सूचकांक के परिवर्तन को दर्शाती है। सामान्यतया इस प्रकार से परिष्कृत सूचकांक स्पष्टतः संकीर्ण होता है,

क्योंकि इसमें विभिन्न इकाइयों में अभिव्यक्त मात्राओं का जोड़ निहित है, जैसे टन, हजारों बोर्ड फुट, किनोवाट घंटे, इत्यादि। नीबू फलादि के लिये सारे उत्पादन को पाउंडों में अभिव्यक्त करना सम्भव हो सकता था परन्तु इसमें भी मन्तोपजनक सूचकांक प्राप्त नहीं होगा क्योंकि अर्थव्यवस्था में प्रत्येक फल की सापेक्ष महत्ता की उपेक्षा हो जाएगी।

आधार वर्ष कीमतों को भारों के रूप में प्रयोग करने से, सूच्य बनता है

$$Q = \frac{\sum q_n P_0}{\sum q_0 P_0}$$

इस भारत समाहत मात्रा सूचकांक की रचना को मारणी 17.8 में दिखाया गया है जिसमें 1959=100।

जिन प्रकार कीमत का समाहत सूचकांक बदलती हुई कीमतों पर वस्तुओं के निश्चित समाहार के बदलते हुए मूल्य को मापता है ठीक उसी प्रकार से भौतिक परिमाण का समाहत सूचकांक स्थिर कीमतों पर वस्तुओं के बदलते हुए समाहार के बदलते हुए मूल्य को मापता है। कीमत सूचकांक इस प्रश्न का उत्तर देता है यदि हम वस्तुओं के उसी चयन को प्रत्येक वर्ष लेंगे, परन्तु विभिन्न कीमतों पर, तो हम प्रतिवर्ष कितना व्यय करेंगे? भौतिक परिमाण सूचकांक इस प्रश्न का उत्तर देता है: यदि हम उसी कीमत पर प्रतिवर्ष विशिष्ट वस्तुओं की विभिन्न मात्राएँ लेंगे तो हम प्रतिवर्ष कितना व्यय करेंगे? जबकि पहली अवस्था में खर्च की गई राशि में अन्तर कीमत परिवर्तन के कारण था, वहाँ दूसरी अवस्था में अन्तर अवश्यमेव क्रय और विक्रय की गई मात्राओं में परिवर्तन के कारण था क्योंकि कीमतें स्थिर रखी गई थी। इस प्रकार पूर्व दिए गए सूच्य के प्रयोग से परिकल्पित सूचकांक प्रत्येक आवृत्त अवधि के लिए तुलनात्मक मात्राओं (उत्पादित, बेची गई, उपभोग की गई आदि) को दर्शाता है।

सारणी 17.7

नीबू फलादि उत्पादन के सरल साधारण समाहत सूचकांकों की रचना, 1959—1964*

(घाताएँ सहज पेरिब्राओ में)

फल	1959	1960	1961	1962	1963	1964
अमुरकन प्लोरिडा	30,500	31,600	35,000	30,000	26,800	31,900
नीबू कैलिफोर्निया	17,100	13,600	15,200	12,400	15,800	13,500
सतरे, कैलिफोर्निया	13,500	9,000	7,600	12,600	15,500	15,600
सतरे कैलिफोर्निया	17,300	16,000	13,100	16,200	15,500	16,000
सतरे, प्लोरिडा	91,500	80,700	113,400	74,500	58,300	86,200
समाहार	169,900	156,900	184,300	145,700	131,900	163,200
सूचकांक (1959 का प्रतिमान)	100.0	92.3	108.5	85.8	77.6	96.1

* समस्त वस्तुओं के सम्बन्ध में सारणी 17.1 की डिफरेंस देखें।

अन्य सारणी 17.2 में नीचे दिए गए मानों में।

सारणी 17 8

नीबू फलादि उत्पादन के समाहृत सूचकांकों की रचना, 1959—1964,
1959* की कीमतों द्वारा भारित

(मूल्य सहस्र डॉलरों में)

फल	1959 कीमत प्रति पेटी	1959 की कीमतों पर निर्दिष्ट वर्ष में उत्पादित मात्रा का मूल्य					
		1959	1960	1961	1962	1963	1964
अमरफल फ्लोरिडा	\$4 41	134,505	139,356	154,350	132,300	118,188	140,679
नीबू, कैलिफोर्निया	7 10	121,410	96,560	107,920	88,040	112,180	95,850
सतरे, कैलिफोर्निया							
नेवल	7 66	103,410	68,940	58,216	96,516	118,730	119,496
सतरे, कैलिफो							
निया वैलेन्सिया	8 36	144,628	133,760	109,516	135,432	129,580	133,760
सतरे फ्लोरिडा	5 32	486,780	461,244	603,288	396,340	310,156	458,584
समाहार मूल्य		990,733	899,860	1,033,290	848,628	788,834	948,369
सूचकांक (1959 का प्रतिशत)		100 0	90 8	104 3	85 7	79 6	95 7

*फल वर्षों के सम्बन्ध में सारणी 17 1 की टिप्पणी देखें।

सारणी 17 1 में 1959 के कीमतों और तब सारणी 17 7 के मात्रा आंकड़ों पर आधारित।

सारणी 17 9

नीबू फलादि उत्पादन के सूचकांकों की रचना, 1959—1964,*
मात्रा सापेक्षों के सरल समान्तर माध्य के प्रयोग द्वारा

फल	1959	1960	1961	1962	1963	1964
अमरफल, फ्लोरिडा	100.0	103 6	114 8	98 4	87 9	104 6
नीबू, कैलिफोर्निया	100 0	79 5	88 9	72 5	92 4	78 9
सतरे, कैलिफोर्निया, नेवल	100 0	66 7	56 3	93 3	114 8	115 6
सतरे, कैलिफोर्निया, वैलेन्सिया	100 0	92 5	75.7	93 6	89 6	92 5
सतरे, फ्लोरिडा	100 0	94 8	123 9	81 4	63 7	94 2
योग	500 0	437 1	459 6	439 2	448 4	485 8
औसत (1959 का प्रतिशत)	100 0	87 4	91 9	87 8	89 7	97 2

*काल वर्षों के सम्बन्ध में सारणी 17 1 की टिप्पणी देखें।

सारणी 17 7 के आंकड़ों पर आधारित।

सारणी 17 II
आधारवर्ष (1959) के मूल्यों से भारत माता मापेसो के समान्तर माध्य के प्रयोग द्वारा
नौवें पचासवें उत्पादन के सूचकांकों की रचना, 1959—1964*
(मूल्य मूल्य बास्ते में)

पद	1959 का मूल्य	1959 के मूल्य से गुणा करते निर्दिष्ट वर्ष के माता मापेस					
		1959	1960	1961	1962	1963	1964
समूह 1, पचासवा	134 505	134 505	139 347	1 54 412	132 353	118 230	140 692
मीनू पैरिफेरिया	121 410	121 410	99 521	107 933	88 022	112 183	95 792
सतरे, पैरिफेरिया सेवर	103 410	103 410	68 974	58 220	96 482	118 715	119 542
सतर पैरिफेरिया बॉक्सिया	144 628	144 628	133 781	109 483	135 772	129 587	133 781
सतर, पोरिडा	486 780	486 780	461 457	603 120	396 239	310 079	458 547
मास		990 733	900 090	1 033 168	848 468	788 794	948 354
सूचकांक (1959 का प्रतिगत)		100 0	90 9	104 3	85 6	79 6	95 7

* पचासवें वर्षों के मूल्य व से सारणी 17 I की दिवसी देखें ।

सारणी 17 II के माता मापेसो तथा सारणी 17 I के 1959 के मूल्य बॉक्सो पर आधारित ।

मात्रा सूचकांक की रचना के लिये भारित करने की विभिन्न विधियाँ प्राप्त हैं और सामान्य रूप से वे ही विचार लागू होते हैं जिनका कीमत सूचकांक के सम्बन्ध में वर्णन किया गया था। कीमत भारों को प्राप्त करने के लिये जोकि दो या अधिक वर्षों की औसतें हैं, औसत कीमतें भारित औसत कीमतें होने चाहियें जिनको इन वर्षों में कुल बेचे गए मूल्य को उन्ही वर्षों में इकाइयों की कुल संख्या से विभक्त करके प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार यदि आधार और प्रदत्त वर्षों की औसत मात्राओं का प्रयोग किया जाए तो हम कठिन दिव्याई देने वाला यह सूत्र प्राप्त होता है

$$Q = \frac{\sum q_n \left(\frac{p_0 q_0 + p_n q_0}{q_0 + q_n} \right)}{\sum q_0 \left(\frac{p_0 q_0 + p_n q_n}{q_0 + q_n} \right)}$$

इसी प्रकार, यदि समापवर्तक विधि का प्रयोग किया जाए तो कीमत भार को दीर्घतम मूल्य से प्राप्त करना चाहिये जो कि विचाराधीन सभी वर्षों में समान है।

सापेक्षों की औसतें—मात्रा सूचकांक की रचना की यह विधि कीमत परिवर्तनों को मापने में प्रयुक्त विधि से एकदम मिलनी-जुलती है। इस विधि का सारणी 17.9 और 17.10 में निरूपण किया गया है। जिस प्रकार कीमत सूचकांक के सम्बन्ध में मूल्य मालूम हुआ था आधार-वर्ष मूल्य भारों के प्रयोग में वही परिणाम निकलता है जैसाकि आधार-वर्ष भारों मात्रा का प्रयोग करने वाली समाहत विधि से प्राप्त होता है, केवल पूर्णांक के कारण होने वाले अन्तर ही अपवाद है।

परिकलन की सुगमता तथा अर्थ की मरलता के कारण समाहत विधि को, जहाँ भी लागू होती हो, मापकों की औसत विधि पर प्राथमिकता दी जानी चाहिये। जैसाकि पहले देखा गया है, कई परिस्थितियों में समाहत विधि का प्रयोग नहीं किया जा सकता। जब जिन सापेक्षों की औसत निकाली जानी है वे प्रतिशतताएँ हैं, जिनका आधार स्थिर नहीं अपितु परिवर्तनशील सामान्य है, तो पूर्व-वर्णित स्थिति लागू नहीं होती। यहाँ सचमुच ही सापेक्षों की औसत विधि आवश्यक है। दूसरे शब्दों में, यदि व्यापार चक्रों का सूचकांक बनाया जाता है तो समाहत विधि का प्रयोग नहीं किया जा सकता, क्योंकि औसत किये जाने वाले आँकड़े उपनति और ऋतुनिष्ठ की प्रतिशतताएँ हैं।

मात्रा सापेक्षों की औसत के लिये चुने गए भार प्रायः विभिन्न श्रेणियों के विनिमय मूल्यों के अनुपात में होते हैं। कभी-कभी विभिन्न श्रेणियों के सापेक्षिक कोणांक पर भी कुछ विचार किया जाता है यदि वे चक्रीय सापेक्ष हों। यदि सूचकांक परिवर्तन मापने के उद्देश्य से नहीं बल्कि परिवर्तनों की पूर्व-सूचना देने के उद्देश्य से बनाया जाता है तो इनके चुनने का आधार प्रस्तुत की गई विभिन्न श्रेणियों की आर्थिक महत्ता नहीं अपितु पूर्व सूचना देने के उद्देश्यों की महत्ता होगी।

अध्याय 18 में बहुत से महत्वपूर्ण सूचकांक की रचना करने की विधियों का वर्णन किया जाएगा और तकनीक की कुछ बातें तथा सिद्धान्त, जिन पर इस विषय में विचार नहीं हुआ वर्णन किया जाएगा।

सूचकांक सिद्धान्त एवं व्यवहार

इस अध्याय का उद्देश्य दोहरा है। प्रथम सूचकांक के सिद्धान्त एवं तकनीक के कुछ परिष्कारों का और आगे बहान किया जाएगा। दूसरे कई एक सूचकांकों का विवरण दिया जाएगा। आंशिक रूप से उनकी विस्तृत उपयोगिता के कारण और आंशिक रूप से इस कारण कि उनमें एक रोचक तकनीक का प्रयोग किया जाता है सूचकांक को चुना गया है। सामान्य रूप से यह देखा जाएगा कि अध्याय 17 में सार पद विधियों का वास्तविक व्यवहार में पूर्ण रूप से अनुसरण नहीं किया जाएगा परन्तु प्रत्येक अवस्था में कुछ परिस्थितियाँ होंगी जो विधि के विशेष मशोधनों को उचित प्रमाणित करती हैं।

सूचकांक धारणाएँ

गणितीय परीक्षण—सूचकांकों पर विचारकों का एक सम्प्रदाय यह विप्रवस करता है कि पूर्ण सूचकांक मूल जैसी कोई वस्तु हों सकती है और संगति के कुछ गणितीय परीक्षणों को पूरा करने की अपनी योग्यता के कारण ऐसे मूल को पहचाना जा सकता है। ऐसे परीक्षण तार्किक आधार पर उचित हैं अथवा नहीं यह एक खुला प्रश्न है। इस सिद्धान्त के अनुसार यदि कोई सूचकांक इन परीक्षणों को पूरा करता है तो उसे न केवल 'आदर्श' समझा जा सकता है परन्तु दूसरे सूचकांक जो इन परीक्षणों को पूरा नहीं करते उनको इस स्तर पर रखा जा सकता है कि वे वास्तविक व्यवहार में कितने अधिक उनके निकट होते हैं।

ममता के तक द्वारा परीक्षण किये जाते हैं। कोई बात जो एक वस्तु के विषय में मूल्य है जब उस वस्तु के मूल्य में मूल्य के विषय में सोचते हैं तो भी वह मूल्य हानी चाहिये। यदि सतरो की पटी 1965 के मुकाबले 1967 में 125 प्रतिशत के मूल्य की थी तब 1965 की कीमत 1967 की कीमत का 80 प्रतिशत थी। ममता के तर्क द्वारा यदि 1965 के आधार के साथ 1967 में सूचकांक 125 था तब 1967 के आधार के साथ 1965 में सूचकांक 80 होना चाहिये। दूसरे शब्दों में सूचकांक को पश्चगामी तथा अग्रगामी होना चाहिये।

पुनः बल्फा कीजिये कि एक वस्तु की कीमत बढ़कर 40 सेन्ट में 60 सेंट हो जाती है और विक्रय दो द्वाइया से बढ़कर चार द्वाइया हो जाता है। कीमत आधार वर्ष का 150 प्रतिशत है विक्रय मात्रा 200 प्रतिशत है, जब कि मूल्य आधार वर्ष का $1.50 \times 2.00 = 3.00$ गुणा है अथवा आधार वर्ष का 300 प्रतिशत। इसे ध्यान से देखने से मत्प्राप्त हो जाता है कि $\frac{0.60 \times 4}{0.40 \times 2} = 3$ । एक बार फिर ममता के आधार पर तब बलन हुए, यह दलील दी जा सकती है कि उन्हीं आँकों में परिवर्तित मात्रा सूचकांक कीमत सूचकांक

द्वारा गुणा आघार वर्ग के सम्बन्ध में वय में नेतदेन के सापेक्ष मूल्य के बराबर होना चाहिये । दूसरे शब्दों में यदि

$$\frac{p_n}{p_o} \times \frac{q_n}{q_o} = \frac{p_n q_n}{p_o q_o},$$

तब यह सत्य होना चाहिये कि

$$P \times Q = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_o}$$

जैसा कि पिछले अनुच्छेद में सूचित किया गया है, दो परीक्षण हैं जिन्हें "गणितीय परीक्षण" सम्प्रदाय द्वारा विज्ञेय रूप में महत्त्वपूर्ण समझा जाता है । उन्हें कहा जा सकता है (1) समय परावर्तन परीक्षण (2) कारक परावर्तन परीक्षण ।

समय परावर्तन परीक्षण को अधिक अमरिग्वता के साथ निम्नलिखित रूप में वर्णित किया जा सकता है यदि कीमत (या मात्रा) सूचकांक सूत्र के समय पादाको को परस्पर परिवर्तित कर दिया जाता है तो परिणामतः कीमत (या मात्रा) सूत्र मौलिक सूत्र का व्युत्क्रम होना चाहिये । यदि हम

$$\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o}$$

सूत्र को ल और समय पादाको को परस्पर बदल दें तो परिणामतः सूत्र है

$$\frac{\sum p_o q_n}{\sum p_n q_n}$$

परन्तु

$$\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum p_o q_n}{\sum p_n q_n} \neq 1,$$

इसलिय परीक्षण पूरा नहीं उतरता । दूसरी ओर सूत्र

$$\sqrt{\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum p_o q_n}{\sum p_n q_n}}$$

बन जाता है

$$\sqrt{\frac{\sum p_o q_n}{\sum p_n q_n} \times \frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o}}$$

दोनों व्यंजकों का गुणनफल एक है, और इविन्ग फिशर का "धादर्श" सूचकांक समय परावर्तन परीक्षण पर खरा उतरता है ।

कारक परावर्तन परीक्षण को इस प्रकार से वर्णित किया जा सकता है यदि कीमत (या मात्रा) सूचकांक सूत्र में p तथा q कारकों का परस्पर परिवर्तन कर दिया जाता

है, ताकि मात्रा (या कीमत) सूचकांक सूत्र प्राप्त किया जाए, तो दोनों सूचकांक के गुणनफल को सही मूल्य अनुपात

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_o}$$

प्रदान करना चाहिये। पुन सूत्र

$$\frac{\sum p_n q}{\sum p_o q_o},$$

को लेकर हम इसे

$$\frac{\sum q_n p_o}{\sum q_o p_o}$$

में रूपान्तरित कर देते हैं। यह एक भाना सूचकांक है, परन्तु क्योंकि

$$\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum q_n p_o}{\sum q_o p_o} \neq \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_o},$$

परीक्षण पूरा नहीं उतरता है। तथापि, हम देखते हैं कि

$$\sqrt{\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n}}$$

$$\sqrt{\frac{\sum q_n p_o}{\sum q_o p_o} \times \frac{\sum q_n p_n}{\sum q_o p_n}}$$

में रूपान्तरित हो जाता है। इन दो "आदर्श" सूचकांकों का गुणनफल

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_o}$$

है, अतः परीक्षण पूरा हो जाता है।

फिशर के "आदर्श" सूचकांक को ऐसा इसलिये कहा जाता है क्योंकि यह उन सूचकांकों की अत्यन्त सीमित सम्ख्या में से एक है जो इन दोनों परीक्षणों को पूर्ण करते हैं।

सूत्र का प्रयोग से सम्बन्ध—अन्य विचाराधारा के सम्प्रदाय में सम्बद्ध सूचकांक के विद्यार्थियों द्वारा "आदर्श" सूचकांक की धारणा का विरोध इस आधार पर किया जाता है कि विशेषण पूर्णतया यह नहीं कह सकता कि "आदर्श" सूचकांक किसका माप करता है, वह केवल अस्पष्ट रूप से यह कह सकता है कि यह कीमत स्तर में परिवर्तन का माप करता है, या इसी प्रकार के किसी व्यञ्जक का प्रयोग कर सकता है। एक उपागम के अनुसार तर्क-संगत प्रविधि विशिष्ट प्रश्न पूछना और फिर ऐसा सूत्र बनाता है जो उस विशिष्ट प्रश्न का उत्तर दे। उदाहरणार्थ, परचून कीमतों में प्रयुक्त $\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o}$ सूत्र वर्तमान वर्ष में लागत की

जीवन के भौतिक स्तर को सहायना करने वाले आधार वर्ष में लागत के साथ, तुलना करता है, जिसे आधार वर्ष में प्राप्त किया गया था। जबकि यह एक विशिष्ट प्रश्न है तो भी यह संभव है कि पूछने योग्य सबसे अधिक उपयोगी प्रश्न न हो। पूछने योग्य समुचित प्रश्न क्या है यह खोज करने वाले व्यक्ति के सम्मुख उपस्थित महत्वपूर्ण समस्या है। अध्याय 17 में केन्स का यह विश्वास उचित माना गया था कि मुद्रा के मूल्य में परिवर्तनों को मापने के लिये प्रथम एक ऐसा सूचकांक खोजना चाहिये जो दो अवधियों में व्यक्तियों के समान समूहों को समान उपयोगिता प्रदान करते हुए वस्तुओं के समानाहारी की बदलती हुई लागत को मापे। अब सूत्र $\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n}$ में यह कल्पना की गई है कि

यदि उनकी रुचियां में परिवर्तन नहीं होता तो लोग वस्तुओं की उतनी ही मात्राएँ खरीदते जाएँगे, चाहे कीमतें कितनी ही चढ़ या गिर जाएँ, जबकि वास्तव में अधिक महँगी हो रही मद्यों से सस्ती हो रही मद्यों की ओर विवर्तन हो रहा है। तब इस सूत्र का ऊर्ध्वगामी 'भुकाव' होगा, क्योंकि वस्तुओं की वही मात्रा प्राप्त करने की लागत, उपयोगिता की उसी मात्रा को प्राप्त करने की लागत से अधिक होगी। इसके विपरीत सूत्र $\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n}$ एक

व्यक्ति के जीवन के वर्तमान भौतिक स्तर की लागत की तुलना आधार वर्ष में उसकी लागत के साथ करता है। इसी विचार में, इस सूत्र का अधोगामी "भुकाव" है, क्योंकि कोई भी समझदार व्यक्ति आधार वर्ष में उतनी ही वस्तुएँ न खरीदता जितनी कि वह अब खरीदता है (यद्यपि रुचियां तथा वातावरण वही रहे), क्योंकि वस्तुओं की सापेक्ष कीमतें विभिन्न होती। आधार वर्ष में वस्तुओं के वर्तमान वर्ष का बिल प्राप्त करने की लागत वर्तमान वर्ष की अधिक सम्पुष्टियां को प्राप्त करने की लागत से अधिक हुई होती।

फिशर का "आदर्श" सूचकांक सूत्र विपरीत दिशाओं में भुके (या अनुचित) दो सूचकांकों का गुणोत्तर माध्य है; और बहुत से व्यक्तियों का विचार है कि दो अनुष्ठित उत्तरों की औसत के तौर पर एक शुद्ध उत्तर प्रदान नहीं करती, चाहे दो अनुष्ठित विभिन्न दिशाओं में हो और चाहे सूत्र आन्तरिक रूप से सगत हो। इसके विपरीत, यह सन्देहास्पद है कि केन्स की समापवर्तक विधि वास्तविक व्यवहार में केन्स के प्रश्न का "आदर्श" सूचकांक की अपेक्षा अधिक अच्छा (या वैसे ही) उत्तर देगी। सापेक्ष कीमतों में परिवर्तन क्रय की गई सापेक्ष मात्राओं में परिणामतः परिवर्तनों के साथ समापवर्तक का मूल्य पटा कर न्य की गई कुल वस्तुओं के छोटे से अनुपात के बराबर कर सकता है। तथापि, यह इस तर्कसंगत निष्कर्ष पर पहुँचने का एक और प्रयास है कि यथार्थतः क्या मापने का प्रयास किया जा रहा है।

मुद्रा के मूल्य (डालर की क्रय शक्ति) में परिवर्तनों को मापने के उद्देश्य के लिये कीमत सूचकांक के व्युत्क्रम का प्रयोग परम्परागत है। तथापि एक अन्य उपागम में यह दलील दी जाती है कि यह तर्कहीन है। जिस प्रकार विशिष्ट वस्तुओं के कीमत परिवर्तनों की कीमत सूचकांक औसत निकालना है उसी प्रकार विशिष्ट वस्तुओं के लिये डालर की क्रय शक्ति में परिवर्तनों की क्रय शक्ति सूचकांक को औसत होना चाहिये। यदि अन्न की कीमत प्रति दशल .50 डालर है, तो अन्न के लिये डालर की क्रय शक्ति 2 दशल है।

प्रति डानर क्रय शक्ति की इकाइयों को सकेत चिह्न u के द्वारा दिखाते हुए, यह सम्प्रदाय इन नए शक्ति सूचकांक सूत्र का सुभाव देता है

$$\text{नय शक्ति} = \frac{\sum \left(\frac{u_n}{u_o} p_o q_o \right)}{\sum p_o q_o}$$

परन्तु क्योंकि $u = \frac{1}{p}$, अतः हम लिख सकते हैं

$$\text{नय शक्ति} = \frac{\sum \left(\frac{p_o}{p_n} p_o q_o \right)}{\sum p_o q_o}$$

यह व्यञ्जक आधार वष मूल्यों से भारित कीमत सापेक्षों के हरात्मक माध्य का व्युत्क्रम है, क्योंकि द्वितीय निम्नलिखित है

$$1 - \frac{\sum \left(\frac{1}{p - p_o} p_o q_o \right)}{\sum p_o q_o} = 1 - \frac{\sum \left(\frac{p_o}{p_n} p_o q_o \right)}{\sum p_o q_o} = \frac{\sum p_o q_o}{\sum \left(\frac{p_o}{p_n} p_o q_o \right)}$$

ऊपर का सूत्र कीमत सूचकांक का अभी भी वास्तविक व्युत्क्रम है (यद्यपि धारणा में नहीं), यद्यपि अकर्मण्यता माध्य पर आधारित सामान्य सूचकांक नहीं है। सम्भवतः भारित करने की विधि में, इसकी धारणा पर आधारित न करते हुए कुछ परिवर्तन करना सम्भव होगा।

यदि हम इस विचार को स्वीकार कर लेते हैं कि सूचकांक का उद्देश्य सूत्र का निर्धारण करना है तो हम 'आदर्श' सूत्र को त्यागने की आवश्यकता नहीं। उसे बनाए रखना सम्भव होगा यद्यपि सूत्र प्रत्येक सूचकांक समस्या का पूर्ण हल नहीं है, तथापि बहुत से ऐसे उद्देश्य हैं जिनके लिए यह विशेष रूप से अनुकूल है। उदाहरणार्थ, मूल्य का विश्लेषण सघटक कीमत परिवर्तनों तथा मात्रा परिवर्तनों में परिवर्तित हो जाता है। तो भी यदि हम यह स्थापित लेते हैं कि प्रत्येक सूचकांक को साधारण व्यक्ति के घरेलू में व्यवहार विशिष्ट प्रश्न का उत्तर अवश्य देना चाहिये तो सिद्धान्त सही सूचकांक के रूप में इसका त्याग करना पड़ेगा।

श्रृंखला सूचकांक

अपनी सरलतम अवस्था में, श्रृंखला सूचकांक वह है जिसमें प्रत्येक वर्ष (या उसके भाग के लिए) अर्थों को प्रथम पहले वर्ष की प्रतिशतताओं के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है। तब एक श्रृंखला सूचकांक बनाने के लिए इन प्रतिशतताओं को उत्तरोत्तर गुणा द्वारा श्रृंखलाबद्ध कर लिया जाता है। सारणी 18 I नीचे पल कीमतों के भारित समाहत श्रृंखला सूचकांक का परिवर्तन प्रदर्शित करती है। जैसा कि सारणी के ऊपर देखा गया, वर्षों के प्रत्येक जोड़े के प्रथम वर्ष में उत्पादन द्वारा कीमतों को भारित किया जाता है। इन उत्पादों को प्रत्येक वर्ष के लिए जोड़ा जाता है और प्रत्येक जोड़ को पहले वर्ष के जोड़ की प्रतिशतता

सारणी 18.1

नौवू फसलदि कीमतों के भारत समाहित नू खला सूचकांक की रचना * 1959-1964

(वर्षों के प्रत्येक जोड़ के लिये भार प्रथम वर्ष के उत्पादन है। मध्य सहस्र शकरो में)

वर्ष	कीमत X वर्षों के प्रत्येक जोड़ में से प्रथम वर्ष का उत्पादन					उपज का योग	प्रत्येक जोड़ के पहले वर्ष का प्रतिशत	नू गना सूचकांक
	अग्रूरकन	नौवू कनिफोनिया	सतरें कनिफोनिया	सतरें कनिफोनिया	सतरें कनिफोनिया			
1959	134 505	121 410	103 410	144 628	486 780	990 733	100 0	100 0
1960	131 760	123 462	124 740	129 404	592 920	1 102 286	111 3	111 3
1960	136 512	98 192	68 940	133 760	461 244	898 648	100 0	100 0
1961	141 884	97 648	92 340	127 040	441 303	900 215	100 2	111 5
1961	157 150	109 136	77 976	104 014	577 206	1 025 482	100 0	100 0
1962	205 800	130 112	70 072	99 822	876 582	1 382 388	134 8	150 3
1962	176 400	106 144	116 172	123 444	575 885	1 098 045	100 0	100 0
1963	182 700	90 272	97 272	151 308	579 610	1 101 162	100 3	150 8
1963	163 212	115 024	119 660	144 770	453 574	996 240	100 0	100 0
1964	159 192	132 404	111 600	103 540	360 294	867 030	87 0	131 2

* फसल वर्षों से सर्वप्रथम सारणी 17.1 की टिप्पणी देखिये।

सारणी 17.1 के कीमत जोड़ों तथा सारणी 17.7 के उत्पादन जोड़ों पर आधारित।

के रूप में व्यक्त किया जाता है जैसाकि मारणी में अन्तिम से पहले स्तम्भ में दिखाया गया है। 'शृंखलित करने' की प्रक्रिया के परिणामों को सारणी के अन्तिम स्तम्भ में दिखाया गया है। उनको निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त किया जाता है (1) 1960 प्रतिशतता, 111 3 1960 का शृंखला सूचकांक है, (2) क्योंकि 1961 प्रतिशतता अंक 1960 से 0 2 प्रतिशत अधिक है, अतः 1961 का शृंखला सूचकांक $1113 \times 1.002 = 1115$ या 111 5 प्रतिशत है, (3) 1962 प्रतिशतता अंक 1961 के अंक का 1 348 है अतः 1962 के लिए शृंखला सूचकांक $1115 \times 1.348 = 1503$ या 150 3 प्रतिशत है, और इसी प्रकार अन्य वर्षों के लिए।

शृंखला सूचकांक के लाभ हैं (1) यदि वस्तुएँ अब उचित नहीं हैं तो उन्हें शीघ्रता से त्यागा जा सकता है, (2) नई वस्तुओं को लाया जा सकता है, तथा (3) भारों को बदला जा सकता है। इस प्रकार उत्पादन वितरण, उपभोग आदितो और मौलिक परिवर्तनों गुण परिवर्तनों किन्हीं आकृष्टों में किसी क्रम भंग का, और अन्य वंश ही परिवर्तनों का जिन्हें एक निश्चित आधार मूचकाक में शीघ्रता से काट नहीं किया जा सकता, ध्यान रखा जा सकता है। शृंखला सूचकांक के सिद्धान्त का इस अध्याय में आम बहुत से उदाहरणों में प्रयोग किया गया है।

शृंखला सूचकांक की हानि यह है कि जब पिछले वर्ष के प्रतिशतता अंक वर्षानुवर्ष परिवर्तनों की परिशुद्ध तुलनाएँ प्रदान करते हैं, शृंखलित प्रतिशतताओं की दीर्घ परिमर तुलनाएँ पूर्णतः मान्य नहीं हैं। तथापि जब सूचकांक प्रयोग करने वाला वर्षानुवर्ष तुलनाएँ करना चाहता है जैसा कि प्रायः व्यापारी के द्वारा किया जाता है तो पिछले वर्ष की प्रतिशतताएँ एक लचीला तथा उपयोगी मापन प्रदान करती हैं।

नई वस्तुओं का प्रतिस्थापन तथा भारों का परिवर्तन

कभी कभी यह आवश्यक भवता वाधित होता है कि सूचकांक में एक वस्तु को निकाला जाए एक नई वस्तु को जोड़ा जाए एक वस्तु का दूसरी से प्रतिस्थापन किया जाए, या एक वस्तु के भार में परिवर्तन किया जाए। एक वस्तु के दूसरी वस्तु में प्रतिस्थापन के अन्तर्गत प्रायः भार का परिवर्तन भी होगा। इन समस्याओं के अन्तर्गत शृंखला सूचकांक का प्रयोग आता है। प्रतिस्थापन के उदाहरणस्वरूप हम 1959 (आधार वर्ष) 1962, 1963 तथा 1964 के वर्षों के लिए नीबू फनादि कीमतों का सूचकांक बनाएँ। विवरण के उद्देश्य के लिए हम 1962 में कैलिफोर्निया वेल्लेमिया मत्तरी का कैलिफोर्निया नेवल सतरो के लिए प्रतिस्थापन करेंगे।

मारणी 18 2 आधार वर्ष मात्रा भारों का प्रयोग करत हुए, 1959 तथा 1962 के लिए भारत समाहृत सूचकांक का परिवर्तन प्रदर्शित करती है और यह दवा जा सकता है कि कैलिफोर्निया नेवल सतरो कैलिफोर्निया नीबू तथा पनारिडा अग्रूरफन का प्रयोग करने हुए 'पुरानी श्रेणी' के लिये 1962 का सूचकांक 125 29 है। 1962 में वेल्लेमिया सतरो की कीमतों को नेवल के भार से गुणा करके जिनमें मारणी में प्रदर्शित उपज 1028 70 लाख डालर, प्राप्त होती है, कैलिफोर्निया वेल्लेमिया का कैलिफोर्निया नेवल सतरो के लिये प्रतिस्थापन किया जाता है। 1952 की 'नवीन श्रेणी' के लिये उत्पादन का योग 4285 86 लाख डालर है, और इस योग का पूर्व निर्धारित 1962 के सूचकांक, 125 29 के बराबर रखा जाता है। 1963 तथा 1964 के लिए कैलिफोर्निया वेल्लेमिया सतरो का उत्पादन

सारणी 18.2

भारों में किसी परिवर्तन के बिना कैलिफोर्निया वेलेंसिया संतरो का कैलिफोर्निया नेवल संतरों के लिए प्रतिस्थान प्रदर्शित करते हुए, नीचे कलादि कीमतों के भारित समग्र सूचकांक की रचना,* 1959, 1962, 1963, तथा 1964

फल	मात्रा भार (मिनियम वेडिया)	1959			1962			1963		1964	
		कीमत (डालर प्रति पेटी)	उत्पादन (मिलियन डालर)	P_{59}	कीमत (डालर प्रति पेटी)	उत्पादन पुरानी श्रेणी (मिनियम डालर)	P_{62}	कीमत (डालर प्रति पेटी)	उत्पादन नई श्रेणी (मिलियन डालर)	कीमत (डालर प्रति पेटी)	उत्पादन नई श्रेणी (मिलियन डालर)
अमूरफल, प्लोरिडा	30.5	4.41	134 505		5.88	179,340		6.09	185,745	5.94	181,170
नींबू, कैलिफोर्निया	17.1	7.10	121 410		8.56	146,376		7.28	124,488	8.38	143,298
संतरे, कैलिफोर्निया, नेवल..	13.5	7.66	103 410		9.22
संतरे, कैलिफोर्निया, वेलेंसिया		7.62	124 470		9.34	126,090	6.68	90,180
योग	359 325		...	428,586		...	436 323	...	414,648
सूचकांक, पुरानी श्रेणी	100 00		...	125.29	
सूचकांक, नई श्रेणी.	125.79		...	127.55	...	121.22

* फलन वरी के सम्बन्ध में सारणी 17.1 की टिप्पणी देखें। प्रमुख नीसाम कीमते मॉडियो में श्रुत कीमत कीमत प्रति पेटी हैं।

॥ कैलिफोर्निया वेलेंसिया संतरा कीमत, X कैलिफोर्निया नेवल संतरा मात्रा 1959 से।

अंकड़े एग्रिकल्चरल स्टैटिस्टिक्स के मिनिमम अंतो, समुचित समय कृषि विभाग के मास वस्तुव्यवहार, तथा एन्वेल थाप समरी, दिसम्बर 1965, पृष्ठ 97 से।

उसी प्रकार निर्धारित किया जाता है जैसेकि 1962 का अंक, और 1963 तथा 1964 के लिए उत्पादनो का योग प्राप्त किया जाता है तब इन सम्बन्धों द्वारा 1963 तथा 1964 के सूचकांक प्राप्त किये जाते हैं

1963 के लिये—

$$\frac{428,586}{125.29} = \frac{436,323}{1963 \text{ का सूचकांक}}$$

$$1963 \text{ का सूचकांक} = 127.55$$

1964 के लिये—

$$\frac{428,586}{125.29} = \frac{414,648}{1964 \text{ का सूचकांक}}$$

$$1964 \text{ का सूचकांक} = 121.22$$

सारणी 18.2 में प्रयुक्त प्रविधि कैलिफोर्निया वॉलेमिया सतरो को कम भारित करती है क्योंकि 1962 में दगरी इकाई कीमत कैलिफोर्निया नेबल सतरो की कीमत में कम थी।¹ 1962 में वॉलेमिया सतरो को दिया गया भार भी बहुत कम था क्योंकि नेबल सतरो की केवल 126 लाख पेटियो और वॉलेमिया सतरो की 162 लाख पेटियो का उत्पादन हुआ था। 1963 में भी गई मात्राओं के कारण कोई प्रतिशयोक्ति नहीं है जब दोनों का उत्पादन लगभग 155 लाख पेटियाँ हुआ। 1964 में वॉलेमिया सतरो को यादा मा कम भार दिया गया क्योंकि वॉलेमिया तथा नेबल सतरो का उत्पादन क्रमशः 160 तथा 156 लाख पेटियाँ था। स्पष्टतः जब वॉलेमिया सतरो को नेबल सतरो के लिये प्रतिस्थापित किया गया तब भारों का परिमोघन कर देना चाहिये था।

भारों का इस प्रकार का परिमोघन सारणी 18.3 में किया गया है। यहाँ पर "पुरानी ध्रेणी" के लिये 1962 का सूचकांक पुनः 125.29 है। 1962 की भारित ममाहता की 'नई ध्रेणी' 1926 के मात्रा भारों का प्रयोग करती है और 1962 के लिये "नई ध्रेणी" के उत्पादनो का योग 4059.88 लाख डालर है, जिसे 125.29 के सूचकांक के बराबर कर लिया गया है। तब पट्टे के समान निम्न सम्बन्ध से, 1963 तथा 1964 के सूचकांक प्राप्त किये जाते हैं

1963 के लिये—

$$\frac{405,988}{125.29} = \frac{424,260}{1963 \text{ का सूचकांक}}$$

$$1963 \text{ का सूचकांक} = 130.93$$

1964 के लिये—

$$\frac{405,988}{125.29} = \frac{390,328}{1964 \text{ का सूचकांक}}$$

$$1964 \text{ का सूचकांक} = 120.46$$

1 जब एक प्रतिस्थापन वस्तु के लिये आधार वर्ष भार का प्रयोग निरन्तर रचना तकसल है, तो निम्नलिखित का परिकलन करके पुरानी तथा नई वस्तु की विभिन्न इकाई कीमतों के लिये समबन्ध किया जा सकता है

$$\text{नया भार} = \frac{\text{पुरानी इकाई कीमत}}{\text{नई इकाई कीमत}} \times \text{पुराना भार}$$

तब प्रविधि सारणी 18.3 में दी हुई विधि के समान है, देखिये युन. अर्थ-डी. पुस्तक का प्रथम संस्करण, पृष्ठ 623—626।

सारणी 18.3

कैलिफोर्निया बलैसिया सतरो के निम्न प्रतिस्थापन प्रदर्शित करने हुए नीबू कलादि कीमतों के भारित समग्रित सूचकांक की रचना तथा आधार वर्ष भारो से 1962 के भारो* से विवर्तन 1959 1962 1963 1964

फल	1959				1962				1963				1964	
	1959 मादा भार (मिलियन सेटिंग्स) Q_{59}	कीमत (प्रति पेटी डालर) P_{59}	उपादन (मिलियन डालर) $P_{59}Q_{59}$	कीमत (प्रति पेटी डालर) P_{62}	उपादन (मिलियन डालर) $P_{62}I_{62}$	1962 मादा भार (मिलियन सेटिंग्स) Q_{62}	कीमत (प्रति पेटी डालर) P_{62}	उपादन (मिलियन डालर) $P_{62}Q_{62}$	कीमत (प्रति पेटी डालर) P_{63}	उपादन (मिलियन डालर) $P_{63}I_{63}$	कीमत (प्रति पेटी डालर) P_{64}	उपादन (मिलियन डालर) $P_{64}Q_{64}$		
धूपरफल फ्लोरिडा	30.5	4.41	134.505	5.88	179.340	30.0	5.88	176.400	6.09	182.700	5.94	178.200		
नीबू कैलिफोर्निया	17.1	7.10	121.410	8.56	146.376	12.4	8.56	106.144	7.28	90.272	8.38	103.912		
स तरे, कैलिफोर्निया नेबल	13.5	7.66	103.410	9.22	124.470	16.2	7.62	123.444	9.34	151.308	6.68	108.216		
स तरे कैलिफोर्निया बलैसिया														
योग			359.325		450.186			405.988		424.280		390.328		
सूचकांक, पुरानी श्रेणी			100.0		125.29					130.93		120.46		
सूचकांक नई श्रेणी														

*कमल वर्षों के सम्बन्ध में सारणी 17.1 की टिप्पणी देखें। कीमत प्रमुख नीलम मण्डियों में अनु औसत कीमत प्रति पेटी है।
अधिक सारणी 18.2 के नीचे दिये स्रोतों से।

नई वस्तु का जोड़े बिना पुरानी वस्तु को छोड़ने या एक ऐसी नई वस्तु को जोड़ने में जो पुरानी वस्तु की स्थानापन्न नहीं है, वास्तव में भारों का परिवर्तन निहित है। प्रविधि वैसी ही होगी जैसी कि मारणी 18.3 में है। उसी प्रकार से कोई वस्तु जोड़े या छोड़े बिना भारों का परिवर्तन भी किया जा सकता था।

सूचकांक के विवरण

इस अध्याय का शेष भाग ऐसे अनेक सूचकांक के संक्षिप्त विवरणों में लगाया जायेगा जिन्हें कीमत परिवर्तनों, भौतिक मात्रा में परिवर्तनों, मायान्य तथा विशिष्ट व्यापार गतियों, तथा अन्य परिवर्तनों एवं अन्तरो को मापने के लिये बनाया जाता है। कोई भी सूचकांक पूर्ण विस्तार में वर्णित नहीं है, और पाठक को यह बात ध्यान में रखनी चाहिये कि एक सूचकांक का दो या तीन पृष्ठों का विवरण उस सूचकांक की कुछ अधिक महत्वपूर्ण विशेषताओं के उल्लेख से अधिक कुछ नहीं कर सकता।

कीमत सूचकांक

उपभोक्ता कीमत सूचकांक—1957-1959 आधार पर संयुक्त राज्य श्रम विभाग द्वारा संकलित इस सूचकांक का शीर्षक है “शहरी मजदूरों तथा लिपिक कर्मचारियों के लिये उपभोक्ता कीमत सूचकांक।” इसका प्रायः “उपभोक्ता कीमत सूचकांक” के रूप में उल्लेख किया जाता है, और जैसाकि इसका नाम संकेत करता है, यह परचून कीमत परिवर्तन का सांख्यिकीय माप है। यथार्थतः यह निर्वाह सूचकांक नहीं है क्योंकि यह उन वस्तुओं और सेवाओं की मात्राओं और प्रकारों में परिवर्तनों को नहीं मापता है। जो लोग खरीदते हैं या उस समस्त धन को जो वे निर्वाह पर व्यय करते हैं। न ही यह विभिन्न स्थानों के निर्वाह व्ययों में अन्तरों को मापता है।

परचून मूल्य जो सूचकांक को पूरा करते हैं, आठ प्रमुख भागों में बँटे हुए हैं खाद्य, आवास, परिधान, परिवहन, चिकित्सा, वैयक्तिक देखभाल, पढ़ाई तथा मनोरंजन, तथा अन्य वस्तुएँ और सेवाएँ। खाद्य तथा आवास को फिर उपसमूहों में विभक्त किया गया है। जिन लगभग 400 वस्तुओं तथा सेवाओं को सम्मिलित किया गया है उनको सम्यक् मंदो के उपसमूहों की कीमत उपगतियों के प्रतिनिधि के रूप में चुना गया था तथा उनमें इस प्रकार की तरह-तरह की वस्तुओं तथा सेवाओं की मागत सम्मिलित है, जैसे चावल, मांस के समोसे, डिब्बाबन्द मछली, धान, मनुष्यों के लम्बे कोट, मनुष्य के काम करने के दस्ताने, स्थियों के ऊनी सूट, किराया, बन्धक व्याज, बिजली, चादरें, मेजपोंश, मोटर गाड़ियाँ, रंसोलिन, चिकित्सकों के पास जाना (तथा उनका घर आना), धूलि के शीशे तथा हजामत। 400 वस्तुएँ उन वस्तुओं और सेवाओं की “मण्डी टोकरी” की प्रतिनिधि है जिनके अन्तर्गत नागरिक थमिकों के परिवारों (2 या अधिक व्यक्तियों वाले) तथा अकेले व्यक्तियों के जीवन स्तर का प्रतिरूप आता है। उन्हें 50 शहरी क्षेत्रों में मजदूरों और लिपिक थमिकों में से 4,300 परिवारों तथा 500 अकेले व्यक्तियों के “खर्च सर्वेक्षण” के परिणामस्वरूप चुना गया था।

2. यह वन संयुक्त राज्य के थम सम्बन्धी आँकड़ों के द्युने ने दि कज्यूमर प्राइम इ डेन ए जार्टे डिमिन्शज आँक दि इन्डेक्स ऐंज रिवाइन्ड, 1964 पर आधारित है।

400 वस्तुओं और सेवाओं के कीमत आंकड़े 50 शहरी क्षेत्रों से इकट्ठे किये गए हैं जो उन नगर-विशेषताओं के प्रतिनिधि के तौर पर चुने गए हैं जो परिवारों द्वारा अपने धन की व्यय करने के ढंग को प्रभावित करते हैं। इस प्रकार ऐसे कारक जैसे आकार, जनसंख्या घनत्व, जनवायु, और आय स्तर, ध्यान में रखे जाते हैं। प्रत्येक नगर में कीमत दरें उन्हीं स्रोतों से प्राप्त की जाती हैं जिन स्रोतों से मजदूरी तथा वेतन लेने वाले श्रमिकों के परिवार वस्तुएं तथा सवर्ण प्राप्त करते हैं। उदाहरण के लिये, भण्डारों से व्रय की गई मंदों की दरें प्रतिनिधि श्रमिका भण्डारों, स्वतन्त्र भण्डारों, विभाग भण्डारों और विशिष्ट भण्डारों से प्राप्त की जाती हैं। नगर के लिये औसत कीमत परिवर्तनों को निश्चित करने के लिये, प्रत्येक मंद के लिये, उचित भारों के साथ, विभिन्न स्रोतों द्वारा प्रकाशित कीमतों की औसत ली जाती है।

संयुक्त राज्य अमरीका के लिये तथा पाँच विशाल नगरों में से प्रत्येक के लिए, सूचकांक मासिक बनाए जाते हैं और अन्य नगरों के लिए त्रैमासिक। प्रत्येक नगर में कीमत परिवर्तनों की उस विधि में औसत निराना जाती है तथा उसे जोड़ा जाता है जो वास्तव में भारित समाह्न है, भार ऊपर उल्लिखित परिवारों और अकेले व्यक्तियों के सर्वेक्षण में उपसमूह (जिनका प्रत्येक मंद प्रतिनिधित्व करती है) के लिये "मण्डी टोकरी" में आनुपातिक व्यय है। जब विभिन्न नगरों के लिये कीमत परिवर्तनों को संयुक्त राज्य अमरीका के लिए आंकड़ प्राप्त करने के लिये जोड़ा जाता है, तो प्रत्येक नगर को "श्रमिक तथा निपिक जनसमादा के अनुपात में, जिनका सूचकांक में प्रतिनिधित्व है" भार दिया जाता है। जैसे ही नई जनगणना के आंकड़े प्राप्त होते हैं नगर भारों का समायोजन किया जाता है। जैसाकि पिछले अध्याय में बताया गया था, इस सूचकांक को श्रम समझौतों में चल-सोपान धाराओं के लिये प्रमग के आधार के रूप में प्रायः प्रयुक्त किया जाता है।

संयुक्त राज्य अमरीका के श्रम सम्बंधी आंकड़ों के स्रोतों का थोक पण्य कीमतों का सूचकांक—1957—1959 आधार पर इस सूचकांक को वार्षिक, मासिक, साप्ताहिक, तथा तुरन्त कीमतों के लिए, दैनिक आधार पर तैयार रखा जाता है। यह प्राथमिक मण्डियों में मिश्रित कीमत गणियों की सामान्य दर एवं दिशा को और अलग-अलग वस्तुओं और वस्तुओं के समूहों के लिये कीमत गतियों की विशिष्ट दरों एवं दिशाओं को मापता है। इस सूचकांक में प्रयुक्त अधिकतर दरें थोक विक्रेताओं की कीमतों की अपेक्षा उत्पादकों की कीमतें हैं। इस सूचकांक को गुण, मात्रा, विक्रय की शर्तों आदि में विवर्तनों के कारण उत्पन्न हुए परिवर्तनों को मापने के लिये नहीं अपितु कालावधियों में कीमत परिवर्तनों को मापने के लिये बनाया गया है।

इस सूचकांक में कच्चे माल से लेकर तैयार सामान तक लगभग 2,200 वस्तुएँ सम्मिलित हैं जिसमें 'संयुक्त राज्य अमरीका में प्राथमिक मण्डी स्तर पर प्रत्यक्ष अथवा परोक्ष रूप में सभी वस्तुओं के सभी विक्रयों (जिनमें आयात और निर्यात दोनों सम्मिलित हैं) को गिनती करता अभिप्रेत है।' "प्राथमिक मण्डी स्तर" प्रत्येक वस्तु के लिये प्रथम महत्वपूर्ण आदान-प्रदान का संकेत करता है।

सूचकांक में सम्मिलित वस्तुओं को 15 मुख्य समूहों और 93 उपसमूहों में वर्गीकृत किया गया है। तत्पश्चात् प्रत्येक उपसमूह को उत्पादन श्रेणियों में बाँटा गया है जो "एक या अनेक सम्बंधित उद्योगों द्वारा उत्पादित वस्तुओं के समूह हैं, और जिनका कीमत

गति, कच्चे माल, अथवा उत्पादन प्रक्रिया की समानता में भी विशेषीकरण किया जाता है।" मुख्य समूह है

- 1 कृषि उत्पाद
- 2 ससाधित खाद्य
- 3 बुना हुआ सामान तथा वस्त्र
- 4 चमड़ा, खाने, तथा चर्म उत्पाद
- 5 ईंधन तथा सम्बद्ध-उत्पाद और
- 6 रासायनिक पदार्थ एवं सह उत्पाद
- 7 रबड़ तथा रबड़ का सामान
- 8 काठ तथा लकड़ी का सामान
- 9 लुगदी, कागज, तथा सह उत्पाद
- 10 धातु तथा धातु उत्पाद
- 11 मशीनें तथा चालक उत्पाद
- 12 फर्नीचर तथा अन्य घरेलू चिरस्थायी वस्तुएं
13. अधात्विक खनिज पदार्थ
- 14 तम्बाकू उत्पाद तथा शेतनी में बन्द पेय
- 15 विविध उत्पाद

समूह 3 से 15 तक को "कृषि उत्पाद तथा ससाधित खाद्य को छोड़ कर सभी वस्तुएं" अर्थात् औद्योगिक उत्पाद के एक और अधिक विस्तृत वर्ग में जोड़ा गया है। परिणामतः, तीन प्रभाग (1) कृषि उत्पाद, (2) ससाधित खाद्य, तथा (3) कृषि उत्पाद एवं ससाधित खाद्य को छोड़कर सभी वस्तुएं प्राप्य है।

2,200 वस्तुएं यादृच्छिक प्रतिदर्श नहीं बनाती। वे प्रायः प्रत्येक क्षेत्र में सर्वाधिक महत्वपूर्ण हैं अथवा यदि विक्रय मात्रा के रूप में महत्वपूर्ण नहीं, परन्तु कुछ स्थितियों में "किमी उद्योग या व्यापार विशेषताओं के कारण कीमत गतियों का अच्छा प्रतिनिधित्व प्रस्तुत करती हुई दृष्टिगोचर होती है।" वस्तुओं का वरण 'प्रत्येक उद्योग तथा उसके महत्वपूर्ण उत्पादों के ज्ञान' पर और सामान्यतः "प्रत्येक क्षेत्र में उच्च कोटि की व्यापार परिपदों और विनिर्माताओं से पूर्व विचार-विमर्श" पर आधारित था।

1958 की मात्राओं को प्रायः, यद्यपि सर्वत्र नहीं, भारों के रूप में प्रयोग करने के साथ सूचकांक मूल रूप से भारित समाहत है। पृथक्-पृथक् वस्तुओं के बदलते हुए गुणों के लिये अवसर प्रदान करने की आवश्यकता को पूरा करने के वास्ते 'भौतिक' मात्राओं द्वारा भारित निरपेक्ष कीमतों को जोड़ने की अपेक्षा, मास प्रतिमास कीमत मापकों को आपस में जोड़कर तथा इन्हे विक्रयों के मूल्य से भार करने' व्यूरी वस्तु सूचकांक का परिकल्पन करता है। यह प्रविधि एक वस्तु से दूसरी वस्तु के प्रतिस्थापन तथा भारों के तरीके में परिवर्तन को भी मुगम कर देती है।

कृषकों द्वारा प्रदत्त एवं प्राप्त कीमतों के सूचकांक, समता अनुपात—कृषि कीमतों को औद्योगिक कीमतों के साथ मिलाकर "समता" तक बढ़ाने के प्रयत्नों में महत्त्वपूर्ण करने के लिये, विधिवत् निर्धारित आधार 1910—1914 के साथ कृषि विपणन सेवा दो सूचकांक

का परिकलन करती है। एक को 'कृपको द्वारा दी गई कीमतों का सूचकांक' कहा जाता है और जब वेत बन्धक ऋण पर व्याज, कृषि की वास्तविक सम्पत्ति पर कर, तथा मजदूरी पर रखे हुए मजदूरों को द्रव्य के रूप में दी गई मजदूरी सम्मिलित हो, तब उसे समता सूचकांक की पदमञ्जा दी जाती है। दूसरे सूचकांक को "कृपको द्वारा प्राप्त कीमतों का सूचकांक" कहा जाता है। किसी दिये गए समय के लिये समता सूचकांक के मुकाबले प्राप्त कीमतों के सूचकांक का अनुपात 'समता अनुपात' है।

किमानों द्वारा दी गई कीमतों के सूचकांक में लगभग 350 मर्दें सम्मिलित हैं। 18 उपसमूहों के लिये सूचकांक प्रनिमास प्रकाशित किये जाते हैं। इन उपसमूहों में से छ को परिवार निर्वाह का व्यय का सूचकांक बनाने के लिये जोड़ा जाता है, उनमें से नौ को कृषि उपज के उत्पादन के लिये व्यय का सूचकांक बनाने के लिये साथ-साथ लाया जाता है। इन दो प्रमुख सूचकांकों को कृपको द्वारा दी गई कीमतों का सूचकांक बनाने के लिये प्रक्षत सूद, करों, तथा मजदूरी दरों के साथ मिलाया जाता है। जब अलग-अलग वस्तुओं की कीमतों को जोड़ रहें तो मात्रा भारों का प्रयोग किया जाता है। अधिकतर, प्रत्येक वस्तु के लिये व्यय को विशिष्ट वर्षों, जैसे कि 1937—1941, 1953—1957 तथा अन्यो, में उस वस्तु की औसत कीमत से भाग करके, भारों को व्ययों के सर्वेक्षण से प्राप्त किया गया था। जब उपसमूह तथा समूह मिश्रित सूचकांकों को जोड़ दिया जाता है तब कृपको द्वारा उन्हीं वर्षों में व्यय की गई राशियों द्वारा प्रायः उन्हें भारित किया जाता है। सूचकांक केवल मात्र कीमत परिवर्तनों को ही नहीं मापता, क्योंकि यह व्यापारियों द्वारा साधारणतया भण्डार की गई वस्तुओं के गुण में परिवर्तनों द्वारा तथा, जैसे कृपक ऊँची या नीची छाय स्तरों से समझन करते हैं उनके द्वारा क्रय की गई वस्तुओं के गुण में परिवर्तनों द्वारा प्रभावित होता है।

प्राप्त की गई कीमतों का सूचकांक उन लगभग 60 वस्तुओं पर आधारित है जो सभी कृषि वस्तुओं, जिसमें फसल तथा पशुधन दोनों सम्मिलित हैं, परन्तु जिनमें इमारती लकड़ी तथा वन उत्पाद तथा कुछ अन्य लघु वर्ग सम्मिलित नहीं हैं, के क्रय विक्रय से प्राप्त कुल धन राशि का लगभग 95 प्रतिशत हैं। सूचकांक को बनाने में प्रयुक्त वे कीमतें हैं जो "प्रथम विक्रय के बिन्दु पर सभी स्तरों तथा गुणों की महत्वपूर्ण कृषि वस्तुओं, जिन्हें प्रायः स्थानीय मण्डी कहा जाता है, की कीमतें हैं। सूचकांक आवश्यक तौर पर एक भारित समाहृत है। पृथक् पृथक् वस्तुओं के लिये मयुक्त राज्य अमरीका की औसत कीमतों को उपसमूह सूचकांकों में जोड़ दिया जाता है, विशिष्ट वर्षों में कृपको द्वारा विक्रय की गई मात्राएँ उनमें भार होती हैं जैसा कि ऊपर देखा गया। जब उपसमूह सूचकांकों को समूह तथा सर्व-वस्तु सूचकांक बनाने के लिये जोड़ा जाता है तो भार "वह प्रतिशत है जो विशेष वस्तु उपसमूहों के लिये क्रय विक्रय में प्राप्त नकद रकम उसी काल के योग के सम्बन्ध में है।" दी गई कीमतों के सूचकांक की तरह यह सूचकांक केवल कीमत परिवर्तनों को नहीं मापता, क्योंकि इसके अन्तर्गत विभिन्न वस्तुओं के सभी स्तरों तथा गुणों की औसत कीमतें आ जाती हैं।

प्रारम्भ में उल्लिखित "समता अनुपात" उस सीमा को मापने का काम करता है जिससे कृपको द्वारा प्राप्त की गई कीमतें उन कीमतों की तुलना में जो वे उस समय देते हैं जबकि वे आधार काल, 1910—1914 में थे, कितनी ऊँची या नीची हैं। इस समता अनुपात को प्रथम 1933 के एथिकल्बरल एडजस्टमेंट एक्ट में रखा गया जिसने "किसान की कीमतों को उसी स्तर पर पुनर्स्थापित करने का कार्य किया जो उन वस्तुओं

के सम्बन्ध में जो कि किसान प्रयत्न करत है कृषिगत वस्तुओं के आधार वर्ष की जिसे 1910—1914 निश्चित किया गया था, 'कृषिगत वस्तुओं की प्रत्येक शक्ति के बराबर प्रत्येक शक्ति प्रदान करेगा।

सामान्य स्टॉक कीमतें—न्यूयार्क स्टॉक एक्सचेंज सामान्य स्टॉक सूचकांक³ में एक्सचेंज में सूचीबद्ध 1250 में अधिक सामान्य स्टॉक में से सभी की कीमत सम्मिलित हैं। आधुनिक परिकल्पना उपकरण का प्रयोग करके सूचकांक का प्रत्येक व्यापार दिवस के दौरान सकल तक का हिमांक लगाया जाता है और इसे एक्सचेंज के टिकर पर प्रति घण्टा तथा घण्टा घण्टा पर दर्शाया जाता है। यह प्रथम बार 14 जुलाई 1966 को प्रदर्शित किया गया था। प्रत्येक स्टॉक कीमत को उस स्टॉक के सूचीबद्ध शेयरों की संख्या से भागित किया जाता है। इस ममाहृत सूचकांक में 31 दिसम्बर 1965 के दिन मण्डी के बन्द होने को आधार के रूप में प्रयोग किया गया है जिस समय इसका 50.00 पर रखा गया। यह सब सूचीबद्ध सामान्य स्टॉक की डालरों में उस समय प्रचलित प्रति शेयर लगभग औसत मूल्य है।

सूचकांक को सुगमता से NYSE सामान्य स्टॉक सूचकांक कहा जाता है। इसका दैनिक बन्द होने के आधार पर पीछे 28 मई 1964 तक परिकल्पना किया गया है। यह अन्तिम तिथि थी जब सिन्डिकेटेड तथा एक्सचेंज आयोग का साप्ताहिक सूचकांक दर्शाया गया। ऐतिहासिक साक्ष्य के लिए NYSE सामान्य स्टॉक सूचकांक का सामान्य स्टॉक कीमतों के SEC साप्ताहिक सूचकांक से सम्बन्ध जोड़ दिया गया है ताकि NYSE सामान्य स्टॉक सूचकांक को साप्ताहिक आधार पर 7 जनवरी 1939 से 28 मई 1964 तक प्राप्त किया जा सके।

पूँजीकरण, नए सूची अन्तर्वेशा तथा सूची अपवर्जनों में परिवर्तनों के लिए दैनिक समझन किए जाते हैं। किसी कम्पनी के शेयर खरीदने के अधिकारी (निगम के प्रभार होने के उपरान्त) उसी या नियन्त्रित कम्पनी के अन्य निगमों में राशि लगाने के अधिकारी और सूचीबद्ध कम्पनियों के सम्बन्ध में वित्तिय प्रथवा अज्ञानों के लिए भी समझन किए जाते हैं। ये समझन आधार (31 दिसम्बर 1965) बाजार मूल्य को समुचित बढ़ा या घटा कर सम्पन्न किए जाते हैं। उद्देश्य यह जाना है कि सूचकांक के स्तर को उसी मूल्य पर बनाए रखा जाए जिस पर यह सूची परिवर्तन से पूर्व था। उदाहरणार्थ विचार कीजिए कि अधिकारी की वित्त व्यवस्था द्वारा सब सूचीबद्ध सामान्य स्टॉक के बाजार मूल्य में 2 विलियन डालर जोड़े गए आधार मूल्य 600 विलियन डालर था तथा अधिकारी की वित्त व्यवस्था में पूर्व बाजार मूल्य 660 विलियन डालर था। अधिकारी की वित्त व्यवस्था से पूर्व सूचकांक था

$$\left(\frac{\text{डालर 660 विलियन} - \text{डालर 600 विलियन}}{\text{डालर 600 विलियन}} \right) \times 50.00 = 55.00$$

अधिकार वित्तव्यवस्था के उपरान्त बाजार मूल्य 662 विलियन डालर था। समझित आधार बाजार मूल्य बनता है

$$\frac{\text{डालर 662 विलियन}}{\text{डालर 660 विलियन}} \times \text{डालर 600 विलियन} = \text{डालर 601.82 विलियन}$$

3 इस परिच्छेद की जानकारी न्यूयार्क स्टॉक एक्सचेंज द्वारा नियमित पुस्तिका मेंजर थार्व डि मार्केट तथा एक्सचेंज के अनुसन्धान विभाग से, जिसमें दिया करके यहाँ दिए विवरण को परभाव का, तो गढ़ थी।

तथा चालू सूचकांक है

$$\frac{\text{डालर 662 बिलियन}}{\text{डालर 601.82 बिलियन}} \times 50.00 = 55.00,$$

वही मूल्य जो अधिकार विन्यवस्था से पूर्व था। स्टॉक विभाजनो, प्रतिवर्ती विभाजनो, तथा स्टॉक लाभांशों के कारण कीमतों के परिवर्तनों की, विभाजन या लाभांश अनुपातों के अनुसार प्रभावित निर्गमों के शेयरों की संख्या को केवल परिवर्तित करके क्षतिपूर्ति की जाती है।

सामान्य स्टॉक सूचकांक के अतिरिक्त, एकमर्ज द्वारा, प्रति घण्टा, एक वित्त सूचकांक, एक परिवहन सूचकांक, एक उपयोगिता सूचकांक, तथा एक औद्योगिक सूचकांक निर्गमित किए जाते हैं। 14 जुलाई 1966 को वित्त सूचकांक में 75 निर्गम थे, परिवहन सूचकांक में 76 निर्गम आते थे, उपयोगिता सूचकांक 136 निर्गमों का बना था, तथा औद्योगिक सूचकांक में लगभग 1,000 निर्गम आते थे। प्रत्येक सूचकांक में निर्गमों की संख्या समय-समय पर बदलती है परन्तु अधिक नहीं। वित्त सूचकांक में बन्द-सिरा निवेश कम्पनियों वृद्ध एवं ऋण नियंत्रक कम्पनियों, जायदाद नियंत्रक एवं निवेश कम्पनियों के निर्गम तथा वाणिज्यिक एवं किशत वित्त, बैंक, बीमा, तथा सम्बन्धित क्षेत्रों के अन्य निर्गम आते हैं। परिवहन सूचकांक रेल मार्गों, हवाई मार्गों, नौ-परिवहन, मोटर परिवहन के प्रतिनिधि निर्गमों तथा परिवहन क्षेत्र में कार्य करने वाली, पट्टे पर देने वाली तथा नियंत्रक अन्य कम्पनियों के निर्गमों से बनता है। उपयोगिता सूचकांक का निर्माण गैस, विद्युत् शक्ति तथा संचार में कार्य करने वाली, नियंत्रक तथा संचारण कम्पनियों के निर्गमों से होता है। औद्योगिक सूचकांक तीन पूर्ववर्ती सूचकांकों में असम्मिलित NYSE सूचीबद्ध स्टॉक से बनता है। ये निर्गम निर्माण विपणन एवं सेवा के अनेक क्षेत्रों में विस्तृत प्रकार के औद्योगिक निर्गमों का प्रतिनिधित्व करते हैं। चारों सूचकांकों का, दैनिक बन्द होने के आधार पर, पीछे 14 जुलाई 1966 में 31 दिसम्बर 1965 तक परिकलन किया गया है, जिस समय प्रत्येक को 50.00 पर रखा गया था।

भौतिक परिमाण तथा व्यापार क्रिया के सूचकांक

औद्योगिक उत्पादन का फ़ैडरल रिजर्व सूचकांक—यह सूचकांक, जिसे फ़ैडरल रिजर्व सिस्टम के बोर्ड आफ गवर्नर्स द्वारा प्रति मास प्रकाशित किया जाता है, 1957—1959 को आधार काल के रूप में प्रयुक्त करता है तथा विनिर्माण एवं खानों के उत्पादन के भौतिक परिमाण में परिवर्तनों को मापता है। उत्पादों तथा उद्योगों के लिये तथा वजत के व्यूरो द्वारा विकसित मानक औद्योगिक वर्गीकरण पुस्तिका के पुष्टिकरण के साथ उद्योगों के समूहों के लिये सूचकांक बनाने के हेतु अलग अलग श्रेणियों को जोड़ दिया जाता है। समग्र सूचकांक, औद्योगिक उत्पादन, को विनिर्माणों, खानों, तथा उपयोगिताओं में बाँट दिया जाता है। इन तीनों को उपसमूहों में बाँट दिया जाता है जिनमें विनिर्माणों के दो मुख्य उपसमूह होते हैं चिरस्थायी विनिर्माण तथा अचिरस्थायी विनिर्माण।

वे उद्योग जो औद्योगिक उत्पादन के सूचकांक के अन्तर्गत आ गए हैं राष्ट्रीय आय के एक-तिहाई से अधिक को व्यक्त करते हैं। अर्थव्यवस्था के महत्त्वपूर्ण क्षेत्रों में जिनको नहीं लिया गया वे हैं निर्माण, परिवहन, व्यापार, सेवाएँ, तथा कृषि।

सूचकाक का उद्देश्य भौतिक उत्पादन को मापना है परन्तु बहुत से उद्योग भौतिक उत्पादन के आँकड़ों को प्रदान नहीं करत, या नहीं कर सकते। परिणामतः बोर्ड को कभी-कभी ऐसी, सम्बद्ध श्रेणियों को अवश्यमेव चुनना चाहिये जिनमें उत्पादन के साथ न्यूनाधिक निकटता में उतर-चढ़ाव हो। इनसे काम करने के घण्टे, पोत लदान, तथा उपभोग किये गए पदार्थ आते हैं। कुछ उदाहरणों में जब भौतिक उत्पादन के वार्षिक आँकड़े प्राप्त हो जाएँ तत्पश्चात् मासिक श्रेणियों को जोड़ा जा सकता है। मूल आँकड़ों को प्रति कार्यदिवस के उत्पादन के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है।

पृथक्-पृथक् श्रेणियों के लिये आँकड़ों को जोड़ने की विधि के अन्तर्गत आते हैं (1) प्रत्येक श्रेणी को आधार काल 1957—1959 में औसत मासिक उत्पादन की प्रतिशतताओं में परिवर्तित करना, (2) सापेक्षों की प्रत्येक श्रेणी को, सभी श्रेणियों को प्रदत्त भार की प्रतिशतता के रूप में अभिव्यक्त आधार वर्ष भार कारक से गुणा करना, तथा (3) पग (2) से उत्पन्न उत्पादनों को जोड़ना। प्रयुक्त भार 1957—1959 में जुड़े मूल्य पर आधारित हैं, जोड़ा गया मूल्य उत्पादों के मूल्य तथा उपभोग किये गये माल या सामान की लागत में अन्तर है। कुछ उदाहरणों में जोड़े गये मूल्य के आँकड़े प्राप्य नहीं हैं, पर उनका अवश्यमेव आकलन कर लेना चाहिये। मुख्य उद्योग समूहों तथा अपेक्षाकृत बड़े वर्गों (चिरस्थायी तथा अचिरस्थायी विनिर्माणों, विनिर्माणों, खनिज पदार्थों तथा उपयोगिताओं) के लिये सूचकाक ऋतुनिष्ठ समजित तथा असमजित आधार पर दिये जाते हैं।

भौतिक परिमाण तथा व्यापार क्रिया के अन्य सूचकाक—अनेक संगठन 'औद्योगिक क्रिया' आर्थिक नियम, तथा "व्यापार क्रिया" के सूचकाकों को सकलित और प्रकाशित करते हैं। उनमें अमरीकन टेनीफोन एव तार कम्पनी, न्यूयार्क टाइम्स, पिट्सबर्ग विग्व-विद्यालय का व्यापार अनुसंधान व्यूरो, तथा हगर्स राज्य विश्वविद्यालय का आर्थिक अनुसंधान व्यूरो हैं।⁴

गुणात्मक परिवर्तनों अथवा अन्तरो के सूचकाक

अध्याय 17 के प्रारम्भ में यह देखा गया था कि मानवीय क्रिया के विभिन्न क्षेत्रों में ऐतिहासिक, भौगोलिक, या वर्गानुसार तुलनाएँ करने के लिये सूचकाकों का प्रयोग किया जा सकता है। क्योंकि सूचकाकों की विशाल मात्रा को कीमत विवरणों का वर्णन करना पड़ता है और अनेक अन्य सूचकाक उत्पादन में उतार-चढ़ावों का वर्णन करत हैं अतः विभिन्न क्षेत्रों में से कुछ पर, जिनमें सूचकाक तकनीक का प्रयोग किया गया है ध्यान दिाने के लिये पूर्वगामी अनुच्छेदों में उदाहरणों का निदर्शन किया गया था। पाठक अन्य सामाजिक या शिक्षा-सम्बन्धी आँकड़ों पर, मनोविज्ञान पर, औपधि-विज्ञान पर, तथा अन्य क्षेत्रों पर जो अर्थशास्त्र तथा व्यापार की दृष्टि-सम्बन्धी तथा भौतिक-परिमाण धारणाओं से बहुत दूर हैं शीघ्रता से उनके अनुप्रयोग को समझ सकते हैं।

गुणात्मक मामलों के सम्बन्ध में सूचकाकों के प्रयोग के लचीलेपन के उदाहरण के रूप में हम एक अवपक का दृष्टान्त दे सकते हैं जिसने एक निश्चित समय पर निश्चित

4 उदाहरणार्थ, देखिए जो० आई, सी० बोशन, तथा आर० रिनयोर, ए मथली इन्डेक्स ऑफ मैनुफैक्चरिंग प्राइवलेस इन न्यू जर्सी, धार्मिक अनुसंधान व्यूरो, हगर्स राज्य विश्वविद्यालय, 1963, 133 पृष्ठ। तथा और ऋतुनिष्ठ तथा बहुत भिन्न प्रकार के सप्टेम्बर द्वारा प्रयुक्त उपरति समजता के विवरण के लिए मूल अधिष्ठो पुस्तक के द्वितीय सस्करण में पृष्ठ 444—446 देखिए।

कसौटियों के अनुसार घरो के सम्बन्ध में ओकलाहोमा की काउन्टियों की तुलना करने के लिए उनका प्रयोग किया। अतः इन सूचकांकों में एक बाल से अगले काल तक परिवर्तन नहीं परन्तु वस्तुतः भौगोलिक अन्तर आते थे।

ओकलाहोमा की 77 काउन्टियों में से प्रत्येक के लिये ग्रामीण फार्म आवास के चार विभिन्न सूचकांक बनाने के लिये सोलह आवास मापों का प्रयोग किया गया था। प्रत्येक सूचकांक ने प्रत्येक काउन्टी के लिये एक सूचकांक प्रदान किया। इनमें से एक में, 16 मापों में से प्रत्येक के सम्बन्ध में काउन्टियों का केवल दर्जा बनाया गया; फिर दर्जों को जोड़ा गया और 16 से भाग किया गया। दूसरे सूचकांक में, 16 श्रेणियों में से प्रत्येक के लिये प्रत्येक काउन्टी को एक मापका प्राप्त हुआ, सापेक्ष (1) श्रेणी में काउन्टी मूल्य और (2) राज्य के लिये सगत आबन्धों के बीच अनुपात पर आधारित था। तीसरे सूचकांक में मानक प्रको (देखें पृष्ठ 204—205) का प्रयोग किया गया जब कि चौथे में कारक विश्लेषण⁵ का प्रयोग हुआ। अन्वेषक ने जिसकी प्रथमतः इन चार विधियों की तुलना करने में रुचि थी, निष्कर्ष निकाला कि उनसे समान रूप से सन्तोषजनक आवास के सूचकांक प्राप्त हुए।

कालक्रमरहित सूचकांक, जो भौगोलिक अन्तरो या वर्गों के बीच अन्तरो को मापने का काम करने हैं प्रायः दिखाई नहीं पड़ते और भाजकल अपेक्षाकृत बहुत कम प्रयोग में आते हैं। मानसिक रोगियों की राजकीय देखभाल की पर्याप्तता को मापने के लिये सूचकांकों का प्रयोग करने के प्रयत्न किये गए हैं, और साध-साध राज्यों के बीच तथा दो भिन्न वर्गों के बीच तुलनाएँ की गई हैं, तथा धर्म प्रवेशों⁶ के धार्मिक काम की तुलना करने, मिट्टियों के कृषि सम्बन्धी मूल्य के श्रेणी निर्धारण करने,⁷ और परस्पर एक दूसरे के साथ राज्य पद्धतियों की तुलना करने, के प्रयत्न किये गए हैं।

5 कारक-विश्लेषण इस पुस्तक के खेत से पड़े हैं।

6 देखिए जे० ई० रीम द्वारा लिखित एन इंडेक्स नम्बर फॉर अमेरिकन डायोसेसिस, गैरिड प्रेस, रैसिन विसकन्सिन, तथा नेशनल कैथोलिक वेल्फेयर, कॉन्फेस वाशिंगटन, डी० सी०, लिमिटेड पुस्तिका।

7 देखिए आर० जर्ल स्टोरी द्वारा लिखित एन इंडेक्स फॉररेटिंग दि एग्रीकल्चरल वेल्थ ऑफ सायलज, कैलिफोर्निया कृषि प्रयोग केन्द्र, बर्केले, कैलिफोर्निया या बुसेटिन 556।

सहसंबन्ध I : द्वि-चर रेखिक सहसंबन्ध

विज्ञान के मुख्य उद्देश्यों में से एक सहकारक के मूल्यों के प्रसंग द्वारा एक कारक के मूल्य का आकलन करना है। "वैज्ञानिक विधि" मध्यों के विचारपूर्ण तथा परिश्रमपूर्ण वर्गीकरण, उनके सम्बन्धों तथा क्रमों की तुलना में, और अन्ततः अनुशासित विचार की सहायता द्वारा सक्षिप्त वक्तव्य या सूत्र की खोज में निहित है जो थोड़े शब्दों में तथ्यों के विस्तृत परिस्तर को बनाए रखती है। इस प्रकार के सूत्र को... वैज्ञानिक नियम की सजा दी जाती है।¹ जब सम्बन्ध की प्रकृति मात्रात्मक है, तो सम्बन्धों की खोज और माप करने के लिए तथा उसे सक्षिप्त सूत्र में व्यक्त करने के लिए समुचित मारितीय साधन को सहसम्बन्ध कहा जाता है।

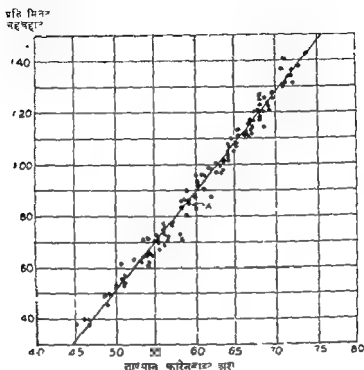
एक सरल व्याख्या

हम में से कुछ को यह जान कर विस्मय हो सकता है कि तापमान में और भीगुरों के बोलने की बारबारता में एक बहुत निकट सम्बन्ध है। उदाहरणार्थ यदि हम 15 सेल्सियस में भीगुर की चहचहाहट की सख्या की गिनती करें और उसमें 37 जोड़ दें, तो हम बड़ी निकटता से, उस समय के फारनहाइट तापमान का अनुमान लगा सकते हैं। अथवा, यदि हम फारनहाइट तापमान के अंशों को 3.78 से गुणा करें और परिणाम में से 137 घटा दें तो एक मिनट में भीगुर की चहचहाहट की प्रत्याशित सख्या का अनुमान लगा सकते हैं। जब तक तापमान 45° से नीचे नहीं हो जाता, यह सम्बन्ध विशिष्ट रूप से परिशुद्ध मिलेगा। जब मौसम 45° से अधिक ठंडा हो तो उस समय भीगुर नहीं बोलते। इसी प्रकार 75° से ऊपर के तापमान में भी सम्भवतः यह विशेष ठीक न बैठे क्योंकि उस तापमान से ऊपर प्रेक्षण नहीं किए गए हैं और इसलिए हम नहीं जानते कि उच्चतर तापमान पर भी यह सम्बन्ध रहता है या नहीं।

इन दो चरों—तापमान तथा भीगुर की चहचहाहट—के बीच सम्बन्ध का प्रदर्शन चार्ट 19 I में किया गया है, जिसे प्रकीर्ण-पारेख के नाम से जाना जाता है। प्रत्येक बिन्दु एक भीगुर के प्रेक्षण को प्रस्तुत करता है। इस प्रकार A 59.0° तापमान पर प्रेक्षण एक भीगुर को प्रस्तुत करता है जो एक मिनट में 85 बार बोला। पाठक ध्यान दें कि तापमान 1-अंश पर आलेखित किया गया है और प्रति मिनट भीगुर की चहचहाहट को 1'-प्रमाण पर। यह इसलिए किया गया है क्योंकि एक मिनट में भीगुर की चहचहाहट तापमान का प्रत्यक्ष परिणाम प्रतीत होती है। इस सम्बन्ध में यह भी सत्य है कि एक प्रदत्त

1. रॉबर्ट पिप्लिन, दि ग्रामर ऑफ साइंस, एडम एन्ड चार्ल्स ब्लैक, सैन्टन, 1900, पृष्ठ 77।

तापमान पर हम भीगुर की चहचहाहट की अपेक्षित सरया का आकलन करना चाहते हैं, अतः तापमान एक स्वतन्त्र चर है और एक मिगट में भीगुर का बोलना आश्रित चर है।



चार्ट 19.1 तापमान तथा 115 भीगुरों की प्रति मिनट चहचहाहट।
मीकड मिटर बट ई० हांम्स से प्राप्त हुए हैं।

यद्यपि हम तापमान का आकलन करना चाहते हैं तो भी X -प्रकाश पर कारणात्मक कारक का दिखाना सर्वोत्तम होता है। जब कारणात्मक सम्बन्ध स्पष्ट न हो, या जब किसी भी कारक को दूसरे का कारण न बताया जा सके, तब आकलित किए जाने वाले चर को Y -प्रकाश पर आलेखित करना चाहिए।

चार्ट 19.1 में निर्णय करते हुए, हम यह देखते हैं कि दो चरों के बीच सम्बन्ध रेखिक है, क्योंकि सरल रेखा का उपयुक्त होना जतना ही अच्छा दिखाई देता है जितना कि एक अधिक क्लिष्ट वक्र का। इस रेखा का समीकरण

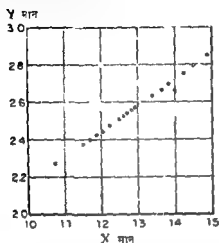
$$Y_c = -137.22 + 3.777X$$

है। इस समीकरण से, चार्ट पर दिखाए गए प्रेक्षणों की सीमाओं के अन्तर्गत किसी बाह्य तापमान पर चहचहाहट के अनुमान लगाए जा सकते हैं। इस प्रकार, यदि हम उस समय चहचहाहट की सरया का आकलन करना चाहे, जब तापमान 59.0° (प्रेक्षण A) है तो हम समीकरणों में X के लिए 59.0 का प्रतिस्थापन करके सरया प्राप्त करते हैं। इस प्रकार

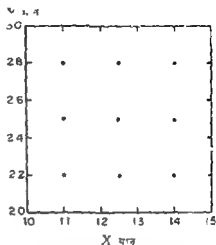
$$Y_c = -137.22 + (3.777)(59.0) = 86 \text{ चहचहाहट।}$$

2. लेखक ने इस समीकरण को बर्ट ई० होम्स के द्वारा दिए गए बाँझों में जातिशिन कर दिया था।

कम परिशुद्धता से ही सही, आकलन चार्ट पर आलेखित आकलन रेखा से सीधे पढ़ा जा सकता है। यद्यपि आकलन (86) यथार्थतः प्रेक्षित 85 चहचहाहटों से पूर्णरूपेण नहीं मिलता, तथापि अन्तर अधिक नहीं है।



चार्ट 19.2 पूर्ण रैखिक सहसम्बन्ध को चित्रित करने वाला एक प्रकीर्ण आरेख। सहसम्बन्ध उस समय भी पूर्ण होगा यदि उस रेखा पर जिस पर बिन्दु पड़ने हैं, घनात्मक की अपेक्षा शून्यात्मक ढाल होना। एक ० ई० नॉर्मलन के एलिमेन्टरी स्टैटिस्टिकल विद एंजिलिकेन्स इन मेडिसिन एण्ड दि बायोलॉजिकल साइंस, डाक्टर प्रकाशन, इन्क, न्यूयार्क, 1959, पृष्ठ 112 से।



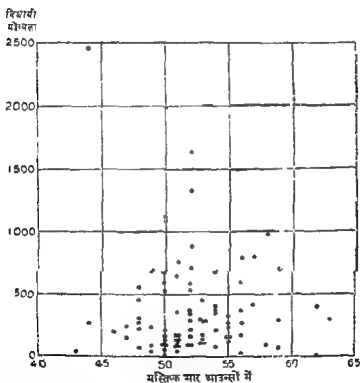
चार्ट 19.3 किसी सहसम्बन्ध को चित्रित न करने वाला प्रकीर्ण आरेख। बिन्दुओं की विभिन्न अन्य व्यवस्थाएँ सम्भव हैं जो किसी प्रकार का भी सहसम्बन्ध नहीं दिखाएँगी। चार्ट 19.2 के स्रोत से।

हम समीकरण $Y_c = -137.22 + 3.777X$ में वर्णित सामान्यीकरण के प्रौढिन्ध से प्रभावित हुए बिना नहीं रह सकते। क्योंकि अधिकतर बिन्दु रेखा के बहुत निकट हैं, अतः यह प्रतीत होता है कि तापमान के प्रकरण द्वारा चहचहाहट की बारबारता का ठीक से वर्णन किया गया है। आकलन रेखा से तनिक से विचरणों का वर्णन नहीं किया गया है और वे पृथक्-पृथक् भीगुरों में अन्तर होने से, जिस वर्ष में या दिन के समय में प्रेक्षण किए गए उससे सम्बन्धित अन्तरों से, आर्द्रता से, और तापमान के प्रेक्षण की अशुद्धता से या चहचहाहट की सरया से हो सकते हैं। साथ ही, जहाँ पर भीगुर बोन रहा है तथा जहाँ पर प्रेक्षण पड़ा है उन दोनों स्थानों के तापमान में भी अन्तर हो सकता है। यह उम्र अवस्था में हो सकता है जब भीगुर किसी पत्थर के नीचे हो। तापमान के प्रतिरिक्त, विचरण के अन्य कारणों की परीक्षा में तीन या अधिक चरों पर विचार करना निहित है, जिसके लिए एक प्रविधि पर अध्याय 21 में "अनेकधा सहसम्बन्ध" शीर्षक के अन्तर्गत विचार किया जाएगा।

यह बता कर कि सहसम्बन्ध का गुणांक, r , $+0.9919$ है, सम्बन्ध की निकटता का सामान्य शब्दों में वर्णन किया जा सकता है। क्योंकि ± 1.0 पूर्ण सहसम्बन्ध (देखें चार्ट

19.2) है और 0 कोई सहसम्बन्ध नहीं (देखें चार्ट 19.3) है, तो यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि +0.9919 से ऊँचा गुणांक किसी को प्रायः कभी नहीं मिलता। घनात्मक चिह्न यह प्रदर्शित करता है कि सहसम्बन्ध घनात्मक है—अर्थात् जैसे-जैसे तापमान बढ़ता है चहचहाहट भी बढ़ती जाती है। यदि बढ़ने हुए तापमान के साथ चहचहाहट की संख्या कम हुई होती तो सहसम्बन्ध ऋणात्मक या विपरीत हुआ होता; चिह्न ऋणात्मक हुआ होता, जैसाकि आकलन समीकरण में भी हुआ होता, b का चिह्न, और आकलन रेखा का ढाल दाएँ को नीचे की ओर हुआ होता।

तनिका निम्न सहसम्बन्ध (-0.11) का एक उदाहरण चार्ट 19.4 में दिया गया है। इस अवस्था में, मस्तिष्क भार का आकलन कपाल-दक्षता से लगाया गया है और विधान योग्यता का अंको के कुछ क्लिष्ट ढग से। परन्तु यदि हम यह पूर्वधारणा कर भी लें कि सभी माप परिशुद्ध है तो भी प्रमाण निश्चित रूप से यह सुझाव नहीं देता कि विधायकों को केवल मस्तिष्क मापों के आधार पर ही चुना जाना चाहिए। सम्भवतः कुछ और भी कारण हैं जिन पर विधायक की योग्यता निर्भर करती है, जैसे बुद्धिमत्ता, शिक्षा, प्रेरणा, ईमानदारी, सामाजिक प्रवृद्धता, तथा अन्य गुण निस्संदेह महत्वपूर्ण हैं।



चार्ट 19.4 कांग्रेस के 89 सदस्यों की विधायी योग्यता मस्तिष्क भार तथा के आकलन। आर्कडे कांफ्रेशनल रिकार्ड, 12 अप्रैल, 1932 में आर्थर मैकडानल द्वारा लिखित "ब्रेन वेट एन्ड वैजिस्लेटिव एबिलिटी इन कांग्रेस"

सहसम्बन्ध सिद्धान्त

सहसम्बन्ध के विषय में माप के तीन प्रकारों पर विचार किया जा सकता है, जिन को निम्नलिखित क्रम से सुविधानुसार बनाया जा सकता है :

(1) आकलन, या समाश्रयण^१, समीकरण जो दो चरों के बीच फलनीय सम्बन्ध का वर्णन करता है। जैसा कि नाम संकेत करता है, इस समीकरण का एक उद्देश्य एक चर से दूसरे चर का आकलन करना है।

(2) आश्रित चर के लिए अनुमानित या परिकल्पित मूल्यों से वास्तविक मूल्यों के अपसरण का माप। यह माप मानक विचलन के समान है और निरपेक्ष रूप में आकलनों की प्राथम्यता का विचार प्रदान करता है। इसे आकलन की मानक त्रुटि (S_x) कहा जाता है।

(3) उन इकाइयों या भदों से स्वतन्त्र जिनमें कि मूल्य। उनकी व्याख्या की गई थी, चरों के बीच सम्बन्ध के अंश, या सहसम्बन्ध (r), का माप। इस माप का वर्ग (r^2) हमें आश्रित चर में, जिसकी व्याख्या आकलन समीकरण के द्वारा की गई है, विचरण की सापेक्ष मात्रा बताने के योग्य बताता है।

आकलन समीकरण—जंगल वानों को कई बार दूरी की ऊँचाई के विवास का उनके व्यास के विकास द्वारा अनुमान लगाया सुविधाजनक लगता है, क्योंकि ऊँचाई के विकास के प्रत्यक्ष माप की अपेक्षा इस प्रविधि में कम समय लगता है। प्रकीर्ण घाटेल, बार्ड 19 5, छाती भर ऊँचा व्यास-विकास और 20 दूरी की ऊँचाई में विकास दर्शाता है जोकि आकलन रेखा के साथ दो चरों के बीच सम्बन्ध के स्वभाव की व्याख्या करता है। इस सरल रेखा को इस प्रकार जोड़ा गया है कि इसमें Y विचलनों के वर्गों का योग किसी अन्य सरल रेखा के वर्गों के योग से कम है। इस प्रकार जोड़े गए वक्र को सांख्यिकीविदों द्वारा प्रायः सर्वोत्तम माना गया है जिसके साथ एक चर के मूल्यों की मापा जाता है जबकि दूसरे चर के मूल्य ज्ञात हैं। इस प्रकार की रेखा का आसमन उपनति के आनजन के समान है, और इसमें निम्न सामान्य समीकरणों का प्रयोग आता है :

$$I. \Sigma Y = Na + b\Sigma X.$$

$$II. \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

यह स्मरण कीजिए कि सामान्य समीकरणों का वर्णन अध्याय 12 में किया गया था।

सारणी 19.1 में मूल्य निर्धारण के लिये आवश्यक परिक्लत्यों को दिखाया गया है जिसका अवश्यमेव प्रतिस्थापन किया जाना चाहिये। प्रतिस्थापन फल है :

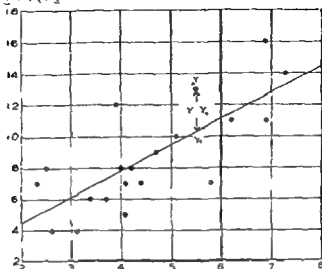
$$I. 173 = 20a + 90.7b.$$

$$II. 856.0 = 90.7a + 453.93b.$$

3 जीव विज्ञानी सहायक (अर्थात् सामान्य प्रकार या औसत की ओर मोड़ने की प्रवृत्ति) का अध्ययन करने के लिए ग्राफ़ के द्वारा सहसम्बन्ध के प्रयोग के परिणामस्वरूप "समाश्रयण" ग्राफ़ का माधुरी माहिय में प्रवेश हुआ। अब जबकि सहसम्बन्ध वितरण का प्रयोग बहुत प्रकार की समस्याओं में होने लगा है, शब्द "आकलन" अधिक उपयुक्त दिखाई देता है।

ऊँचाई सफ़टि

फुटो में (1 फु = 0.3048 मीटर)



व्यास सफ़टि इंचों में (1 इंच = 0.0254 मीटर)

चार्ट 19.5 20 वम वृक्षों का छाती की ऊँचाई का व्यास विकास
और ऊँचाई विकास। मारणा 19.1 ए. आर. ड.

समीकरण I में सभी मदों को 4 535 से गुणा करने पर और समीकरण I को समीकरण II में से घटाने से a को निरस्त किया जा सकता है। इस प्रकार

$$\begin{array}{rcl} \text{II } 8560 & = & 507a + 45393b \\ (I \times 4535) \quad 784555 & = & 907a + 4113245b \\ \hline 71445 & = & 426055b \\ b & = & 1.676896 \end{array}$$

a का मूल्य प्राप्त करने के लिय अब हम समीकरण I में b के मूल्य का प्रतिस्थापन कर सकते हैं।

$$\begin{array}{rcl} \text{I } 173 & = & 20a + 152094467 \\ a & = & 1.045277 \end{array}$$

समीकरण II में प्रतिस्थापन द्वारा a तथा b के मूल्यों का परीक्षण किया जाता है। जब कि यह निश्चय नहीं होता कि परिवर्तन में कोई त्रुटि नहीं हुई है, तथा यदि दो प्रसामान्य समीकरणों में यथार्थ अंकों का प्रतिस्थापन किया गया है तब या तो कोई भी नहीं या प्रति सन्तुलनात्मक गलतियाँ हुई हैं। जबकि $a = 1.045$ तथा $b = 1.677$, रेखा का समीकरण, जो हम इस विनोद वन में वृक्षों की ऊँचाई के विकास का आकलन करने के लिय बनाता है जबकि उनका व्यास में विकास ज्ञात है, इस प्रकार वर्णित किया जा सकता है

$$Y_c = 1.045 + 1.677X.$$

सारणी 19.1

20 वन-वृक्षों की ऊँचाई और व्यास में विकास के लिए आकलन
समीकरण के परिकलन में प्रयुक्त मूल्यों का निर्धारण

व्यास विकास में दर्जा (वृद्धतम से दीघतम)	छाती की ऊँचाई पर व्यास विकास इंचों में X	ऊँचाई विकास फुटों में Y	XY	X^2	Y^2
1	2.3	7	16.1	5.29	49
2	2.5	8	20.0	6.25	64
3	2.6	4	10.4	6.76	16
4	3.1	4	12.4	9.61	16
5	3.4	6	20.4	11.56	36
6	3.7	6	22.2	13.69	36
7	3.9	12	46.8	15.21	144
8	4.0	8	32.0	16.00	64
9	4.1	5	20.5	16.81	25
10	4.1	7	28.7	16.81	49
11	4.2	8	33.6	17.64	64
12	4.4	7	30.8	19.36	49
13	4.7	9	42.3	22.09	81
14	5.1	10	51.0	26.01	100
15	5.5	13	71.5	30.25	169
16	5.8	7	40.6	33.64	49
17	6.2	11	68.2	38.44	121
18	6.9	11	75.9	47.61	121
19	6.9	16	110.4	47.61	256
20	7.2	14	102.2	53.29	196
जोड़	90.7	173	856.0	453.91	1,705

जॉर्ज डी. होनाल्ड वूड्स तथा एफ. ए. ए. ग्लेन ग्लेन, फारेस्ट मैनेजमेंट, प्रथम संस्करण, मैक ग्रा-हिल बुक कम्पनी, न्यूयॉर्क, 1935, पृष्ठ 124 से। प्रकाशक एवं लेखक के सौजन्य से।

अब कल्पना करें कि हम एक वृक्ष की ऊँचाई के विकास का आकलन करना चाहते हैं जिसके व्यास में 5.5 इंच की वृद्धि हुई है। समीकरण में प्रतिस्थापन करने से हमारे पास है

$$Y_c = 1.045 + (1.677)(5.5), \\ = 10.268 \text{ फुट।}$$

प्रान्तलों की विश्वसनीयता—फिर भी हम यह आशा नहीं करना चाहिये कि जिन वृक्षों के व्यास में 5.5 इंच की वृद्धि हुई है उन सबकी ऊँचाई में भी ठीक 10.268 फुट की वृद्धि होगी क्योंकि प्रकीर्ण कारणों के सब बिन्दु प्रासजित रेखा के ऊपर नहीं होते। अपितु, 10.268 को संकेत किये गए व्यास विकास के सभी वृक्षों की औसत ऊँचाई-

विकास के आकलन के रूप में विचारना चाहिये। हमें इस मूल्य में उतने ही विचरण की आशा करनी चाहिये जिनकी कि बारबारता बटन के अकगणितीय माध्य में। अतः वास्तव में यह कल्पना करते हुए कि हम प्रतिनिधि प्रतिदर्श को ले रहे हैं यह खोज करना उचित है कि जिस घुटि की श्रृंखला में हम रचि रखते हैं उसमें वृक्षों के कितने अनुपात के आने की आशा है।

ऐसा करने के लिए यह आवश्यक है कि हम उनके माध्य में नहीं अपितु आकलन की रेखा में, Y मूल्यों के आकलन विचलनों का परिकलन करें। चार्ट 19.6 पर आकलन रेखा से किमी Y मूल्य तक का ऊर्ध्वान्तर अन्तर प्रेक्षित Y मूल्यों और आकलित Y मूल्य के बीच अन्तर का प्रतिनिधित्व करता है। X मूल्य या व्यास वृद्धि में प्रत्येक माप के लिये आकलन समीकरण को हल करने से आकलित Y मूल्यों, Y_c , को प्राप्त किया जाता है। $Y - Y_c$ विचलन उस घुटि को प्रस्तुत करता है जो किमी एक विशेष उदाहरण में की गई होनी। उन विचलनों के सार माप को प्राप्त करने के लिये उनका वर्ग किया जा सकता है, उनको जोड़ा जा सकता है, N से भाग दिया जा सकता है और वर्गमूल निकाला जा सकता है। यह आकलन की मानक घुटि है,⁴ जिसके लिये s_{YX} चिह्न है। इसके सूत्र को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$s_{YX} = \sqrt{\frac{\sum (Y - Y_c)^2}{N}}$$

इस उदाहरण में

$$s_{YX} = \sqrt{\frac{88.75}{20}} = \sqrt{4.438} = 2.107 \text{ फुट।}$$

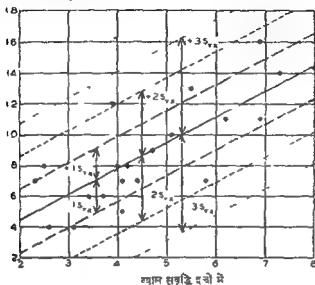
सारणी 19.2 के स्तम्भ 7 और 10 में गणना दिखायी गयी है। साधारणतया माप का अधिक शीघ्रगामी डग, जिसका वर्णन पृष्ठ 423 पर किया गया है, प्रयुक्त किया जाएगा। केवल माप के अर्थ की व्याख्या करने के लिये उपयुक्त डग का प्रयोग किया जाता है।

इस माप की व्याख्या बारबारता बटन के मानक विचलन के दिल्कुल समान विधि से की जा सकती है। यह आकलन रेखा के ऊपर और नीचे के परिसर के उस आकलन को प्रदान करता है जिसमें मदों की 68.27 प्रतिशत के आने की आशा की जा सकती है, यदि प्रकीर्ण प्रसामान्य है। व्यवहार में हम प्रायः इस माप को उस परिसर के रूप में विचारते हैं जिसके भीतर लगभग $\frac{2}{3}$ मूल्य पाये जाएँगे। वर्तमान उदाहरण के लिये ($s_{YX} = 2.107$), आदेश में प्रदर्शित तय सीमा $\pm s_{YX}$ के भीतर चार्ट 19.6 की लगभग $\frac{2}{3}$ मदें पाई जाने की आशा कर सकते हैं, लगभग 95 प्रतिशत (आदर्श रूप से 95.45) व्यापक सीमा के भीतर जिसमें $\pm 2s_{YX}$ सम्मिलित है, और $\pm 3s_{YX}$ के भीतर व्यावहारिक रूप में सभी (सिद्धान्त रूप में, मदों की बड़ी संख्या के साथ, 99.73 प्रतिशत के)। बिन्दुओं की गिनती से पता चलता है कि आकलन की रेखा के $\pm s_{YX}$ के भीतर 20 में से

4 यद्यपि इस माप को "आकलन की मानक घुटि" कहा जाता है तथापि यह ज्ञात है कि चार्ट 24 तथा 25 में प्रयुक्त अर्थ में मानक घुटि नहीं है। आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के बिन्दु Y मूल्यों का मानक विचलन s_{YX} है।

13 मर्दे (65 प्रतिशत) प्राप्त होती हैं, रेखा के $\pm 2s_y x$ के भीतर 19 मर्दे (95 प्रतिशत) दृष्टिगोचर होती है, और $\pm 3s_y x$ के भीतर सभी 20 मर्दे सम्मिलित हैं। थोड़ा सा अन्तर इस कारण से हो सकता है कि प्रतिदर्श छोटा था और प्रकीर्ण आकलन समीकरण के चारों ओर प्रसामान्य रूप से वितरित नहीं था।

ऊँचाई मर्दों में



चार्ट 19.6. 20 वन वृक्षों के व्यास विकास तथा ऊँचाई विकास के लिये आकलन की ± 1 , ± 2 तथा ± 3 मानक त्रुटियों के आकलन समीकरण एवं क्षेत्रों। नारणी 19.2 के अंकित।

यद्यपि आकलन की मानक त्रुटि आकलन समीकरण के गिर्द सभी Y मूल्यों के प्रसार का माप है और इसलिये प्रसार का सामान्य या पूर्ण माप है, तथापि विशिष्ट आकलनों की विश्वसनीयता का संकेत करने के लिये प्रायः इसका प्रयोग किया जाता है। यह माप किया गया था कि 50 इंच व्यास विकास वाले वृक्षों का औसत ऊँचाई विकास 10.268 फुट होना चाहिये। हम अब अपने बयान का विस्तार यह कहकर कर सकते हैं कि यदि हमारा प्रतिदर्श प्रतिनिधि है तो इस प्रकार के लगभग 3 वृक्षों के ऊँचाई विकास में 8.16 फुट और 12.38 फुट के बीच अन्तर (10.268 ± 2.107) होना चाहिए, अर्थात्, कुछ अधिक विस्तृत परिमर का विचार करने पर 100 में से लगभग 95, 6.05 फुट और 14.48 फुट के बीच में होने चाहिये। किसी अन्य परिसर के भीतर आने वाले अनुपात को भी [E] परिशिष्ट 3 के संकेत से तुरन्त परिकल्पित किया जा सकता है।

त्रुटि के परिमर से सम्बन्धित ये बयान, निश्चितता से नहीं अपितु केवल आशा में सम्बद्ध हैं। हमने केवल 20 मर्दों का प्रयोग किया है और यद्यपि प्रतिदर्श सतर्कता में भी क्या न चुना हो, 20 का अन्य प्रतिदर्श हमें ठीक वही परिणाम प्रदान नहीं करेगा जैसे कि हमन ऊपर प्राप्त किये थे। सम्भवतः हम अनिश्चितता को और कम कर सकते हैं, अपने प्रतिदर्श वा केवल आकार बढ़ा कर ही नहीं, अपितु व्यास विकास के अतिरिक्त किसी अन्य कारक के साथ ऊँचाई विकास में परिवर्तनों की तुलना द्वारा भी, उदाहरणार्थ—मायू, क्योंकि जैसे वृक्ष पुराने होने चले जाते हैं, वैसे-वैसे उनके विकास की दर बदल सकती है। साथ ही मिट्टी में

सारणी 19 2

20 वन वृक्षों के ऊँचाई विकास के लिये, जैसा कि उनके व्यास विकास द्वारा आकलित किया गया, कुल विचरण, व्याख्यायित विचरण और अवशिष्ट विचरण का परिकलन

व्यास विकास में दर्ज छाली भर ऊँचाई पर (निम्नतम से उच्चतम तक)	X (2)	ऊँचाई विकास फुटों में Y (3)	Y_c (4)	$Y - \bar{Y}$ (5)	$Y_c - \bar{Y}$ (6)	$Y_c - Y_c$ (7)	$(Y - Y_c)^2$ (8)	Y_c^2 (9)	$Y_c^2 - (Y - Y_c)^2$ (10)
1	2.3	7	4.902	-1.65	-3.748	2.098	2.7225	14.0475	4.4016
2	2.5	8	5.238	-0.65	-3.412	2.762	0.4225	11.6417	7.6286
3	2.6	4	5.405	-4.65	-3.245	-1.405	21.6225	10.5300	1.9740
4	3.1	4	6.244	-4.65	-2.406	-2.244	21.6225	5.7888	5.0355
5	3.4	6	6.747	-2.65	-1.903	-0.747	7.0225	3.6214	0.580
6	3.7	6	7.250	-2.65	-1.400	-1.250	7.0225	1.9000	1.5625
7	3.9	12	7.585	3.35	-1.065	4.415	11.2225	1.1342	19.492
8	4.0	8	7.753	-0.65	-0.897	0.247	0.4225	0.8046	0.0610
9	4.1	5	7.921	-3.65	-0.729	-2.921	13.3225	0.5314	8.5222
10	4.1	7	7.921	-1.65	-0.729	-0.921	2.7225	0.5314	0.8482
11	4.2	8	8.088	-0.65	-0.562	-0.081	0.4225	0.3147	0.0077
12	4.4	7	8.424	-1.65	-0.226	-1.424	2.7225	0.0511	2.0278
13	4.7	9	8.927	0.35	0.277	0.073	0.1225	0.1167	0.0053
14	5.1	10	9.598	1.35	0.948	0.442	1.8225	0.8987	0.1616
15	5.5	13	10.268	4.35	1.618	2.732	18.9225	2.6179	7.4638
16	5.8	7	10.772	-1.65	2.122	-3.772	2.7225	4.5029	14.2280
17	6.2	11	11.442	2.35	2.792	-0.442	5.5225	7.7953	0.1954
18	6.9	11	12.616	2.35	3.966	-1.616	5.5225	15.7292	2.6115
19	6.9	16	12.616	7.35	3.966	3.384	54.0225	15.7292	11.4515
20	7.3	14	13.287	5.35	4.637	0.713	28.6225	21.5018	0.5084
योग.....	90.7	173	173.004	0	0.004	-0.004	208.5500	119.8085	88.7548

पोष के भोजन का गुण और मात्रा और वृक्षा की भीड़ के अण का विचार किया जा सकता है। यदि व्यास विकास के अतिरिक्त कोई अन्य मापनों पर भी विचार किया जाता (यह अध्याय 21 में वर्णित मनकषा सहसम्बन्ध है) तब भी कुछ अवर्णित विचरण होत और इसलिए तब भी कुछ अनिश्चिन्ता होती।

सहसम्बन्ध गुणांक और व्याख्यात घटबढ़—आकलन समीकरण और आकलन की मानक त्रुटि से निवृत्त में सम्बन्धित दूसरा माप है सहसम्बन्ध r का गुणांक। आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ एक हम प्रकार का कथन है जिसमें आश्रित चर स्वतन्त्र चर में विचरणों के साथ साथ बदलता है। $S_{Y \cdot X}$ आश्रित चर में प्रसार की मात्रा का संकेतक है जिसकी हम अपनी आकलन रेखा के द्वारा गणना करने में असफल रहे हैं परन्तु व्यास विकास तथा ऊँचाई विकास फुटों में, के आँकड़ों की अवस्था में इसे मूल आँकड़ों के रूप में वर्णित किया गया है। जब दो चरों के बीच सम्बन्ध के अण का वर्णन कर रहे हो तो उन संक्षिप्त सख्यात्मक पदों का प्रयोग करने का योग्य होना सुविधाजनक है जो मूल आँकड़ों की इकाइयों से स्वतन्त्र है और यद्यपि हम आकलन की रेखा के समीकरण या $S_{Y \cdot X}$ में से किसी एक को भी नहीं जानते तो भी दो श्रमियों के बीच सम्बन्ध के अण का वर्णन करता सुविधाजनक है निश्चिन्ता के लिए जानकारी को इस प्रकार से देवाने में कुछ हानि होती है क्योंकि यह एक चर से दूसरे के मूल्य का आकलन करने के योग्य नहीं बनाती अथवा निरपेक्ष विस्तार में किसी भी आकलन की परिशुद्धता के अण के बारे में जिसे हम कर रहे हैं, नहीं बताती। परन्तु कुछ लाभ भी होना है क्योंकि विभिन्न सहसम्बन्धों की विषय सामग्री से स्वतन्त्र एक गुणांक की विसा प्रत्येक गुणांक से तुलना की जा सकती है। जैसा कि वर्णन किया जा चुका है, सहसम्बन्ध का गुणांक एक ऐसी मर्यादा है जो कि शून्य में से होकर $+1$ से -1 तक बदलती है। यह चिह्न सदैव वर्त्ता है कि सम्बन्ध की रेखा का ढाल धनात्मक है या ऋणात्मक, जबकि गुणांक की मात्रा सम्बन्ध के अण की शक्ति है। जब चरों के मध्य बिल्कुल कोई सम्बन्ध नहीं होता तो r शून्य होता है।

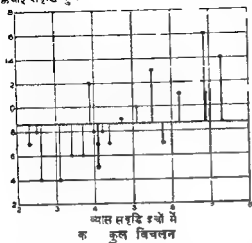
निम्नलिखित हम में सहसम्बन्ध के गुणांक के अण की स्पष्ट जानकारी दी जाती है। चरता का एक माप जिस विचरण या कुल विचरण कहा जाता है। मूल्यों के उनके माध्य से विचरनों के वर्गों का योग है, $\Sigma(1 - \bar{Y})^2$ । इस कुल विचरण को दो भागों में बाँटा जा सकता है (1) वह जिसका वर्णन हमारी सम्बन्ध की रेखा द्वारा किया जा चुका है तथा (2) वह जिसका वर्णन करने में हम असफल रहे हैं। हमारे घटन के वर्गों के ऊँचाई विकास में कुल विचरण 208.55 है, जैसा कि सारणी 19.2 के स्तम्भ 8 का गणनाओं में दिखाया गया है। विचरण की मात्रा जिसका वर्णन हमने अपनी सम्बन्ध रेखा द्वारा किया है आकलित Y मूल्यों के उनके मूल्य में विचरणों के वर्गों का जोड़ है (यदि मूल्य Y मूल्यों का माध्य भी है, जैसा कि सारणी 19.2 के स्तम्भ 3 और 4 के योगों का N के द्वारा भाग करने से देखा जा सकता है), यथार्थ $\Sigma(Y_c - \bar{Y})^2$ । व्याख्यात विचरण को सारणी 19.2 के स्तम्भ 9 में 119.81 दिया गया है। अव्याख्यात विचरण, Y' मूल्यों के, उनके आकलित मूल्यों में विचरणों के वर्गों का जोड़ है, $\Sigma(Y - Y_c)^2$ । सारणी 19.2 के स्तम्भ 10 में अव्याख्यात विचरण को 88.75 दिखाया गया है।

आधो हम अपनी गोज का सार बनायें

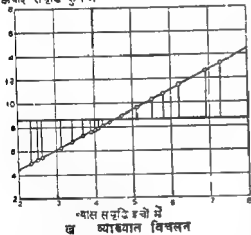
विचरण	संकेत चिह्न तथा सूत्र	विचरण की मात्रा*	कुल विचरण का प्रतिजन
अव्याख्यात	$\Sigma(Y - Y_c)^2 = \Sigma(Y - \bar{Y})^2$	88.75	42.6
व्याख्यात	$\Sigma(Y_c - \bar{Y})^2 = \Sigma(Y_c - \bar{Y})^2$	119.81	57.4
योग	$\Sigma(Y - Y_c)^2 = \Sigma(Y - \bar{Y})^2$	208.55	100.0

* सारणी 19.2 में पूर्णतः के कारण दो अवयव योग में कुछ बड़ जाते हैं। बाद में यह देखा जाएगा कि $\Sigma(Y_c - \bar{Y})^2 = 88.74$

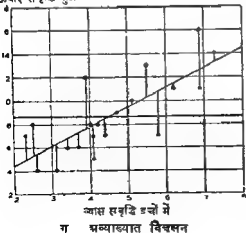
ऊँचाई सड़ि फुटो में



ऊँचाई सड़ि फुटो में



ऊँचाई सड़ि फुटो में



यह स्पष्ट है कि हमने आश्रित चर में 57.4 प्रतिशत विचरण की व्याख्या कर ली है। एक के अनुपात के रूप में अभिव्यक्त, 0.574, निर्धारण का गुणांक r^2 है। सहसम्बन्ध का गुणांक r , निर्धारण के गुणांक का वर्गमूल है और इसका मूल्य +0.758 है (वह वही है जो b का है) और इसे आश्रित चर में कुल विचरण के अनुपात के वर्गमूल के रूप में सोचा जा सकता है जिसकी व्याख्या आकलन समीकरण के प्रयोग द्वारा की जा चुकी है। जब तक कि $r^2 = 0$ या 1.0 नहीं है, जबकि $r = r^2$, तब तक r , r^2 से अवश्य बड़ा होगा, निर्धारण के गुणांक और सहसम्बन्ध के गुणांक की व्याख्या करने की उपर्युक्त विधि का एक प्रमुख लाभ यह है कि धारणा धरेखिक तथा अनेकधा गुणांकों का वर्णन करने का भी काम देगी, जिनका वर्णन अध्याय 20 और 21 में किया गया है।

कुछ पाठकों के लिए यह सहायक हो सकता है कि वे सारणी 19.2 की जानकारी की सजीव कल्पना करने के योग्य हों। चार्ट 19.7 ऊँचाई और व्यास विकास के आँकड़ों के सम्बन्ध में प्रदर्शित करता है

क वास्तविक Y मूल्यों के उनके माध्य से विचलन।

ख परिकल्पित Y मूल्यों के अपने माध्य से विचलन।

(पुनः देखिए कि $\bar{Y}_e = \bar{Y}$)

चार्ट 19.7 जैसा कि उनके व्यास विकास से व्याख्यात है, 20 वन वृक्षों के ऊँचाई विकास के लिए कुल विचलन, व्याख्यात विचलन, और अव्याख्यात विचलन। सारणी 19.2 के आँकड़।

(ग) वास्तविक Y मूल्यों के परिकलित Y मूल्यों से विचलन।

विचरण के जिस अनुपात की व्याख्या की गई है, वह 0.574 था। जिस अनुपात की व्याख्या करने में हम असफल रहे हैं, वह 0.426 था। यह k^2 है जो अनिवारण⁶ का गुणांक है। ध्यान दें कि सभी परिस्थितियों में $r^2 + k^2 = 1.0$ । यह भी ध्यान दें कि r^2 के लिए अधिकतम सम्भव मूल्य 1.0 है (जब r भी 1.0 है), यह तभी होगा जबकि प्रकीर्ण आरेख के सभी बिन्दु आकलन रेखा पर हों, जैसा कि चार्ट 19.2 में था। यदि किसी विचरण की व्याख्या न की जाए तो r^2 (और r) शून्य होगा क्योंकि आकलन समीकरण Y से मेल जाएगा।

जैसा कि चारणों 19.2 या खोजा के सार में देखा जा सकता है कुल विचरण व्याख्यात विचरण तथा अव्याख्यात विचरण के जोड़ के बराबर है⁷

$$\sum y = \sum y_p^2 + \sum y_r^2,$$

$$208.55 = 119.81 + 88.75$$

समीकरण को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$\sum y_p^2 = \sum y^2 - \sum y_r^2$$

जैसा कि पूर्व अनुच्छेदों में परिकलित किया गया,

$$r = \frac{\sum y_p}{\sum y},$$

बिन्तु हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं⁸

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{\sum y_p^2}{\sum y^2} = 1 - \frac{\sum y_r^2}{\sum y^2} \\ &= 1 - \frac{88.75}{208.55} = 1 - 0.426 = 0.574 \end{aligned}$$

वही मूल्य है जो पहले प्राप्त किया गया।

पृष्ठ 418 पर यह प्रासंगिक वणन किया गया था कि r का चिह्न वही है जो कि आकलन समीकरण में b का चिह्न है। जब तक कि सहसम्बन्ध बहुत नीचा न हो तब r के चिह्न का निर्धारण प्रकीर्ण आरेख के निरीक्षण से भी किया जा सकता है। वे विधियाँ जिनका बलून पहले r^2 या r के मूल्य का निर्धारण करने के लिए किया गया था गुणांक का अर्थ⁹ समझाने के लिए प्रस्तुत की गयी थी। वे इतनी अधिक परिश्रम

6 जबकि $r^2 + k^2 = 1.0$, $r + k > \pm 1.0$ जब तक कि $r = \pm 1.0$ या 0 न हो। k को अन्य सन्तानों का गुणांक कहा जाता है।

7 बीजगणितीय प्रमाण के लिए देख परिशिष्ट घ, परिच्छेद 19.1, समीकरण 7।

8 वगमूल लेने से सहसम्बन्ध गुणांक प्राप्त होता है

$$r = \sqrt{1 - \frac{\sum y_r^2}{\sum y^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum y_r^2 - N}{\sum y^2 - N}} = \sqrt{1 - \frac{s_r^2}{s_y^2}}$$

इस अन्तिम व्यंजक का और इस अध्याय में बाद में संशोधित किया जाएगा।

9 सहसम्बन्ध गुणांक का वणन इस रूप में भी किया जा सकता है यदि दो चर 1 और 2 को एका मोचा जाए कि वे किसी मद में विद्यमान होने की बराबर सम्भावना वाले तत्त्वों से मिलकर बन हैं (जिनमें से कुछ 1 और 2 में सन्तान हैं, परन्तु जिनमें से कुछ एक में है और दूसरे में नहीं), तो सम्भव

माध्य है कि उनको दिन प्रतिदिन के परिकलना के प्रयोग में नहीं लाया जा सकता। गणना के उद्देश्यों के लिए अधिक उपयोगी दूसरे मूना का वर्णन इस अध्याय में आगे किया जायेगा।

उत्पाद पूर्ण सूत्र—अनक विभिन्न दृष्टिकोणों से सहसम्बन्ध के गुणांक पर पहुँचा जा सकता है। जैसा कि पहले देख चुके हैं, पहल दिया गया विवरण विशेष रूप से जानबूझकर है क्योंकि आवश्यक रूप से उसी विचार का प्रयोग वक्र-रेखीय तथा अनकषा सहसम्बन्ध में किया जा सकता है। परन्तु निम्न वर्णन सरल भी है और कुछ उद्देश्यों के लिए अत्यन्त उपयोगी भी।

आकलन समीकरण में, b हम उस प्रामाण्य मात्रा के विषय में बनाता है जिसमें आश्रित धर स्वतन्त्र धर में एक इकाई के परिवर्तन के साथ बदलता है। यह आकलन समीकरण पर किसी बिन्दु का $\frac{Y}{x}$ अनुपात या ढाल है, जबकि y और x को धोरी के माध्य से विचलनों के रूप में परिभाषित किया है ताकि आकलन समीकरण $y_c = bx$ बन जाता है और b का $\frac{\sum xy}{\sum x^2}$ के मूल्य की खोज¹⁰ के द्वारा प्राप्त किया जाता है। यद्यपि आकलन के उद्देश्यों के लिए यह स्थिर b आवश्यक है, ता भी यह हम चरों के मध्य सम्बन्ध की मात्रा का नहीं बता सकता क्योंकि वे प्रत्यक्ष रूप से एक दूसरे से तुलना योग्य नहीं हैं। X धोरी और y धोरी का समान प्रसार नहीं है, और वे भिन्न भौतिक इकाइयों में भी हो सकती हैं। तथापि अनुपात $\frac{y}{x}$ की मदद में तुलनात्मकता को, अथवा को s_y से तथा हर को s_x से विभक्त करके या सारोध्यजक को $\frac{s_y}{s_x}$ से विभक्त करके प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार निम्नलिखित ढग से b को r में बदल दिया जाता है¹¹

$$r = \frac{\sum xy}{\sum x^2} - \frac{s_y}{s_x} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \frac{s_x}{s_y} = \frac{(\sum xy)(s_x)}{Ns_x^2 s_y} = \frac{\sum xy}{Ns_x s_y} = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}}$$

अनकषा के निर्धारण का गुणांक समान तत्त्वों के दो अनुपातों का गुणनफल है, और सहसम्बन्ध का गुणांक उनका ज्यामितीय माध्य है। आओ हम 5 मंडल (तब) लें, जिनके एक सरल निम्नलिखित अंकित हैं (दूसरे तरफ कोरी है)



यदि हम 5 मंडलों को आकाश में फेंकें, जब वे गिरते हैं तो 0 से 4 तक X की कोई भी संख्या दृष्टि गोचर हो सकती है तथा Y की 0 से 3 तक। जब भी X प्रस्तुत होता है तो उसी मंडल पर Y के प्रस्तुत होने के अवसर 4 में से 2 हैं, इसी प्रकार जब Y दृष्टिगोचर होता है तो उसी मंडल पर X के प्रस्तुत होने के 3 में से 2 अवसर हैं। यदि हम इन मंडलों को आकाश में कई बार फेंकें, और X तथा Y को प्रत्येक बार गणना कर लें तो फेंकने से प्रकट होने वाली X की संख्या में और Y की संख्या में सहसम्बन्ध होगा। r का अधिकतम संभव मूल्य है $\frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = 0.333$, जबकि r का अधिकतम संभव मूल्य $\sqrt{\frac{4}{5} \times \frac{3}{5}} = +0.58$ है। फेंकने का जितनी अधिक संख्या होगी उतनी ही अधिक r की इस मूल्य तक पहुँचने की प्रवृत्ति होगी।

10 दस परिचित ध, परिच्छेद 19.2।

11 उसी परिणाम की प्राप्ति करने का दूसरा ढग है कि r को b की विशिष्ट अवस्था के रूप में समझो, अर्थात् जब भौतिक अंकितों को, उनके अपने भौतिक विचलनों का इकाइयों में अभिव्यक्त करने,

अंतिम दो रूपों में से किसी एक में अनुपात को सहसम्बन्ध के गुणांक का गुणनफल घुण रूप कहा जाता है। इस प्रकार यह देखा जा सकता है कि जब अक्ष और हर दोनों मानक विचलन इकाइयों में हों तो r आकलन समीकरण का केवल ढाल मात्र है।

अब क्योंकि

$$r = b - \frac{s_1}{s_r}$$

$$b = r \frac{s_1}{s_r}$$

और

$$j = r \frac{s_1}{s_1} x$$

इस रूप में आकलन समीकरण का प्रयोग इन अध्याय में बाद में किया जाएगा।¹²

परिकलन की व्यावहारिक विधियाँ

सहसम्बन्ध के मिश्रान्त का जितना सम्भव है उतना संक्षेप से वर्णन करने के लिये पूर्व अध्यायों में युग्मित मंदों की सीमित सरया ली गई थी। तथापि अधिकतर व्याव

तुलनायोग्य बना दिया गया है। इस प्रकार

$$\frac{\sum xy}{\sum x} \text{ हो जाता है } \frac{\sum \left(\frac{x}{s_x} \right) \left(\frac{y}{s_y} \right)}{\sum \left(\frac{x}{s_x} \right)} = \frac{\sum x_j}{s_x s_r} \frac{s_r}{\sum r} = \frac{\sum xy}{s_x s_r} \frac{s_x}{\sqrt{s_1^2}} = \frac{\sum r_j}{N_r x s_r}$$

सूत्र का प्रायः $r = \frac{1}{N} \sum \left(\frac{x}{s_r} \frac{y}{s_1} \right)$ के रूप में वर्णन किया जाता है। विशिष्ट गुणनफलधूरा का कारण उस समय स्पष्ट हो जाता है जब यह अनुभव कर लिया जाता है कि शब्द धूरा माध्य में विचलनों की कुछ शक्ति की सीमा का संकेत करता है। इस प्रकार r चरों के गुणनफल का प्रथम घुण है जबकि प्रत्येक का वर्णन उसके अपने मानक विचलन के सम्बन्ध में पहले किया जा चुका है। इस प्रमाण के लिये कि

$$\frac{\sum y_j^2}{\sum j^2} = \frac{\sum x_j}{\sum x \sum y}$$

देख परिशिष्ट ध परिच्छ 19.3।

12 आकलन समीकरण $X_c = a + b j$ प्रोकि वर्गित क्षैतिज विचलनों को कम से कम करता है वा कोई घुण उल्लेख नहीं किया गया है। इस समीकरण के लिए प्रचलमान्य समीकरण हैं

$$\text{I } \sum X = Na + b \sum j,$$

$$\text{II } \sum j j = a \sum Y + b \sum Y^2$$

$$\text{इस रूप में } r = b j, b = \frac{\sum x_j}{\sum j^2} \text{ तथा } X_c = r \frac{s_1}{s_r} j$$

इस सूत्र के रचित सहसम्बन्ध का वर्णन करने वाले भागों में आकलन समीकरण $Y_c = a + b j$ में सम्बन्धित समस्याओं पर हम घुण ध्यान देंगे। कुछ ऐसा स्थिति है जिनमें आकलन समीकरण $X_c = a + b j$ उचित है और अन्य कुछ एसी स्थितियाँ हैं जिनमें हमसे किसी से या भिन्न आकलन समीकरणों का आवश्यकता बढ़ती है

हारिक समस्याओं में हमारे पास मंदो के युग्मों की बड़ी संख्या होती है। अतः व्यवहार में समय की बचत के लिये पूर्व विधियों में मामूली सा सुधार करना उचित है।

सहसम्बन्ध समस्या में प्रारम्भिक पथ के रूप में एक प्रकीर्ण आरेख अवश्यमेव खींचा जाना चाहिये। यदि सम्बन्ध के अंश का केवल सन्निकट विचार चाहिये तो प्रकीर्ण आरेख का निरीक्षण सन्तोषजनक परिणाम उपस्थित करता है। सहसम्बन्ध करने में घड़े से अनुभव के पश्चात्, निरीक्षण द्वारा, प्रकीर्ण आरेख से, सांख्यिकी-शास्त्री r के आश्चर्यजनक निकट आकलन करने के योग्य हो सकता है, और ये r के परिकलनों में भारी त्रुटियों को खोजने के लिये उनकी पर्याप्त सहायता कर सकते हैं। प्रकीर्ण आरेख का प्रयोग अधिकतर अन्वेषणात्मक उद्देश्यों के लिए किया जा सकता है और समय-समय पर सहसम्बन्ध के गुणांक का निर्धारण करने की आवश्यकता को समाप्त करने के लिए इससे पर्याप्त जानकारी प्राप्त हो सकती है।

हम पहले ही देख चुके हैं कि

$$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}.$$

क्योंकि प्रथम प्रसामान्य समीकरण है

$$\begin{aligned}\sum Y &= Na + b \sum X, \\ \frac{\sum Y}{N} &= a + b \frac{\sum X}{N}, \text{ तथा} \\ a &= \bar{Y} - b\bar{X}\end{aligned}$$

इन व्यंजकों से, दो सामान्य समीकरणों का इकट्ठा हल किए बिना a और b को प्राप्त किया जा सकता है। तथापि हमें परिकलन करना चाहिये ¹³

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{90.7}{20} = 4.535, \quad \bar{Y} = \frac{173}{20} = 8.65, \\ \sum xy &= \sum XY - \bar{X} \sum Y, \\ &= 8560 - (4.535)(173) = 71445, \\ \sum x^2 &= \sum X^2 - \bar{X} \sum X, \\ &= 45393 - (4.535)(90.7) = 426055, \\ \sum y^2 &= \sum Y^2 - \bar{Y} \sum Y, \\ &= 1,705 - (8.65)(173) = 208.55\end{aligned}$$

अन्तिम जोड़ की बाद में आवश्यकता पड़ेगी।

तब हम प्राप्त करते हैं

$$\begin{aligned}b &= \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{71445}{426055} = 1.676896, \\ a &= \bar{Y} - b\bar{X} = 8.65 - (1.676896)(4.535), \\ &= 1.045277,\end{aligned}$$

निम्न आकलन समीकरण प्रदान करते हुए

$$Y_c = 1.045 + 1.677X.$$

13. योगों के व्यवहारीक प्रमाण के लिये अध्याय 21 में टिप्पणी 3 देखें।

तब हम व्यञ्जक¹⁴

$$\begin{aligned}\Sigma Y^2 &= a\Sigma Y + b\Sigma XY, \\ &= (1\ 045277)(173) + (1\ 676896)(856\ 0), \\ &= 1,616\ 26\end{aligned}$$

के प्रयोग से ΣY^2 का परिकलन करते हैं,

और Σy को निम्न से

$$\begin{aligned}\Sigma y^2 &= \Sigma Y^2 - \Sigma Y^2 \\ &= 1,705\ 1\ 616\ 26 = 88\ 74\end{aligned}$$

हम या तो परिवर्तन कर सकते हैं

$$\begin{aligned}\Sigma y^2 &= a\Sigma x + b\Sigma XY - \bar{Y}\Sigma Y, \\ &= (1\ 045277)(173) + (1\ 676896)(856\ 0) - (8\ 65)(173) \\ &= 119\ 81,\end{aligned}$$

या

$$\begin{aligned}\Sigma y^2 &= b\Sigma xy, \\ &= (1\ 676896)(71\ 445) = 119\ 81,\end{aligned}$$

और Σy^2 निम्न विकल्प व्यञ्जक से प्राप्त कर सकते हैं

$$\begin{aligned}\Sigma y^2 &= \Sigma y^2 - \Sigma y^2, \\ &= 208\ 55 - 119\ 81 = 88\ 74\end{aligned}$$

$s^2_Y x$ को प्राप्त करने के लिए सुविधाजनक सूत्र है

$$s^2_Y x = \frac{\Sigma y^2}{N} = \frac{88\ 74}{20} = 4\ 437,$$

तथा

$$s_Y x = 2.106\ \text{कुट}।$$

तब सहसम्बन्ध का गुणांक निम्न प्रायिक व्यञ्जक से प्राप्त किया जाता है

$$r = \frac{\Sigma y^2_c}{\Sigma y^2} = \frac{119\ 81}{208\ 55} = 0.574,$$

तथा

$$r = +0.758$$

14 यह प्रमाण कि $\Sigma Y^2 = a\Sigma Y + b\Sigma XY$, परिशिष्ट ब, परिच्छेद 19 1, समीकरण 3 में दिया गया है। यह प्रमाण कि $\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \Sigma Y^2$, वही परिच्छेद के समीकरण 5 में दिया गया है। $\Sigma y^2 = b\Sigma xy$, के प्रमाण के चित्र देखें समीकरण 6। $\Sigma y^2 = \Sigma y^2 - \Sigma y^2$, के प्रमाण के चित्र देखें समीकरण 7।

यदि प्राथमिकता दी जाए तो पादटिप्पणी ॥ में प्रदत्त व्यंजक में से एक के प्रयोग द्वारा r को प्राप्त किया जा सकता है।

यदि r के मूल्य की ही आवश्यकता हो, तो जिस सूत्र में a या b के मूल्य की आवश्यकता नहीं पड़ती उम का प्रयोग करना अत्यधिक शीघ्रगामी है। यह पहले देखा गया है कि

$$r = \frac{\sum xy}{N s_x s_y}$$

परन्तु x के लिए $X - \bar{X}$ का और y के लिए $Y - \bar{Y}$ का, प्रतिस्थापन करके तथा सरलीकरण करके, यह बन जाता है¹⁵

$$r = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[N \sum X^2 - (\sum X)^2][N \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

सारणी 19.1 से आवश्यक मूल्यों का प्रवेश प्रदान करता है।

$$\begin{aligned} r &= \frac{(20)(856.0) - (90.7)(173)}{\sqrt{[(20)(453.93) - (90.7)^2][(20)(1,705) - (173)^2]}} \\ &= +0.758 \end{aligned}$$

ध्यान दें कि यह व्यंजक स्वतः r के लिए चिह्न प्रदान करता है।

कुछ चेतावनियाँ

सहसम्बन्ध तथा कारणत्व—सहसम्बन्ध के गुणांक को कोई ऐसी वस्तु नहीं समझना चाहिए जो कारणत्व को प्रमाणित करती है। अपितु केवल सह-विचरण के माप के रूप में समझना चाहिए। वास्तव में, निम्नलिखित परिस्थितियों में से कोई एक प्रचलित हो सकती है

1. किसी एक चर में विचरण दूसरे चर में विचरण के कारण (प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष) होता है। जिस चर को दूसरे में विचरणों का कारण समझा जाता है उसे प्रायः स्वतंत्र चर के रूप में ग्रहण किया जाता है तथा X प्रकाश पर आगे बढ़ाया जाता है। इस प्रकार, क्योंकि स्टॉक पर लाभानो के विषय में सोचा जाता है कि वे स्टॉक कीमतों को प्रभावित करते हैं, इसके विपरीत नहीं, तो एक लाभानो “VV” शेयरों को स्वतंत्र चर बना लिया जाएगा। यह एक तर्कसंगत प्रक्रिया है जो सांख्यिकी शास्त्री के इस विश्वास का निर्धारण करती है कि दो चरों के बीच कारणात्मक सम्बन्ध है और उसके इस विश्वास का भी कि कारण क्या है और प्रभाव क्या है। तब यह स्पष्ट होना चाहिए कि सहसम्बन्ध

15. इस व्यंजक की प्राप्ति के लिये देखें परिशिष्ट ४, परिच्छेद 19.4। उपर्युक्त व्यंजक के द्वारा r को प्राप्त करके, वर्गित बाकड़ों के सहसम्बन्ध के साथ प्रयुक्त सूत्रों से s_y , X तथा आकलन समीकरण को प्राप्त करना सम्भव है

$$Y_c - \bar{Y} = r \frac{s_y}{s_x} (X - \bar{X})$$

या

$$s_{Y.X} = s_y \sqrt{1 - r^2}$$

का गुणाव स्वयमेव यह नहीं कहता कि X Y का कारण है न ही यह कहता है कि Y X का कारण है।

2. दो चरों का सह विचरण एक ही ढंग से या विपरीत ढंगों से प्रत्येक चर पर प्रभाव डालने वाले समान कारण अथवा कारणों से हो सकता है। यदि यह पाया जाए कि प्रति हजार व्यक्ति मोटर गाड़ी दुघटनाओं और प्रति व्यक्ति फंडरल आय कर अदायगियों में सहसम्बन्ध है तो हमें शीघ्रता से इस परिणाम पर नहीं पहुँच जाना चाहिए कि एक मोटर गाड़ी दुघटना एक व्यक्ति के आय कर देने में सक्षम कर देती है यह भी प्रावश्यक रूप से सत्य नहीं है कि कर का अधिक अदायगियाँ करना एक व्यक्ति को मावधानी से कार चलाने के लिए अयोग्य बना देता है। तो भी यह पूरा सम्भव है कि उन राज्यों में जहाँ औसत आय ऊँची है प्रति व्यक्ति आय कर ऊँचा होगा अधिकतर व्यक्तियों के पास मोटर गाड़ियाँ होंगी और दुघटनाएँ बड़ी संख्या में होंगी।

3. दो चरों में कारणगत सम्बन्ध अयोयान्त्रित सम्बन्ध का परिणाम हो सकता है। इस प्रकार वस्तु की ऊँची कीमत उसके उत्पादन को प्रेरणा देती है परन्तु बड़ा हुआ उत्पादन वस्तु का लागत को बढ़ा या घटा सकता है जो मूल्य का प्रक्षणाधीन अवधि पर और इस बात पर निर्भर करता है कि यह वर्तमान लागत उद्योग है या ह्रासमान लागत उद्योग और लागत में परिवर्तन के द्वारा कीमत प्रभावित होगी।

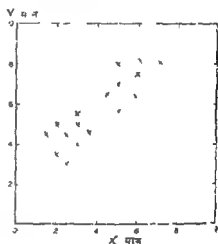
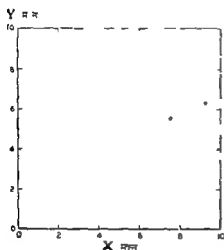
4. सहसम्बन्ध संयोगवश हो सकता है। यद्यपि ब्रह्माण्ड में जिससे कि प्रतिद्वन्द्व लिया गया है चरों में किसी प्रकार का कोई भी सम्बन्ध न हो तो भी यह हो सकता है कि सहसम्बन्ध की उचित मात्रा प्रदान करने के लिए कवल संयोगवश चयन गए चर युग्मों में से पदावली साथ साथ बदल। इस प्रकार यह पाया जा सकता है कि पुरुष विशाद्विप्रा के प्रदत्त समूह में उनके जन्म के आकार तथा उनका जेब्रा की घनराशि में धनात्मक सहसम्बन्ध था। तथापि यह इस प्रकार क्यों है इस सम्बन्ध में सिद्धांत का विकास करना कठिन है और संभावना यह है कि अथ प्रतिद्वन्द्व एकदम भिन्न परिणाम प्रस्तुत करेगा। r का विश्वसनीयता के माप की ओर अध्याय 26 में मूल्य में ध्यान दिया जाएगा।

विपमता¹⁶ प्रक्षेप आकड़ों में बारबारता वृत्त की विपमता का प्रायः द्विविध हो सकता है। या कुछ उन मंदों की विद्यमानता द्वारा जाकि अथ मंदों में संयोगवश बहुत संलग्न है जात किया जा सकता है। प्रकीर्ण आरत पर इस प्रकार का विपमता जो या दो से अधिक समूहों में विदुषों के इकट्ठा होने का या चाट पर एक या अधिक विदुषों का दूसरी से बहुत पर होने का प्रवृत्ति का प्रदर्शित कर सकता है। जहाँ विपमता का प्रक्षेप किया जाता है वहाँ यह श्रद्धा है कि आकड़ा का वर्गीकरण किसी तरह संलग्न आधार पर किया जाए और प्रत्येक समूह का अलग अलग सहसम्बन्ध स्थापित किया जाए। सहसम्बन्ध करने से पूर्व कारणों के विभिन्न समुच्चय से स्पष्ट शामिल पृथक् मंदों का निर्गमन कर

16 निम्नलिखित गद्यांशों में विपमता का वर्णन करने वाली सामग्री एक० ई० ब्राउन द्वारा विधित एलिमेंटरी स्टैटिस्टिक्स वि० एप्लाइड इन मॅडिसिन एंड वि० बायोलॉजिकल साइन्स द्वारा प्रकाशित इन्फॉर्मेटिक्स ब्यूरो 1959, अध्याय 6 में उनी विषय के विवरण पर आधारित है। चार 198 199 और 1910 भी इस पुस्तक में हैं।

देना चाहिए। यदि इस प्रकार के सामान्य ज्ञान के पग नहीं उठाए जाते तो न केवल सहसम्बन्ध की मात्रा के सम्बन्ध में अपितु कई बार इसके चिह्न के बारे में भी, भ्रामक प्रभाव पड़ सकता है।

चार्ट 19 8क एक चित्रित प्रकीर्ण आरेख है जो निम्न सहसम्बन्ध को दिखाता है। चार्ट 19 8ख में दो अवयव समूहों को विभिन्न चिह्नों द्वारा दिखाया गया है, और यह दिखाई देता है कि दो पर्याप्त ऊँचे सहसम्बन्ध विद्यमान हैं। यह भी सम्भव है कि दो विभिन्न समूहों को, जिनमें से प्रत्येक बहुत कम या कोई सहसम्बन्ध नहीं रखता, प्रकीर्ण आरेख पर इस प्रकार से प्रारम्भित किया जा सकता है कि यदि वे मिला दिए जाते तो सामान्य धनात्मक (या ऋणात्मक) सहसम्बन्ध विद्यमान दिखाई देता।



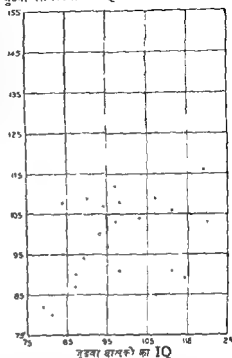
चार्ट 19.8क निम्न सहसम्बन्ध को दिखाने वाला चित्रित प्रकीर्ण आरेख दो असमान समूह जो पहचाने नहीं जा सके। एफ० ई० आक्सटन द्वारा निम्न एलिमेटरी स्टैटिस्टिक्स विद ऐप्लिकेशन्स इन मेडिसिन एन्ड दि बायोलॉजिकल साइंसेस, डाबर प्रकाशन, इकापॉरेटिड यूएफ०, 1959, पृ० 128 में।

चार्ट 19 8ख वही प्रकीर्ण आरेख जैसा कि चार्ट 19 8क में है, परन्तु जो बिन्दुओं तथा गुणा चिह्नों द्वारा प्रदर्शित दो असमान समूहों में से प्रत्येक के लिए पर्याप्त उच्च सहसम्बन्ध का संकेत करता है। उनी क्षेत् से जिसमें चार्ट 19 8क है।

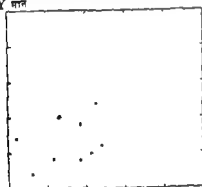
विपरीतता के एक अन्य प्रकार को चार्ट 19 9 में दिखाया गया है। चार्ट 19 9 में दो इकट्ठे बिन्दु हैं जो कि निम्न सहसम्बन्ध, $r = +0.32$ को दिखाते हैं और एक बिन्दु दूसरे से बहुत परे है। सब 10 बिन्दुओं के लिए $r = +0.79$ । इस प्रकार के एकमेव प्रेक्षण की विद्यमानता, जो लगभग निश्चित रूपेण विपरीत है (या कम से कम अनुल-

नात्मक है), उस समय एक उच्चतर सहसम्बन्ध गुणांक को उत्पन्न कर सकती है जब कि हमारे प्रेक्षणों के लिए बहुत कम या किसी भी सहसम्बन्ध का अस्तित्व नहीं है। साथ ही यह भी सम्भव है कि चार्ट 19.9 में भी उसी प्रकार की विपरीतता का वर्णन किया गया हो जिसका विवरण पूर्व अनुच्छेद में किया गया, 9 के समूह में से ऊपर के चार बिन्दु एक ऐसी श्रेणी का प्रतिनिधित्व कर सकते हैं जो कि निम्न पाँच

बुढ़वाँ बान्निजी का IQ



Y मान



X मान

चार्ट 19.9 विपरीतता के एक प्रकार का चित्रण करने वाला प्रकीर्ण आरेख। ऊपरी दाएँ कोने में एक विशेष मद की उपस्थिति के कारण सहसम्बन्ध में वृद्धि हो जाती है। यह चार्ट यथाथ आँकड़ा से बनाया गया है जिसका खोत और प्रज्ञा बनाई नहीं गई। चार्ट, 19.8 के चार्ट के नीचे दिए गए खोत के पृष्ठ 129 से।

बिन्दुओं द्वारा प्रतिनिधित्व की गई श्रेणी में भिन्न है। किसी भी अवस्था में, अन्वेषक को इस सम्भावना की धोर ध्यान देना चाहिए।

यह पर्याप्त स्पष्ट हो जाना चाहिए कि चार्ट 19.9 में प्रदर्शित परिस्थिति के विपरीत परिस्थिति भी उपस्थित हो सकती है। कहने का भाव यह है कि बिन्दुओं का गुच्छा ऊँचे सहसम्बन्ध को दिखा सकता है, परन्तु एक अन्तिम बिन्दु इस प्रकार से स्थित हो सकता है कि इसका अन्वेष के साथ सम्मिश्रण निम्न सहसम्बन्ध को उत्पन्न करेगा। चार्ट 19.10 में एक ऐसी स्थिति को दिखाया गया है जिसमें सीमान्त मूल्या के गुप्त को सम्मिलित करने से निम्न सहसम्बन्ध और भी निम्नतर बन गया है। $r + 0.348$ से घट कर $+0.290$ हो गया है।

माप की त्रुटियाँ—क्योंकि दो चरों के माप में भूलों का सामान्यतया सहसम्बन्ध नहीं होना भव्य। इस प्रकार की भूलें r के आधार को हमारे वास्तविक मूल्य

चार्ट 19.10 एक प्रकार की विपरीतता

चित्रण करने वाला प्रकीर्ण आरेख। चार्ट की छोटी पर एक सम्भव विशेष मद की उपस्थिति के कारण सहसम्बन्ध कम हो गया है। आँकड़े ए० एच० विपरीतता द्वारा निम्न दिव्य एण्ड आर्फ़न्स, जे० एच० ईन्ट एण्ड लम्स, निमिटेड, लन्दन और टोरन्टो, पृष्ठ 121—123 में और विंग अमान के 26 आनुवंश गुणों के प्रतिभा गुणांक उपस्थित करने हैं। चार्ट, 19.8 के चार्ट के नीचे दिए संदर्भ के पृष्ठ 111 से।

नीचे गिरा देनी ह। यदि भूलो वा विस्तार जात है तो इस प्रकार के तनुकरण को ठीक किया जा सकता है।

श्रीसतो का प्रयोग—यदि सहसम्बन्ध किए जाने वाले आँकड़ों को प्रथम स्वतन्त्र चर के अनुसार कई आकार समूहों में इकट्ठा कर लिया जाता है, यदि प्रत्येक समूह के लिए \bar{x} और \bar{y} का परिकलन किया जाता है और यदि ये माध्य सहसम्बन्धित हैं, तो माध्यों में सहसम्बन्ध मजबूत मिलाकर पृथक् पृथक् मदों में सहसम्बन्ध से ऊँचा होगा (जब तक कि असामूहिक आँकड़ों के लिए $r=1.0$ नहीं है)। यह इसलिए ऐसा है क्योंकि विभिन्न स्तम्भ माध्यों के गिद वार्षिकिक मूल्यों का अब कोई प्रसार नहीं है। इसी प्रकार यदि आश्रित चर की अनेक पंक्तियों का समूहीकरण तथा औसत किया जाता है तो सहसम्बन्ध में वृद्धि हो जाएगी। यदि आँकड़ों को दोनों चरों के अनुसार समूहित किया जाता है, ताकि पर्याप्त कोष्ठक हों, और यदि प्रत्येक कोष्ठक के लिए \bar{x} और \bar{y} का परिकलन किया जाता है और (इनके मध्य मूल्यों की अपेक्षा) इन युग्मित कोष्ठक माध्यों को सहसम्बन्धित किया जाता है तो सहसम्बन्ध अधिक हो जाएगा। यदि कोष्ठकों की संख्या अधिक है, तो वृद्धि महत्वपूर्ण होगी। उदाहरणस्वरूप राज्य भौमता का सहसम्बन्ध सामान्यतः काउन्टी मूल्यों के सहसम्बन्ध से ऊँचा होगा।

अरेलिक सम्बन्ध—यदि प्रकीर्ण अरेल का निरीक्षण इस बात को स्पष्ट करता है कि आँकड़ों के साथ सरल रेखा की अपेक्षा वक्र रेखा को अधिक औचित्य के साथ आस-जित किया जा सकता था तो सम्बन्ध की निकटता को घटा कर वर्णन करने वाला एक भ्रामक माप है। अध्याय 20 में व्याख्यात प्रविधि का अनुसरण करते हुए एक वक्र रेखा को जोड़ना चाहिए और अरेलिक सहसम्बन्ध के गुणांक का परिकलन करना चाहिए। इस प्रकार करने से एक उच्चतर गुणांक प्राप्त होगा और एक ऐसा गुणांक मिलेगा जो अधिक यथार्थता से सम्बन्ध की निकटता को प्रतिबिम्बित करता है। कई बार सहसम्बन्ध से पूर्व एक या दोनो चरों को लघुगुणक, पारस्परिक या किसी अन्य कार्य में बदलना श्रेष्ठतर हो सकता है।

समत आँकड़ों का निरसन—उदाहरणार्थ जिन नगरों की संख्या 1,00,000 से 5,00,000 तक है, यदि उनके परचून बिन्दुओं और वेतन-चिट्ठों का सहसम्बन्ध बना दिया जाता है तो सहसम्बन्ध सामान्यतया उतना ऊँचा नहीं होगा जितना कि तब यदि 10,000 से 50,00,000 तक के नगरों को सम्मिलित कर लिया जाता है। यह ऐसा इसलिए है क्योंकि परचून बिन्दुओं और वेतन चिट्ठों दोनों का जनसंख्या के साथ घनात्मक सहसम्बन्ध है, और जब दोनों अक्षांशों पर मूल्यों के परिवर्तन को बढ़ाया जाता है तो Δy^2 में अनुरूप वृद्धि के बिना Δx^2 का बढ़ावा जाता है। इस प्रकार के आँकड़ों के लिए, चार्ट 19-10 में वर्णित प्रकार की विपरीतता में बचन का स्मरण रखना चाहिए। एक भिन्न स्थिति का भी विचार कीजिए यदि नौकरी दिलाने वाले अर्थों को दो से पाँच वर्षों तक का अनुभव रखने वाले श्रमिकों की मासिक आय से सहसम्बन्धित कर दिया जाए तो सहसम्बन्ध उस अवस्था से ऊँचा हो सकता है जिसमें इस प्रकार के सभी कर्मचारियों को सम्मिलित किया गया है, क्योंकि आय प्रायः अनुभव के साथ साथ प्रत्यक्ष रूप से बढ़ती रहती है जबकि नौकरी दिलाने वाले अब घनात्मक रूप में अनुभव के साथ आवश्यक तीर पर सहसम्बन्धित नहीं होते।

माध्यो से वर्ग अन्तरालो के सम्बन्ध में मापा जाता है, X के विचलनो को 55 प्रतिशत और Y के विचलनो को 50 प्रतिशत के रूप में चुना जाता है।

व्यापि r के लिए xy मूल्यों की आवश्यकता पड़ती है, अतः प्रत्येक कोष्ठक के लिये इनका भी परिकलन और जोड़ कर लिया जाता है। यह X विचलन को Y विचलन में गुणा करके दिया जाता है (प्रत्येक कोष्ठक के ऊपरी भाग में प्रदर्शित), और अन्तः इस गुणनफल को उचित वारम्बारता से गुणा करके। परिणाम प्रत्येक कोष्ठक के निम्न भाग में मोटे छाप अक्षों में दिखाए गये हैं। यह देखा जाएगा कि प्रथम तथा तृतीय चतुर्थांश घनात्मक है, जबकि द्वितीय और चतुर्थ वारतव में ऋणात्मक है। उन गुणनफलों के बीज-गणितीय योग को सारणी के निम्न दाहिने कोने में दिखाया गया है। व्यंजक $\sum f d'x d'y$ में f के लिए कोई पादांक नहीं है क्योंकि प्रत्येक कोष्ठक वारम्बारता एक X श्रेणी और एक Y श्रेणी के लिए समान है।

जब समूहित आँकड़ों का सहसम्बन्ध कर रहे हों, तब प्रथम r का परिकलन करना सर्वाधिक शीघ्रगामी है, जिसके पश्चात् आकलन समीकरण और आकलन की मानक त्रुटि को प्राप्त किया जा सकता है।¹⁹

असमूहित आँकड़ों से प्रत्यक्ष रूप से r प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया गया था।

$$r = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[N \sum X^2 - (\sum X)^2][N \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

समूहित आँकड़ों के लिए X को $d'x$ के द्वारा बदल दिया जाता है और Y को $d'y$ के द्वारा, चिह्न f का प्रवेश करा दिया जाता है और व्यंजक बन जाता है :

$$r = \frac{N \sum f d'x d'y - (\sum f x d'x)(\sum f y d'y)}{\sqrt{[N \sum f x (d'y)^2 - (\sum f x d'x)^2][N \sum f y (d'x)^2 - (\sum f y d'y)^2]}}$$

इस सूत्र में प्रतिस्थापन करने से हमारे पास निम्नलिखित आता है।

$$\begin{aligned} r &= \frac{(99)(349) - (-51)(2)}{\sqrt{[(99)(581) - (-51)^2][(99)(336) - (2)^2]}} \\ &= \frac{34,653}{\sqrt{(54,918)(33,260)}} \\ &= +0.8108. \end{aligned}$$

उन विधियों के द्वारा जिनसे पाठक पूर्व परिचित हैं सारणी 19.4 में प्रदर्शित मूल्यों से निम्नलिखित माप शीघ्रता से परिकल्पित किए जाते हैं :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= 35.367 & \bar{Y} &= 32.551 \\ s_x &= 13.0191 & s_y &= 9.2105 \end{aligned}$$

18 वास्तव में दो प्रसामान्य समीकरणों को स्थापित करना और प्रथम आकलन समीकरण को प्राप्त करना सम्भव है। ऐसा करने की विधि के लिए देखें, मूल अक्षों की पुस्तक का प्रथम संस्करण, पृष्ठ 675 तथा पृष्ठ 856—857.

सारणी 19 4

1960 में आयावा की काउन्टियों के लिए प्रतिशत ग्राम काम (X) तथा 3 000 डॉलर (Y) के कम आय के साथ प्रतिशत की सहसम्बन्ध सारणी

श्रेणी सीमाएँ	X	25-79	80-134	135-189	190-244	245-299	300-354	355-409	410-464	465-519	520-574				
Y	मध्य मूल्य	52	107	162	21	272	327	382	43	492	547	f_n	d_r	$f_r d_r$	$f_r(d_r)^2$
55 0-59 9	57 45										+15 15	1	5	5	■
50 0-54 9	52 45							0 1 0	+8 1 8			2	4	■	■
45 0-49 9	47 45					6 1 6			+3 1 3	+6 2 12	+9 1 9	5	3	15	45
40 0-44 9	■ 45								+2 4 8	+4 3 12	+6 2 12	9	2	18	36
35 0-39 9	37 45					2 3 -6	-1 4 -4	0 4 0	+1 5 5	+2 6 12	+3 1 3	13	1	23	23
30 0-34 9	32 45							0 5 0	0 7 0	0 12 0	0 1 0	26	9	0	0
25 0-29 9	27 45				+3 1 3	+2 4 8	+1 8 8	0 1 0	1 1 1			13	1	-18	18
20 0-24 9	22 45		+10 1 10	+8 2 21	+6 1 6	+4 1 4						6	2	-12	24
15 0-19 9	17 45		+10 4 60	2 4 13								8	3	24	72
10 0-14 9	12 45	+24 4 96										4	4	16	64
f_n		4	5		2	9	17	13	12	13	6	$\Sigma f_n = 99$		$\Sigma f_r d_r = 2$	$\Sigma f_r(d_r)^2 = 336$
d_r		1		1	3	2	1	0		2	3				
$f_r d_r$		24		9	8	18	17	0	23	26	18	$\Sigma f_r d_r = 31$			
$f_r(d_r)^2$		144	17	12	18	36	17	0	23	52	54	$\Sigma f_r(d_r)^2 = 381$			

आंकड़े सारणी 19 3 से।

आकलन समीकरण को प्राप्त करने के लिए हम

$$Y_c - \bar{Y} = r \frac{s_y}{s_x} (1 - A)$$

का प्रयोग करते हैं।

इस समीकरण में प्रतिस्थापन करने के बाद, हमारे पास है

$$Y_c - 32.551 = 0.8108 \frac{9.2105}{13.0191} (1 - 35.367), \text{ अथवा}$$

$$Y_c = 12.264 + 0.5736X$$

अब क्योंकि जैसा कि पाद टिप्पणी 8 में दिखाया गया है

$$r^2 = 1 - \frac{s_y^2}{s_x^2},$$

$$s_y^2 = s_x^2 (1 - r^2), \text{ तथा}$$

$$s_{YX} = s_x \sqrt{1 - r^2}.$$

प्रतिस्थापन प्रदान करता है,

$$s_x x \approx 9.2105 \sqrt{1 - (0.8108)^2}, \\ \approx 5.388$$

समूहन का प्रभाव—समूहित आँकड़ों से प्राप्त मूल्य पूर्णरूपेण वही नहीं है जो उस समय प्राप्त हान यदि परिकलन असमूहित आँकड़ों पर आधारित होने। यद्यपि अन्तर सामान्यतया मामूली है यदि प्रत्येक दिशा में कम से कम 12 समूह हैं तथापि समूहित आँकड़ों में परिकलित सहसम्बन्ध के गुणांक की प्रवृत्ति बहुत छोटा होने की है। यह पुनः स्मरण किया जाए कि सहसम्बन्ध गुणांक के लिए एक सूत्र है

$$r = \frac{\sum xy}{N s_x s_y}$$

समूहन से त्रुटियों की प्रवृत्ति अत्र से परस्पर एक दूसरे को समाप्त करने की होती है यदि x और y बटन लगभग सममित हैं। तथापि हर में मानक विचलनों की प्रत्यधिक बड़ा हान की प्रवृत्ति है और शैपाई के शोधन का प्रयोग किया जाना चाहिए। यदि वही परिस्थितियाँ पाई जाती हैं जिनके अन्तर्गत यह शोधन उचित है।

यदि 169 मंदों का सहसम्बन्धित किया जाता है तो असमूहित $r = +0.8317$ जा कि वास्तव मसारणी 19.4 के समूहित आँकड़ों के लिए $r = +0.8108$ के मूल्य से ऊँचा है। यदि शैपाई के शोधन का प्रयोग किया जाता है (समूहित आँकड़ों के लिए r के सूत्र में कोष्ठकों से घिरे हुए प्रत्येक व्यंजक में से $\frac{N-1}{12}$ को घटा कर) तो $r = +0.8271$ मिलता है। वास्तव में इन आँकड़ों के लिए शैपाई के शोधन के प्रयोग की मान्यता संदेहास्पद है, क्योंकि दोनों श्रेणियाँ सीमित परिसर की हैं।

कोटिबद्ध आँकड़ों का सहसम्बन्ध

कई बार सांख्यिकीय श्रेणियाँ ऐसी मंदों से बनी होती हैं जिनकी यथार्थ मात्रा मापी नहीं जा सकती, परन्तु जिनको आकार या किसी अन्य वस्तु के अनुसार कोटिबद्ध कर दिया जाता है। इस प्रकार मारणी 19.5 के स्तम्भ 2 में 14 फरवरी 1966 का युनाइटेड प्रेस की कोटियों के अनुसार हमने 10 बास्केटबाल टीमों की सूची बनाई है। स्तम्भ 3 में हमने एसोमिण्टिड प्रेस की कोटियों के क्रम के अनुसार उन्हीं टीमों की सूची बनाई है। हम अधिकारियों के दो समुच्चयों में सहमति की सीमा का निर्धारण करना चाहते हैं।

क्योंकि पहले चर्चा किए गए सहसम्बन्ध के गुणांक को कोटिबद्ध आँकड़ों का वर्णन करने के लिए नहीं बनाया गया, अतः हम स्पीयरमैन के कोटि सहसम्बन्ध गुणांक का प्रयोग करेंगे, जिसका सूत्र है

$$r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6 \sum D^2}{N(N^2 - 1)},$$

जिसमें D दो श्रेणियों में युग्मित मंदों के बीच कोटि के अन्तर का उल्लेख करता है। मारणी 19.5 में यह देखा जायेगा कि घनात्मक अन्तरों का योग ऋणात्मक अन्तरों के योग के बराबर है और इसलिए व्यवकलनों की यथार्थता पर एक नियन्त्रण प्रदान करता है। सूत्र में मूल्यों का प्रतिस्थापन करने से, हमारे पास

$$r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6(18)}{10(100 - 1)} = +0.9$$

आता है। सूत्र इस अवस्था में महसम्बन्ध के गुणांक का चिह्न घनात्मक देता है। जब कभी कोटि में कोई बराबरी हो तो दो या अधिक अवस्थाओं को विभिन्न सदों में बांट लेना चाहिए। इस प्रकार यदि ड्यूक और पश्चिमी टेक्सास यू० पी० कांटियो में द्वितीय तथा तृतीय के लिए बराबरी कर तो प्रत्येक की कोटि 2.5 होगी जबकि यदि ड्यूक पश्चिमी टेक्सास और प्राविडस द्वितीय तृतीय और चतुर्थ के लिए बराबर होते तो प्रत्येक 3 की कोटि प्राप्त कर लेता है¹⁹

युग्मिन मूल्यों के लिए r का शास्त्र परिवर्तन करने के लिए मूल्यों की दो युग्मित श्रेणियाँ कई बार कोटियाँ में बदली जाती हैं और r_{rank} का परिवर्तन किया जाता है।

सारणी 195

कोटिवद्ध आंकड़ों के सहसम्बन्ध के लिए मूल्यों का परिकलन दो समाचार सेवाओं के द्वारा वास्तिक बाल टीम की कोटियाँ 14 फरवरी 1966

टीम	कोटि		कोटि में अंतर D स्तम्भ (2) - स्तम्भ (3)		D
	UPI	AP	+	-	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
कटकी	1	1			
ड्यूक	2	2			
पश्चिमी टेक्सास	3	3			
प्राविडस	4	6		2	4
नोमोला (शिकागो)	5	4	1		1
सट जामेस (पेना)	6	8		2	4
कामस	7	7			
वाडरब्रिस्ट	8	5	3		9
नेबरास्का	9	9			
मिशिगन	10	10			
योग			4	4	18

आंकड़ों में रिक्वाड हैबनम एन० ज० 15 फरवरी 1966 पृष्ठ 33 में।

छेदाहरणार्थ कोई व्यक्ति असमाप्तन लाग विवट सत्र मदान में सड़ होन वाला को उनके बन् लगाने की औमता के अनुमार और उनके क्षण रक्षण अभिलेख के अनुमार वाटिवद्ध कर मक्ता है

19 विभाग के लिए ड्यूक एन० एल० टलर द्वारा विधिवत करेक्टिव रि एक्टोज रर कोरिगेन कोरिज्जिड पोर टांग इन ररिग्न जगनल आफ रि अमरिकन स्टैटिस्मिकन एमानिशन पन्थ 59 क्रमांक 307 सितम्बर 1964 पृष्ठ 872-880 द्वाए।

और कोटियों के इन दो समुच्चयों का सहसम्बन्ध कर सकता है। जबकि r_{rank} का परिकलन r से अधिक शीघ्रता से हो सकता है तो भी कुछ समय हमेशा आँकड़ों को कोटिबद्ध करने में लगाना चाहिए। साथ ही यह स्मरण रखना अच्छा है कि यदि कोई उपस्थित सहसम्बन्ध की मात्रा का स्थूल आकलन करना चाहता है तो इसे मौलिक मूल्यों के प्रकीर्ण भारेल से प्राप्त किया जा सकता है।

कोटि विधि सामान्य विधि जमी परिशुद्ध न होने का कारण यह है कि आँकड़ों से सम्बन्धित सभी जानकारी का प्रयोग नहीं किया जाता। इस प्रकार एक श्रेणी में मर्दों के मूल्यों के प्रथम छतर परिमाण के क्रम में प्रायः कदापि स्थिर नहीं होते, प्रायः ये अन्तर सारणी के मध्य तक और छोटे हो जाते हैं। यदि ऐसे प्रथम अन्तर स्थिर हो तब r और r_{rank} समरूप परिणाम प्रदान करेंगे²⁰ तो भी यदि मूल्यों को प्रसामान्य रूप से विभक्त किया गया हो तो r_{rank} पर एक शोधन लागू किया जा सकता है जो वही परिणाम प्रस्तुत करेगा जो कि r को प्रत्यक्ष रूप से परिकलित करने से प्राप्त होगा। ये शोधन हमेशा सहसम्बन्ध को बढ़ाने का कार्य करने है तो भी यह बहुत छोटे है, और किसी भी अवस्था में सहसम्बन्ध को 0.02 से अधिक नहीं बढ़ाते। इसके अतिरिक्त, शोधन हमेशा उचित नहीं होता। वर्तमान उदाहरण में हमारे पास (सम्भवतः) प्रसामान्य बटना के केवल ऊपरी सिरे है। यदि आँकड़ों को भारेलित किया जाए तो वे जस्टे-J बटनों के रूप में दृष्टिगोचर होंगे।

2 × 2 सारणियों में आँकड़ों का सहसम्बन्ध

प्रायः ऐसे आँकड़े सम्मुख आते हैं जो प्रत्येक प्रशासक पर युग्मशास्त्रीय वर्गीकरण से होते हैं। कई बार इस प्रकार की 2 × 2 सारणी के लिए सहसम्बन्ध गुणांक वांछित²¹ हो सकता है।

सारणी 19.6 में एक राज्य विश्वविद्यालय के एक विभाग में 36 अध्यापकों के शैक्षिक कार्य तथा शैक्षिक कोटि के आँकड़ों को दिखाया गया है। जैसा कि सारणी 19.6 के आँकड़ों द्वारा दिखाया गया है क्या शैक्षिक कोटि और शैक्षिक कार्य में सहसम्बन्ध है?

2 × 2 सारणी के लिए सहसम्बन्ध गुणांक प्राप्त करने की एक विधि में गुणन-फल घुण सूत्र का प्रयोग निहित है। यदि हम 2 × 2 सारणी में मूल्यों को इस प्रकार रखते हैं

a_1	b_1	$a_1 + b_1$
a_2	b_2	$a_2 + b_2$
$a_1 + a_2$	$b_1 + b_2$	N

20. प्रमाण के लिए देखिए परिशिष्ट घ, परिच्छेद 19.5।

21. सारणी 25.6 एक 2 × 2 सारणी है जिसके लिए सहसम्बन्ध गुणांक वांछित नहीं था। तथापि अध्याय 25 में वर्णित कार्द-वैन विवेचन को सारणी 19.6 के आँकड़ों पर लागू किया जा सकता था।

तो यह दिखाया²² जा सकता है कि गुणनफल घूर्णन सूत्र बन जाता है

$$r = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sqrt{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}}$$

सारणी 19 6 के लिए हम

$$r = \frac{(10)(13) - (5)(8)}{\sqrt{(16)(18)(15)(21)}} = \frac{130 - 40}{\sqrt{102060}} = \frac{90}{319.5} = +0.282$$

प्राप्त करते हैं। जब तक कि दो द्विभाजनों की इस प्रकार से व्यवस्था नहीं की जाती जैसे कि सारणी 19 5 में है या जब तक दोनों द्विभाजनों को उलट नहीं दिया जाता तब तक यह व्यंजक r के लिए अर्थपूर्ण चिह्न प्रस्तुत नहीं करेगा, केवल एक को उलटने से चिह्न बदल जाता है।

सारणी 19 6

एक राज्य विश्वविद्यालय के एक विभाग में 36 अध्यापकों का शैक्षिक कार्य तथा शैक्षिक कोटि

शैक्षिक कोटि	शैक्षिक वाय		योग
	उच्च	निम्न	
उच्च	10	8	18
निम्न	5	13	18
योग	15	21	36

शैक्षिक पद पूर्ण प्रोफेसर्स के लिए उच्च या और भय सर्वा दर्जा के लिए "निम्न"। गतिविधियों जैसे कि निष्ठाई गई पुस्तकें, लिखे गए लेख पद गए पेपर आदि की संख्या में से प्रत्येक के लिए बिन्दुओं की एक प्रणाली द्वारा शैक्षिक कार्य को मापा गया था।

2 × 2 सारणी में आंकड़ों के सहसम्बन्ध की एक अन्य विधि में, माय वर्ग आकस्मिकता के गुणांक C का परिकलन सम्मिलित है। इसका परिकलन निम्न व्यंजक²³ से करते हैं

$$C = \sqrt{\frac{(a_1 b_1 - b_1 a_2)}{[(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)] + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2}}$$

22 ऊपर दिया गया सूत्र, जी० बी० यूल तथा एम० ग्री० कडाल द्वारा लिखित एन इंट्रोडक्शन टु दि थ्योरी ऑफ स्टैटिस्टिक्स, 12वां संस्करण, सांख्यिकीय चाला प्रिन्सिप एंड को०, लन्दन, 1940 पृष्ठ 252—253 में विकसित व्यंजक के अर्थ के सरलीकरण का परिणाम है। विकास यह कल्पना करता है कि प्रत्येक चर के लिए केवल दो मूल्य सम्भव हैं। यह सारणी 25 6 में दोनों चरों के लिए सत्य है। सारणी 19 6 में यह शैक्षिक कोटि के लिए सत्य है क्योंकि दो वर्गों को "पूर्ण प्रोफेसर" तथा "अपूर्ण प्रोफेसर" के रूप में मोटा जा सकता है। यह शैक्षिक कार्य के लिए सत्य नहीं है। 2 × 2 सारणियों के विस्तृत वर्णन के लिए एम० जी० ब्रडम तथा ए० स्ट्रॉट द्वारा लिखित दि एडवांस्ड थ्योरी ऑफ स्टैटिस्टिक्स, खण्ड 2, इफ्स एण्ड रिलेशनशिप, चाला प्रिन्सिप एंड को०, लन्दन, 1961, अध्याय 23, एन० सेक० दसवां।

23 यह सामान्य व्यंजक

$$C = \sqrt{\frac{r^2}{N + r^2}}$$

का एक समोद्यन है, जो 2 × 2 सारणियों के लिए r^2 के परिकलन को अनावश्यक बना देता है। कश्चर्यों का वर्णन अध्याय 25 में दिया गया है। 2 × 2 से बड़ी सारणियों के लिए सामान्य व्यंजक का प्रयोग किया जाएगा।

जो हमारे उदाहरण के लिए हमें

$$C = \sqrt{\frac{[(10)(13) - (5)(8)]^2}{[(18)(18)(15)(21)] + [(10)(13) - (5)(8)]^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{8,100}{102,000 + 8,100}} = \sqrt{0.073529} = 0.271$$

प्रदान करता है।

परिकलन C के लिए स्वचालित ढग से चिह्न प्रदान नहीं करते, परन्तु ग्राफ़िडो के परीक्षण से प्रायः चिह्न प्राप्त किया जा सकता है। इस अवस्था में यह घनात्मक होगा।

माध्य ढग आकस्मिकता के गुणांक का एक लाभ यह है कि इसका प्रयोग 2×2 सारणियों तक सीमित नहीं है। इसका प्रयोग बड़ी सारणियों के लिए किया जा सकता है, C के लिए सून वही है जो पादटिप्पणी 23 में दिया हुआ है।

C की एक हानि यह तथ्य है कि C का अधिकतम मूल्य 1.0 नहीं है। इसका उच्चतम मूल्य 1.0 से कम है, उदाहरण के लिए यह 2×2 सारणी के लिए 0.707, 3×3 सारणी के लिए 0.816, और 10×10 सारणी के लिए 0.949 है। एक एनी सारणी के लिए जिसमें स्तम्भों को मथ्या उतनी ही है जितनी कि पक्तियों की, C के उच्चतम मूल्य को इस प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है

$$\sqrt{\frac{\text{स्तम्भों (या पक्तियों) की संख्या} - 1}{\text{स्तम्भों (या पक्तियों) की संख्या}}}$$

C की इस कमी के लिए संशोधन किए जा सकते हैं, परन्तु ये पूर्णरूपेण सतोपजनक नहीं हैं।

2×2 सारणियों में ग्राफ़िडो का सहसम्बन्ध करने के लिए विभिन्न अन्य विधियाँ उपलब्ध हैं।²⁴ इनमें से ये हैं चतुष्कोटिक सहसम्बन्ध, असमान चिह्नों की विधि कोटिग्या r विधि, तथा सगामी विचलनों की विधि।

24 उदाहरणार्थ, बडान तथा स्टुबट द्वारा लिखित ऊपर निर्दिष्ट पुस्तक का अध्याय 26 देखिए, अग्रेजी पुस्तक के प्रथम संस्करण के पृष्ठ 688—689 देखिए।

सहसम्बन्ध II द्वि-चर अरेखिक सहसम्बन्ध

पिछले अध्याय में दो चरों स्वतन्त्र चर में एक इकाई वृद्धि से सम्बद्ध आश्रित चर में वृद्धि की स्थिर मात्रा, के बीच सरलतम प्रकार के सम्बन्धों पर विचार किया गया था। तथापि रेखिक कल्पनाएँ सदैव सन्तोषजनक नहीं होती। वृक्षा के ऊँचाई विकास तथा व्यास विकास के आँकड़ों का, चाट 195 में प्रदर्शित, रेखिक आकलन समीकरण द्वारा उचित रूप से वर्णन किया गया था। जैसा कि चाट 201 में देखा जा सकता है जो सारणी 201 के आँकड़ों को उपस्थित करता है, वृक्षों के आयतन तथा व्यास में रेखिक सम्बन्ध नहीं है। जैसाकि सारणी में देखा गया था, आयतन एक वृक्ष में लकड़ी के तख्तों की फुट सरप्या के दसव भाग का प्रतिनिधित्व करने है। अरिजोना में कोकोनिनो नेशनल फारेस्ट से ट्री मैजरेमेंट बुक से पोपरोमा देवदार वृक्षों के लिये आयतन के बीस जोड़ा को मादृच्छिक रूप से चुना गया है।

बहुपद

द्वितीयांश वक्र—व्यास तथा आयतन में सम्बन्ध का वर्णन करने के लिये पहले हम

$$Y_1 = a + bX + cX^2$$

प्रकार के आकलन समीकरण का प्रयोग करेंगे और फिर अपने परिणामों की उन परिणामों से तुलना करेंगे जो सरल रेखा प्रयुक्त करने से प्राप्त हुए थे। व्यापारिक आँकड़ों के एक भिन्न समूह के लिये

$$Y_2 = a + bX + cX^2 + dX^3$$

प्रकार के आकलन समीकरण का विचार करेंगे हम पाडरोसा देवदार वृक्षों के व्यास तथा आयतन के आँकड़ों पर आएँगे और उन आँकड़ों के कई सम्भव स्पातरणों का परीक्षण करेंगे।

द्वितीयांश वक्र के लिये तीन प्रसामान्य समीकरणों की आवश्यकता होती है। वे

$$I \quad \Sigma Y = Na + b\Sigma X + c\Sigma X^2,$$

$$II \quad \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3,$$

$$III \quad \Sigma X^2 Y = a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4$$

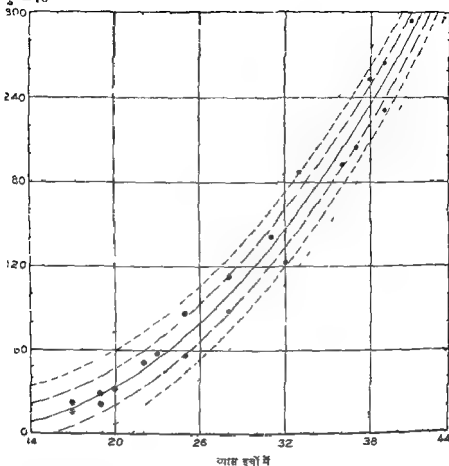
हैं। सारणी 201 में प्राप्त मूल्यों का प्रतिस्थापन करने से, हम प्राप्त करते हैं

$$I. \quad 2,460 = 20a + 569b + 17,437c,$$

$$II \quad 83,777 = 569a + 17,437b + 567,749c,$$

$$III \quad 2,949,733 = 17,437a + 567,749b + 19,361,917c$$

आयतन को

 $V = 10$ 

चार्ट 20 1 बीस पोडरोसा देवदार वृक्षों का व्यास तथा आयतन और ± 1 ± 2 और ± 3 आकलन का मानक त्रुटियों के क्षत्रों के साथ द्वितीयक आकलन समीकरण। सारणी 20 1 के आकड़ों का आकलन समीकरण मोटी रेखा से दिखाया है।

a , b , तथा c के मूल्यों को प्राप्त करने के लिये, इन तीन समीकरणों को एक साथ हल करना आवश्यक है। तीन युगपत् समीकरणों को हल करने की एक प्रविधि का वर्णन करने में पहले हम सामान्य रूप से प्रत्येक पग का विवरण देंगे और फिर इन समस्या के लिये विशिष्ट त्रिया का सकेत करगें। पग हैं।

- 1 प्रामाण्य समीकरण I का ऐसी सरवा से गुणा करो कि एक अज्ञात का गुणांक वंसा ही बन जाए जैसा कि प्रसामान्य समीकरण II में उसी अज्ञात का गुणांक। हमारे आँकड़ों के लिये

$$(I \times 28.45) \quad 69,987 = 569a + 16,188.05b + 496,082.65c$$

प्राप्त करने के लिये प्रसामान्य समीकरण I को $\Sigma X - N = 28.45$ से गुणा किया जाता है।

सारणी 20.1

बीस पैंडरोसा देवदार वृक्षों के व्यास तथा आयतन के लिये सरल-रेखा तथा द्वितीयश बक् पर आघारित सम्बन्ध के मापों का निर्धारण करने के लिये प्रयुक्त मूल्यों का परिकलन

द्विती तक की ऊँचाई पर व्यास (इंचों में)	आयतन* (बॉर्ड फुट—10)	X^2	X^3	X^4	Y^2
X	Y				
36	192	6,912	248,832	1,296	46,656
28	113	3,164	88,592	784	21,952
28	88	2,464	68,912	784	21,952
41	294	12,054	494,214	1,681	68,921
19	28	532	10,108	361	6,859
32	123	3,936	125,952	1,024	32,768
22	51	1,122	24,684	484	10,648
38	252	9,576	363,888	1,444	54,872
25	56	1,400	35,000	625	15,625
17	16	272	4,624	289	4,913
31	141	4,371	135,501	961	29,791
20	32	640	12,800	400	8,000
25	86	2,150	53,750	625	15,625
19	21	399	7,581	361	6,859
39	231	9,009	351,351	1,521	59,319
33	187	6,171	203,643	1,089	35,937
17	22	374	6,358	289	4,913
37	205	7,585	280,645	1,369	50,653
23	57	1,311	30,153	529	12,167
39	265	10,335	403,065	1,521	59,319
Σ	2,460	83,777	2,949,733	17,437	567,749

* आयतन 'विनवर दशमलव C नियम द्वारा निश्चित किया गया था। जिसका बगन बी० न्यू तथा एफ० ऐक्स० शुमेकर द्वारा निश्चित पेरिस्ट मेन्स्यूरेशन, वीक था हिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क, पृष्ठ 159—163 में किया गया है।

अंकित मधुसूत राज्य अमरीका के वृषि विभाग की पेरिस्ट सचिव व सौजन्य से प्राप्त। जर् अरिजोना में कोकोनिना नेशनल फोरम से द्रो मैडरफेल्ड बुक से सादृष्ट प्रदर्शित है।

- 2 समीकरण A प्राप्त करने के लिये, जिसमें दो अज्ञात हों समीकरण II से सहोपित समीकरण I को घटाया या सहोपित समीकरण I से समीकरण II को घटाया। वर्तमान समस्या के लिये, समीकरण A में केवल b और c होंगे।

$$II \quad 83,777 = 569a + 17,437b + 567,749c$$

$$(I \times 28.45). \quad 69,987 = 569a + 16,188.05b + 496,082.65c$$

$$A \quad 13,790 = 1,248.95b + 71,666.35c.$$

- 3 प्रसामान्य समीकरण II को ऐसी संख्या से गुणा करो कि अज्ञात का गुणांक जो समीकरण A में नहीं है, समीकरण II में वही बन जाए जो प्रसामान्य समीकरण III में है। अपनी समस्या में हम प्रसामान्य समीकरण II को $\Sigma X - \Sigma Y = 30\ 644\ 991$ से गुणा करते हैं। और

$$(II \times 30\ 644\ 991)$$

$$2\ 567\ 345\ 411 = 17\ 437a + 534,356\ 708b + 17,398,662\ 995c$$

प्राप्त करते हैं,

- 4 समीकरण B को प्राप्त करने के लिये, जिसमें वही दो अज्ञात होंगे जो समीकरण A में हैं, समीकरण III में से सशोधित समीकरण II को घटाओ या सशोधित समीकरण II में से समीकरण III को घटाओ। हमारे आंकड़ों के लिये हमारे पास है

$$III \quad 2\ 949\ 733 = 17\ 437a + 567\ 749b + 19,361,917c$$

$$(II \times 30\ 644\ 991)$$

$$2\ 567\ 345\ 411 = 17,437a + 534,356\ 708b + 17,398,662\ 995c$$

$$II \quad 382\ 387\ 589 = 33,392\ 292b + 1,963,254\ 005c$$

- 5 समीकरण A तथा B में दा स्तिराको के मूल्यों को प्राप्त करने के लिये उन समीकरणों को युग्मस् रूप में हल करो (प्रविधि का वर्णन पृष्ठ 236—237 पर किया गया था)। वृक्षों के आयतन तथा व्यास के आंकड़ों के लिये ऐसा करने से

$$b = -5\ 620\ 315,$$

$$c = +0\ 290\ 3663$$

प्राप्त होता है।

- 6 उस अज्ञात के मूल्य को प्राप्त करने के लिये जो A तथा B समीकरणों में नहीं था, पग 5 में परिकलित मूल्यों को, प्रसामान्य समीकरणों में से किसी एक में प्रतिस्थापित करो। I का प्रयोग करके हम

$$2,460 = 20a + (569)(-5\ 620\ 315) + (17,437)(0.290\ 3663)$$

$$20a = 594\ 842,$$

$$a = 29\ 7421$$

प्राप्त करते हैं।

- 7 पट्टाल के तौर पर पग 5 और 6 में प्राप्त मूल्यों को, पग 6 में अप्रयुक्त एक प्रसामान्य समीकरण में प्रतिस्थापित करो। समीकरण II का प्रयोग

$$83,777 = (569)(29\ 7421) - (17,437)(-5\ 620\ 315) + (567,749)(0.290\ 3663),$$

$$= 83,776\ 9987$$

प्रदान करता है।

व्याम में वृक्ष आयतन का आकलन करने के लिए द्वितीयार्थ समीकरण है।

$$Y_c = 29.7 - 5.62X + 0.2904X^2$$

इस समीकरण को एक मोटी रेखा द्वारा चाट 20 I पर दिखाया गया है। प्रकीर्ण आरेख तथा आकलन समीकरण की उपस्थिति के कारण पाठक विस्मित हो सकता है

कि b का ऋणात्मक चिह्न है। कारण यह है कि चार्ट 20.1 वक्र का केवल एक भाग दिखाता है। यदि चार्ट शून्य पर प्रारम्भ होने वाले समस्तर पैमाने के साथ पुन बनाया जाता तो आकलन समीकरण मोटे रूप में U-आकार का दिखाई देता।

30 इंच के व्यास वाले वृक्ष के लिये, आकलित आयतन होगा

$$Y_c = 29.7 - (5.62)(30) + (0.2904)(30)^2, \\ = 122.1 \text{ बोर्ड फुट के दशक।}$$

जो व्यक्त रेखिक सहसम्बन्ध के लिए प्रयोग किया गया था, उसी के द्वारा कुल विचरण का परिकलन किया गया है,

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \bar{Y} \Sigma Y, \\ = 462,278 - (123)(2,460) = 159,698.$$

क्योंकि हमारे पास a , b , तथा c के मूल्य हैं, अतः हम व्याख्यात विचरण को ज्ञात कर सकते हैं, जो

$$\Sigma y_{r \cdot 1X} = a \Sigma Y + b \Sigma XY + c \Sigma Y^2 - \bar{Y} \Sigma Y, \\ = (29.7421)(2,460) + (-5.620315)(83,777) \\ + (0.2903663)(2,949,733) \\ - (123)(2,460), \\ = 156,235.5$$

है।¹

अब हम उसी प्रकार से जैसा कि रेखिक सहसम्बन्ध के लिये है, $\Sigma y_{r \cdot 1X}^2$ को प्राप्त कर सकते हैं

$$\Sigma y_{r \cdot 1X}^2 = \Sigma y^2 - \Sigma y_{c \cdot 1X}^2, \\ = 159,698 - 156,235.5 = 3,462.5$$

आकलन की मानक त्रुटि है

$$s_{Y \cdot 1X} = \sqrt{\frac{\Sigma y_{r \cdot 1X}^2}{N}}, \\ = \sqrt{\frac{3,462.5}{20}} = 13.2 \text{ बोर्ड फुट दशक।}$$

आकलन समीकरण के चारों ओर ± 1.2 तथा $3s_{Y \cdot 1X}^2$ के क्षेत्रों को खचित रेखाओं द्वारा चार्ट 20.1 में दिखाया गया है। आयतन के अनुमानों की जैसा कि 30 इंच के व्यास वाले वृक्ष के लिये बनाए गए थे, ± 13.2 लिखा जा सकता है।

पहले की भाँति, निर्धारण का गुणांक कुल विचरण के साथ व्याख्यात विचरण का अनुपात है।

$$r_{1X}^2 = \frac{\Sigma y_{c \cdot 1X}^2}{\Sigma y^2}, \\ = \frac{156,235.5}{159,698} = 0.978.$$

1. $Y \cdot 1X^2$ एक कुछ भ्रष्ट पादांक है, परन्तु यह इस बात की पूर्णतया स्पष्ट रूप से इंगित करता है कि हम आश्रित चर की प्रथम तथा द्वितीय शक्तियों का प्रयोग करके आकलन समीकरण के सम्बन्ध में परिकल्पित मापों का वर्णन कर रहे हैं।

सहसम्बन्ध का गुणांक इस अंक का वर्गमूल्य है, परन्तु इसका कोई चिह्न नहीं है। चिह्न के

$$r_{Y \text{ XX}} = 0.989,$$

अभाव का कारण यह है कि जब आकलन समीकरण वक्र रेखीय है, तो समीकरण के एक भाग में दो चरों का सम्बन्ध घनात्मक हो सकता है परन्तु दूसरे भाग में ऋणात्मक।

परिणामों की उन परिणामों से तुलना जो कि सरल रेखा के प्रयोग से प्राप्त हुए हैं—
चार्ट 201 के स्वरूप से, यह पूर्णतया स्पष्ट है कि फेडरोसा देवदार वृक्षों के व्यास तथा आयतन के बीच सम्बन्ध अरेखिक है, और हम अध्याय 26 में देखेंगे कि द्वितीयांश वक्र के प्रयोग से उत्पन्न सहसम्बन्ध, सरलरेखा पर आधारित सहसम्बन्ध से पर्याप्त ऊँचा है। हम समय, अभी-अभी प्राप्त परिणामों की साँधी रेखा सम्बन्ध के परिणामों के साथ केवल तुलना करने में हमारी रुचि है। सारणी 201 से उचित योगों तथा N का प्रयोग करके प्रसामान्य समीकरणों

$$\text{I. } \Sigma Y = Na + b\Sigma X \text{ तथा}$$

$$\text{II } \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

का हल प्रदान करता है

$$a = -191.124274 \text{ तथा}$$

$$b = 11.041275$$

सरल रेखा आकलन समीकरण $Y_c = -191.1 + 11.04X$ है। इस समीकरण को, गहरी रेखा द्वारा, चार्ट 202 पर दिखाया गया है, और यह स्पष्ट है कि सरल रेखा सम्बन्ध का सन्तोषजनक विवरण नहीं है।

सरल रेखा से, व्याख्यात विचरण है।

$$\begin{aligned} \Sigma y_c^2 &= a\Sigma Y + b\Sigma XY - \bar{Y}\Sigma Y, \\ &= (-191.124274)(2,460) + (11.041275)(83,777) - (123)(2,460), \\ &= 152,259.2 \end{aligned}$$

कुल विचरण है

$$\begin{aligned} \Sigma y^2 &= \Sigma Y^2 - \bar{Y}\Sigma Y, \\ &= 462,278 - (123)(2,460) = 159,698, \end{aligned}$$

जो वही है जैसा कि द्वितीयांश वक्र के लिये है, तथा

$$\begin{aligned} \Sigma y_c^2 &= \Sigma y^2 - \Sigma y^2, \\ &= 159,698 - 152,259.2 = 7,438.8 \end{aligned}$$

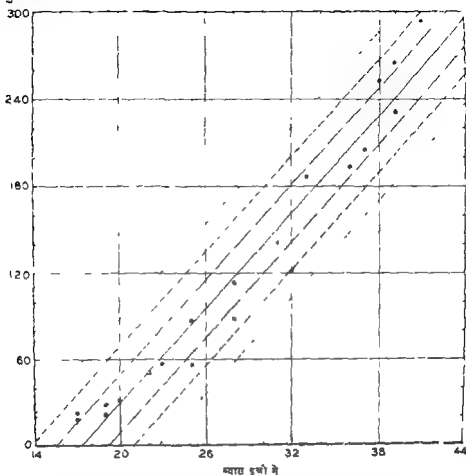
आकलन की मानक त्रुटि है

$$\begin{aligned} s_{Y \text{ c}} &= \sqrt{\frac{\Sigma y_c^2}{N}} \\ &= \sqrt{\frac{7,438.8}{20}} \\ &= 19.3 \text{ बोर्ड फुट दशक,} \end{aligned}$$

जो निश्चिन्त रूप से उस मूल्य से, जो कि उस समय प्राप्त हुआ था जब द्वितीयांश वक्र का प्रयोग किया गया था, बड़ा मूल्य है। $\pm 1, 2$, तथा $3s_{Y \text{ c}}$ के क्षेत्रों को चार्ट 202 पर खण्डित रेखाओं द्वारा दिखाया गया है।

आयतन बोर्ड

फुट - 10



चार्ट 20.2 बीस पोडरोसा देवदार वृक्षों का व्यास तथा आयतन और आकलन की मानक त्रुटि ± 1 , ± 2 तथा ± 3 के क्षेत्रों के साथ सरल रेखा आकलन समीकरण। सारणी 20.1 के आकड़े। आकलन समीकरण को पहली रेखा द्वारा दिखाया गया है।

जैसा प्रत्याशित था, निर्धारण तथा सहसम्बन्ध के रैखिक गुणांक उनसे छोटे² हैं जो कि द्वितीयांश वन पर आधारित हैं।

2 एक माप को स्थापित करना सरल है

$$r^2_{YX} = 1 - \frac{\sum(Y - \hat{Y})^2}{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}}$$

जो, (1) Y के प्रयोग के कारण व्याख्यात विचरण में वृद्धि को (2) अकेले X के प्रयोग द्वारा व्याख्यात विचरण की मात्रा के अनुपात के रूप में व्यक्त करती है। ऊपर के व्यंजक के अंश तथा हर को $\sum Y^2$ से भाग करके हम

$$r^2_{YX} = 1 - \frac{r^2_{YX} - r^2}{1 - r^2}$$

निष्पत्ति की अनुमति मिल जाती है। यह माप अगामी अध्याय में वर्णित आंशिक निर्धारण गुणांक के पूर्णतया समान है। इसका पुन अध्याय 26 में उल्लेख किया जाएगा जब हम यह निश्चय करेंगे कि क्या निर्धारण का अरेखिक गुणांक रैखिक गुणांक से प्योन बड़ा है।

वे हैं :

$$r^2 = \frac{\sum y^2}{\sum y^2} = \frac{152,259.2}{159,698} = 0.953,$$

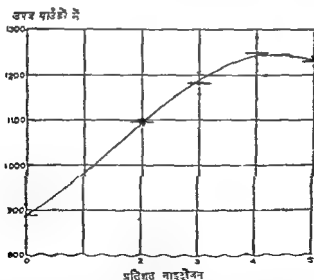
और

$$r = +0.976$$

तृतीयान्न वक्र—तृतीयान्न वक्र, तथा प्रतिफल सयोगवक्र, उमागत ह्रास नियम के भी उदाहरण के रूप में हम उन आकटों का प्रयोग करेंगे जो टिफ्टन, जाजिया में नाइट्रोजन खाद तथा नम्बाक् उत्पादन के प्रयोगों से प्राप्त किये गये हैं। पाँच विभिन्न खेतों में एक सहज पाउण्ड खाद प्रति एकड़ की दर से डाली गई। सक्रिय उपादानों में से फास्फोरिक अम्ल तथा पोटाश को क्रमशः 8 तथा 5 प्रतिशत पर स्थिर रखा गया, तथा नाइट्रोजन को निम्न प्रकार से बदला गन्ना, 2 प्रतिशत, 3 प्रतिशत, 4 प्रतिशत, 5 प्रतिशत। सम्भवतः प्रयोग इस प्रकार से किया गया कि खेतों के बीच उत्पादन में अन्तर, भूमि उर्वरता, नालियों, तथा दूरी प्रकार के अन्य तत्वों का कारण नहीं थे। तीन विभिन्न वर्षों में प्रयोग को दोहराया गया। कुल विधरण में से, उपयोग की गई नाइट्रोजन की बदलती हुई मात्रा से किम अनुपात का बणन किया जा सकता है? जबकि ऐसा सम्भव है कि प्रयोग पूर्ण रूप से अभिकल्पित नहीं था आकटों लगभग पूर्ण सहसम्बन्ध का संकेत करते हैं जब

$$Y_c = a - bX + cX^2 + dY^2$$

प्रकार के सम्बन्ध की कल्पना की जाती है। इनकी प्रकीर्ण श्रारेख, चार्ट 20.3, के परीक्षण द्वारा स्पष्ट रूप से पटनाल की जा सकती है। भारी क्षैतिज रेखाएँ प्रत्येक नाइट्रोजन की प्रतिशतताओं के औसत उत्पादन हैं, जिन्हें दिया गया है। ये माधन समस्या के समाधान



चार्ट 20.3. टिफ्टन, जाजिया में खाद में प्रतिशत नाइट्रोजन तथा तम्बाकू का प्रति एकड़ उत्पादन। गारणी 20.2 के आंकड़े। सक्रिय रेखाएँ नाइट्रोजन की प्रत्येक प्रतिशतता के लिए प्रति एकड़ औसत उत्पादन को प्रदर्शित करती हैं, जबकि वक्र तृतीयान्न समीकरण से परिकल्पित मूल्यों को प्रस्तुत करता है।

क लिए आवश्यक नहीं हैं, परन्तु ये आसजिन किए जाने वाले वन के प्रकार की छाज करने में उपयोगी हैं।

प्रसामान्य समीकरणों का हल—क्याकि चार स्थिरांकों का अवश्य पाना है, अनन्तिम प्रकार के चार प्रसामान्य समीकरणों का प्रयोग आवश्यक है³

$$I \quad \Sigma X = \Sigma a + b \Sigma X + c \Sigma X^2 + d \Sigma X^3,$$

$$II \quad \Sigma Y = a \Sigma X + b \Sigma Y + c \Sigma X^2 + d \Sigma X^3,$$

$$III \quad \Sigma X^2 = a \Sigma X + b \Sigma X^2 + c \Sigma X^3 + d \Sigma X^4,$$

$$IV \quad \Sigma X^3 = a \Sigma X^2 + b \Sigma X^3 + c \Sigma X^4 + d \Sigma X^5$$

अभीष्ट मूल्यों का वारंती 20 में परिकल्पित किया गया है, और उनके प्रतिस्थापनों का फल है निम्न चार प्रसामान्य समीकरण

$$I \quad 169.4 = 15a + 42b + 162c + 672d$$

$$II \quad 106.0 = 42a + 162b + 672c + 2934d,$$

$$III \quad 197.198 = 162a + 672b + 2934c + 13272d,$$

$$IV \quad 822.884 = 672a + 2934b + 13272c + 61542d$$

अपनी पूर्वगामा पविधि का अनुसरण करके प्रत्येक स्थिति में a का निरमन करत हुए, हम I और II II और III III और IV, समीकरणों का इकट्ठा हल कर सकत हैं। इससे तीन समीकरण प्राप्त होत है

$$A \quad 48.772 = 666b + 276c + 1786d$$

$$B \quad 80.296 = 1980b + 14364c + 82116d$$

$$C \quad 790.172 = 2974b + 178416c + 1051020d$$

b का निरमन करत हुए अब हम A और B तथा फिर B और C को एक साथ हल कर सकत हैं। इस प्रकार समाकरण घटकर दो रह जात हैं

$$D \quad -42029064 = 3079944c + 23432976d$$

$$E \quad -339,492,584 = 12492144c + 132899616d$$

समीकरण D तथा E को युग्मत रूप में हल करके हम पान हैं कि

$$d = -44648847$$

तथा

$$c = 20323899$$

इन मूल्यों का समीकरण A B या C में प्रतिस्थापित करके हम मासूम होता है कि

$$b = 8263630$$

b, c और d के लिए प्राप्त मूल्यों को समीकरण I, II III या IV, में प्रतिस्थापित कर हम

$$a = 89032389$$

प्राप्त करते हैं।

3 यदि 1 प्रतिगत नाइट्रोजन के मान प्रयोग लिए होत हों मूलवस्तु आमतान X मूल्य Y माध्य (20) पर लिखा जा सकत था। तब X का विचल शक्तिशो का योगमूल्य हुआ होता और प्रसामान्य समीकरणों में बाधत हो गता हाना। अब हमारे पास युग्मत हल करने में निम्न प्रसामान्य समाकरण के दो ओर होत चाहिए

$$I \quad \Sigma X = \Sigma a + c \Sigma X^2$$

$$II \quad \Sigma Y = b \Sigma X^2 + d \Sigma X^4,$$

$$III \quad \Sigma X^2 = a \Sigma X + c \Sigma X^4$$

$$IV \quad \Sigma X^4 = b \Sigma X^4 + d \Sigma X^6$$

सारणी 20 2

टिपटन, जर्जिया में साब में प्रतिशत नाइट्रोजन तथा तापमान के प्रति एकड़ उत्पादन के बीच सम्बन्ध के मापों को प्राप्त करने के लिए

(साब प्रति एकड़ 1,000 पाउंड है, P_2O_5 तथा K_2O मगन 8 और 5 प्रतिशत है। सभी यंत्रों में वर्ष 2 में उपर्युक्त नामांकित रूप से 3 से 4 सेमी, परिमाणित वे लव गुणांक द्वारा रम कर दो गईं जिससे उत्तरी ओरव को वर्ष 1 और वर्ष 3 की औसत तरा घटा दिया।)

आवश्यक मूल्यों का परिचय

यंत्रों तथा तथा वर्ष	प्रतिशत नाइट्रोजन X	उपग्रह पाउंडों में Y	XY	X^2Y	Y^2X	X^2	X^3	X^4	X^5	Y^2
प्लॉट A:										
वर्ष 1	0	867	0	0	0	0	0	0	0	751,689
वर्ष 2	0	889	0	0	0	0	0	0	0	790,321
वर्ष 3	0	914	0	0	0	0	0	0	0	835,396
प्लॉट B:										
वर्ष 1	2	1,094	2,188	4,376	8,752	4	8	16	32	1,196,836
वर्ष 2	2	1,101	2,202	4,404	8,808	4	8	16	32	1,212,201
वर्ष 3	2	1,092	2,184	4,368	8,736	4	8	16	32	1,192,464
प्लॉट C:										
वर्ष 1	3	1,206	3,618	10,854	32,562	9	27	81	243	1,454,436
वर्ष 2	3	1,180	3,540	10,620	31,860	9	27	81	243	1,392,400
वर्ष 3	3	1,157	3,471	10,413	31,239	9	27	81	243	1,338,649
प्लॉट D:										
वर्ष 1	4	1,281	5,124	20,496	81,984	16	64	256	1,024	1,640,961
वर्ष 2	4	1,238	4,952	19,808	79,232	16	64	256	1,024	1,532,644
वर्ष 3	4	1,224	4,896	19,584	78,336	16	64	256	1,024	1,498,176
प्लॉट E:										
वर्ष 1	5	1,235	6,175	30,875	154,375	25	125	625	3,125	1,525,225
वर्ष 2	5	1,237	6,185	30,925	154,625	25	125	625	3,125	1,530,169
वर्ष 3	5	1,219	6,095	30,475	152,375	25	125	625	3,125	1,485,961
सं	42	16,934	50,630	197,198	822,884	162	672	2,534	18,272	19,371,528

आइने सम्बन्ध में ० स्थिति में द्वारा लिखित मूल्य ऑफ दि एक्स्प्लेनेशन ऑफ वॉरें इन फर्टिलाइजर एक्सपेरिमेंट्स, समुदाय राज्य अमेरिका में टिपटन के टिपटन से 348, पृष्ठ 16-17 से।

संकेत में X की प्रतिशतों का धारण करने वाले बीच सम्बन्ध नहीं है। इन सम्बन्धों को प्राप्त करने का सबसे अधिक तरीका यह है कि प्रथम पांच प्रोटॉनिक यंत्रों की अभीष्ट क्षमताओं के जोड़ा को जॉय करी, 1 घटाओ (कोई $X=1$ वर्ण है), और 3 से गुणा करें (क्यापि यह सीमा है)।

$$\bar{Y} = \frac{16,934}{42} = 1,28.933 \text{ पाउंड}$$

$$\begin{aligned}
 &= (890\ 32389)(16,934) + (78\ 263630)(50\ 630) \\
 &+ (20\ 323899)(197\ 198) + (-4\ 4648847)(822,884) \\
 &- (1,128\ 93333)(16,934), \\
 &= 255\ 624
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma y^2 &= \Sigma Y - \bar{Y} \Sigma Y, \\
 &= 19\ 377\ 528 - (1\ 128\ 93333)(16,934), \\
 &= 260\ 171
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma y^2, Y X^2, Y^2 &= \Sigma y - \Sigma y^2, Y X^2, Y^2, \\
 &= 260\ 171 - 255\ 624 = 4,547.
 \end{aligned}$$

इनसे हम प्राप्त करते हैं

$$\begin{aligned}
 r^2_{Y X^2, Y^2} &= \frac{\Sigma y^2 Y X^2, Y^2}{\Sigma y^2} \\
 &= \frac{255\ 624}{260\ 171} = 0.983
 \end{aligned}$$

$$r_{Y X^2, Y^2} = 0.991$$

$$\begin{aligned}
 s_{Y X^2, Y^2} &= \sqrt{\frac{\Sigma y^2 Y X^2, Y^2}{N}}, \\
 &= \sqrt{\frac{4\ 547}{15}} = 17.4 \text{ पाउंड}
 \end{aligned}$$

डूलिटल विधि—यह अवश्य स्वीकार किया जाना चाहिए कि जब चार समीकरणों का युग्मपत्र रूप से हल करना हो तो उपर्युक्त प्रविधि कुछ श्रम साध्य है। आगे, जब तक d का मूल्य प्राप्त नहीं किया जाता, तब तक कोई पड़ताल नहीं की जा सकती। c और d को प्राप्त करने के लिए आवश्यक दो समीकरणों (D और E) के हल के अतिरिक्त यह भी किसी कार्य की परिशुद्धता की जाँच नहीं करता। सारे के सारे पूर्वगामी श्रम को नुटियों से भर कर भी इन दो समीकरणों का हल एक जाता। जब तक सभी स्थिरांकों को प्राप्त नहीं कर लिया जाता तब तक चार प्रसामान्य समीकरणों के हल की परिशुद्धता पर हम कोई वास्तविक नियन्त्रण नहीं रख सकते। यदि अनिम नियन्त्रण असफल हो जाता है तो सारे कार्य को प्रबन्धमेव दोहराया जाना चाहिए।

सौभाग्य से इस प्रकार के समीकरणों को युग्मपत्र रूप से हल करने के लिए एक विधिवत तरीका है जो परिशुद्धता पर बहुधा नियन्त्रण प्रदान करता है और जब चार या चार से अधिक समीकरण हो तो पूर्व-वर्णित ढंग से कम श्रम साध्य है। एम० एच० डूलिटल द्वारा विकसित किए जाने के कारण यह विधि डूलिटल विधि के नाम से प्रसिद्ध है। सांख्यिकी शास्त्र में और बहुत सी श्रम बचाने वाली युक्तियों के समान यह विधि प्रारम्भ में बहुत आन्तिपूण दिखाई देती है। एक निश्चित सीमा तक आवृत्तिमूलक नीरम्य श्रम के लिए प्रविधि की जटिलता का प्रतिस्थापन है। अनेकधा सहसम्बन्ध समस्या में (अध्याय 21 देखिए) जब चार या अधिक

स्वतन्त्र चर हो तो युगपत् समीकरणों के हल के लिए हूलिटल विधि का प्रयोग विशेष रूप से परामर्श के योग्य है।

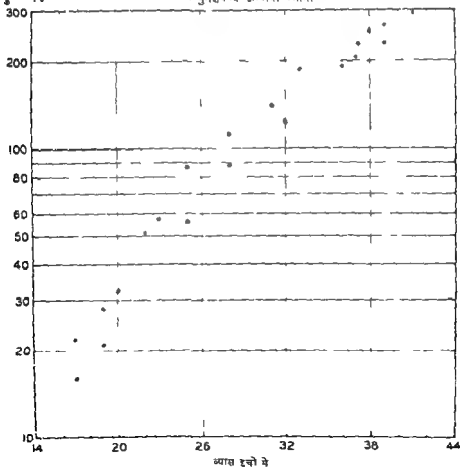
रूपांतरों का प्रयोग

आकलन समीकरण के रूप में, द्वितीयांश वक्र या इससे ऊँचे दर्जे के वक्र के प्रयोग की ओर हम एक या दोनों चरों के लिए पाठ्यांकों को एक विभिन्न रूप में बदल सकते हैं। सबसे अधिक प्रयुक्त रूपान्तरों के अन्तर्गत लघुगणक, व्युत्क्रम, मूल या शक्तियाँ तथा लघुगणकों के लघुगणक आते हैं। अधिकतर एक रूपान्तरण दो रूपान्तरित श्रेणियों के बीच रेखिक सम्बन्ध प्रदर्शित करेगा। व्यास के आंकड़ों तथा पोडरोसा देवदार वृक्षों के आयतन के लिए, जिसका हम अध्याय में पहले प्रयोग किया गया था हम लघुगणकों, मूलों तथा व्युत्क्रमों के प्रयोग पर विचार करेंगे। पहले हम रूपान्तरों का लेखाचित्रीय विधि से परीक्षण करेंगे। तत्पश्चात् उन रूपान्तरों के लिए आंकड़ों के सहसम्बन्ध का विश्लेषण किया

आयतन बीट

चार्ट-1C

लघुगणक आधार पैमाना



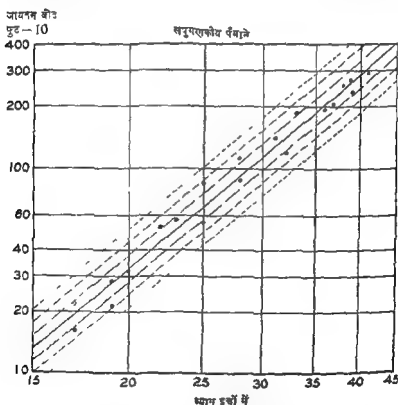
चार्ट 20-4 बीस पोडरोसा देवदार वृक्षों के व्यास तथा आयतन का एक अर्ध-लघुगणकीय ग्राह पर अंकन। सारणी 20-3 के आंकड़े।

जाएगा जो सर्वाधिक उचित दिखाई देते हैं। अन्य रूपान्तरों को केवल प्रतीकात्मक रूप में वर्णित किया जाएगा।

प्रारम्भिक परीक्षण—अध्याय 5 में अर्ध-लघुगुणकीय चार्ट के साथ अपने अनुभव के आधार पर, यह सोचना तर्कसंगत दिखाई देता है कि यदि लघुगुणकीय ऊर्ध्वाधर पमाने के साथ ग्रिड का प्रयोग करें तो चार्ट 20 I का प्रकीर्ण आरेख सीधा हो सकता है। इस परिस्थिति में हम

$$(\log Y)_c = \log a + X \log b$$

प्रकार^१ के आकलन समीकरण का प्रयोग करेंगे। इस प्रकार का प्रकीर्ण आरेख चार्ट 20 I में दिखाया गया है, और यह स्पष्ट है कि लघु Y तथा X के बीच का सम्बन्ध रेखिक नहीं है।



चार्ट 20 I बीज पोडरोसा देवदार वृक्षों का आयतन तथा व्यास और ± 1 , ± 2 , तथा ± 3 आकलन की मानक त्रुटियों के क्षेत्रों के साथ (लघु Y)_c = लघु $a + b$ लघु X प्रकार का आकलन समीकरण, लघुगुणकीय ग्रिड पर प्रदर्शित। सारणा 20 I के आकलन समीकरण को गहरी रेखा से दिखाया गया है।

5. यह स्पष्ट करने के लिए कि हम “ Y के परिकल्पित मूल्य के लघुगुणक” के साथ नहीं, बल्कि “लघु Y_c के परिकल्पित मूल्य” का वर्णन कर रहे हैं, लघु Y_c की अपेक्षा (लघु Y)_c विह्वल का प्रयोग किया जाता है। इसी प्रकार के कारणों से आये जाने वाले अनुच्छेदों में $\sqrt{Y_c}$ की अपेक्षा $(\sqrt{Y})_c$ का और $\frac{1}{Y_c}$ की अपेक्षा $\left(\frac{1}{Y}\right)_c$ का प्रयोग किया जाता है।

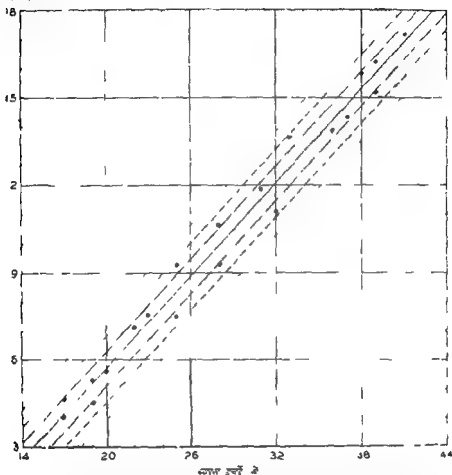
चाट 20 5 में एक ग्रिड पर जिसके दोनों ऊर्ध्वाधर तथा क्षैतिज लघुगणकीय पैमाने हैं, उन्ही आँकड़ों का अंकन किया गया है। इस रूपान्तर में

$$(\log Y)_e = \log a + b \log X$$

प्रकार के आकलन समीकरण के प्रयोग की आवश्यकता पड़ती है। चाट 20 5 का प्रकीर्ण आरेख यह सकेत करता है कि लघु Y तथा लघु X के बीच सम्बन्ध वस्तुतः रेखिक है।⁶

(आयतन $\times 10^3$)

का वर्गमूल



चार्ट 20 6, बीस पॉइरोसा देवदार वृक्षों के आयतन का व्यास और वर्गमूल तथा आकलन की ± 1 , ± 2 और ± 3 मानक त्रुटियों के क्षेत्रों के साथ, $(\sqrt{Y})_e = a + bX$ प्रकार का आकलन समीकरण जिसे एक अकण्वितग्रहीय ग्रिड पर दिखाया गया है। मारपी 20 4 के आंकड़ों का अंकन समीकरण की यही रेखा द्वारा दिखाया गया है। इस चाट के लिए एक वर्गमूल ऊर्ध्वाधर पैमाने का प्रयोग किया जा सकता था। वर्गमूल ऊर्ध्वाधर पैमाने तथा अकण्वितग्रहीय क्षैतिज पैमाने का प्रयोग करने वाला ग्रिड यहाँ प्रस्तुत नहीं किया गया क्योंकि पाठक को इस प्रकार का रखाविल पत्र एवम् प्राप्त नहीं है। समान अन्तराल वाले ऊर्ध्वाधर पैमाना मूल्य 0, 1, 4, 9, 16, 25, तथा इसी प्रकार आगे हो सकते हैं।

॥ रई बार $Y_e = a + bX$ तथा Y प्रकार का आकलन समीकरण समुचित होता है। विवरण के लिए द्र, एफ० ई० आकलन द्वारा लिखित एलिमेन्टरी स्टैटिस्टिक्स बिद एप्लिकेशन्स डन मंडिमिन एन्ड दि बायलाबिकल माडिमिन, शार प्रकाशन, इन्सर्सिटी, न्यूयार्क, 1959, पृष्ठ 152-157।

एक और रूपान्तर है जो सम्भवतः पूर्व परीक्षित दोनों से अधिक तर्कसंगत है। क्योंकि बेलन का आयतन प्रत्यक्ष रूप से इसकी लम्बाई तथा गोलाकार अनुप्रस्थ काट के वर्ग व्यास (या व्यास) के वर्ग से सम्बन्धित होता है, अतः यह तर्कसंगत दिखाई देगा कि ऐसे रूपान्तर का परीक्षण किया जाए जिसके अन्तर्गत \sqrt{Y} और X आते हों। वास्तव में वृक्ष बेलन नहीं है,⁷ पर चार्ट 20 6 एक प्रकीर्ण आरेख को प्रदर्शित करता है जो पहले की अपेक्षा रेखिक के अधिक निबट लगता है। इस सम्बन्ध के लिए आकलन समीकरण

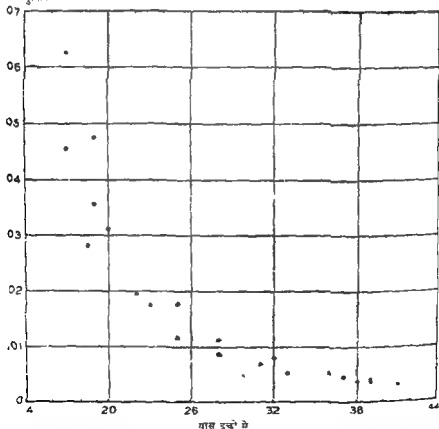
$$(\sqrt{Y})_c = a + bX$$

प्रकार⁸ का बन जाएगा।

यद्यपि यह आभास करना तर्कसंगत नहीं है कि $\frac{1}{Y}$ और X इन आंकड़ों के लिए एक

(आमन-10)

का पुनर्गणना



चार्ट 20 7 बीस पॉइंटोसा देवदार वृक्षों के आयतन का तथा व्यास व्युत्क्रम अक-गणितीय ग्रिड पर प्रदर्शित। सारणी 20 1 के जाकड़ जो Y मूल्यों के व्युत्क्रमों को नहीं दिखाती।

7 देखें मूल ग्रन्थों पुस्तक के द्वितीय संस्करण के पृष्ठ 234 पर सारणी 20 1 के नीचे उल्लिखित नक्शे।

8 देखें टिप्पणी 5।

रेखिक प्रकीर्ण आरेख बनाएँगे, तथापि चार्ट 20 7 तैयार किया गया है। यह स्पष्ट है कि इन ग्रांकडो के लिए यह सम्बन्ध उपयुक्त नहीं है, यद्यपि अन्य श्रेणियों के लिए यह कभी-कभी उपादेय है। आकलन समीकरण $\left(\frac{1}{Y}\right)_c = a + bX$ प्रकार⁹ का होगा।

पाठको ने ध्यान दिया होगा कि चार्ट 20 4 और 20 5 में प्रयुक्त रिडो की इस प्रकार रचना की गई थी कि वास्तविक X मूल्यों तथा Y मूल्यों का अंकन किया गया था। चार्ट 20 6 और 20 7 में विज्ञिष्ट रिड का प्रयोग नहीं था अपितु अकनणितमीय पमानों को काम में लाया गया था और X मूल्यों के सामने \sqrt{Y} तथा $\frac{1}{Y}$ मूल्यों को अंकित किया गया था। 20.6 तथा 20 7 चार्टों के लिए विशेष रिडो का प्रयोग किया जा सकता था, इनका इसलिए प्रयोग नहीं किया गया क्योंकि वे पाठक को तत्काल प्राप्त नहीं है।

अब हम लघु Y , लघु X के सम्बन्ध तथा \sqrt{Y} , X के सम्बन्ध के लिए विभिन्न सहसम्बन्ध मापों का परिकलन प्रारम्भ करेंगे। लघु Y , X के सम्बन्ध तथा $\frac{1}{Y}$, X के सम्बन्ध को केवल चित्तों के रूप में विचारा जायगा। क्योंकि सम्बन्धित चार समीकरण प्रकारों में से प्रत्येक को आकलन समीकरण में केवल दो अज्ञातों की आवश्यकता पड़ती है, अतः सभी प्रविधियाँ, जैसा कि अध्याय 19 में वर्णित है, समूहित ग्रांकडो के रेखिक सहसम्बन्ध की प्रविधियों के समान होंगी। सूच बैसे ही रहेंगे जैसे कि पहलें प्रयुक्त किए गए थे, अतिरिक्त इसके कि (1) लघु Y , \sqrt{Y} या $\frac{1}{Y}$ को Y के लिए तथा (2) लघु X को X के लिए प्रतिस्थापन किया जाएगा जब हम लघु Y , लघु X सम्बन्ध का प्रयोग करते हैं।

क्योंकि चार रूपांतरों के अन्तर्गत जिन पर विचार किया जाएगा, Y मूल्यों के लघु-गणक, बग मूल, या व्युत्क्रम आते हैं, अतः दो बातों को ध्यान में रखना चाहिए (1) न्यूनतम वर्गों का जोड़ $Y - Y_c$ मूल्यों के वर्गों के योग को निम्नतम नहीं करता, यह परिकलित रूपान्तरित Y मूल्यों से रूपान्तरित प्रक्षिप्त X मूल्यों के विचलनों के वर्गों के योग को निम्नतम करता है, तथा (2) जब आकलन समीकरण से यथार्थ Y मूल्यों के प्रसार की मात्रा का वर्णन कर रहे हों, तो जब दांती ही रूपान्तरित इकाइयों के रूप में हो तो आकलन की मानक त्रुटि को अवश्यमंत्र परिकलित Y मूल्यों में जोड़ा जाना चाहिए और उनमें से घटाना चाहिए, जोड़ तथा घटाव के बाद परिणामों को मूल Y श्रेणी की इकाइयों में पुन रूपान्तरित किया जा सकता है।

लघु Y , लघु X सम्बन्ध—चार्ट 20.5 में यह संकेत किया गया था कि व्यास तथा आयतन में सम्बन्ध लगभग रेखिक था जब दोनों श्रेणियों को लघुगणकों के रूप में व्यक्त किया गया था। आकलन समीकरण

$$(\text{लघु } Y)_c = \text{लघु } a + b \text{ लघु } X$$

प्रकार का है और प्रसामान्य समीकरणों

$$\text{I. } \Sigma \text{ लघु } Y = N \text{ लघु } a + b \Sigma \text{ लघु } X,$$

$$\text{II. } \Sigma (\text{लघु } X \cdot \text{लघु } Y) = \text{लघु } a \Sigma \text{ लघु } X + b \Sigma (\text{लघु } X)^2$$

को युगपत् रूप से हल करके स्थिरांक लघु a तथा b प्राप्त किए जाते हैं।

इन समीकरणों में, सारणी 20 3 (लघुगणक परिशिष्ट द म हैं) से मूल्यों को प्रतिस्थापित करने में

$$I \quad 38 \ 727389 = 20 \text{ लघु } a + 28 \ 728012 \ b,$$

$$II \quad 56 \ 619891 = 28 \ 728012 \text{ लघु } a + 41 \ 581145 \ b.$$

प्राप्त होत हैं। युग्मत हल प्रदान करता है

$$\text{लघु } a = -2 \ 569125 \text{ तथा}$$

$$b = 3 \ 136656$$

घातन समीकरण को ध्रुव लिखा जा सकता है

$$(\text{लघु } Y)_c = -2 \ 569125 + 3 \ 136656 \text{ लघु } X$$

क्योंकि घातन समीकरण जिस रूप में प्रयुक्त कर रहे हैं,

$$Y_c = aX^b$$

का रजित रूप है अतः मूल घातन के रूप में घातन समीकरण

$$Y_c = 0 \ 002697 X^{136656}$$

है।

सारणी 20 3

उन मूल्यों का परिकलन जिनको बीस पोटरोसा वेवदार बक्को के व्यास के लघु-गणक तथा आयतन के लघुगणक के बीच सम्बन्ध के मापों का निर्धारण करने के लिए प्रयुक्त किया गया

(लघुगणक का परिशिष्ट द म प्राप्त किया गया है।)

छाना का ऊँचाई पर व्यास (इंच) X	आयतन* (बोर्ड फुट) $-10) Y$	लघु X	लघु Y	लघु X लघु Y	(लघु X) ²	(लघु Y) ²
36	192	1 556303	2 283301	3 553508	2 424079	5 213463
28	113	1 447158	2 053078	2 971128	2 094266	4 215129
28	88	1 447158	1 944483	2 813974	2 094266	3.781014
41	294	1 612784	2 468347	3 980 ⁰ 11	2 601072	6 092737
19	28	1 278754	1 447158	1 850559	1 635212	2 094266
32	123	1 505150	2 089505	3 145621	2 265477	4 367703
22	51	1 342423	1 707570	2 292281	1 802100	2.915795
38	252	1 579784	2 401401	3 793695	2 495717	5 766727
25	56	1 397940	1 748188	2 443862	1 954236	3 056161
17	16	1 230449	1 204120	1 481608	1 514005	1 449905
31	141	1 491362	2 149219	3 205264	2.224161	4.619142
20	32	1.301030	1 505150	1 958245	1 692679	2 265477
25	86	1 397940	1 934498	2 704312	1 954236	3 742233
19	21	1 278754	1 322219	1 690793	1 635212	1 748263
39	231	1 591065	2.363612	3 760660	2 531488	5.586662
33	187	1 518514	2 271842	3 449824	2 305885	5 161266
17	22	1 230449	1 342423	1 651783	1 514005	1 802100
37	205	1 568202	2 311754	3 625297	2 459258	5 344207
23	57	1 361728	1 755875	2 391024	1 854303	3 083097
39	265	1 591065	2 423246	3 855542	2 531488	5 872121
569	2,460	28 728012	38 727389	56 619891	41 581145	78 177518

*सारणी 20 I की टिप्पणी देखें।

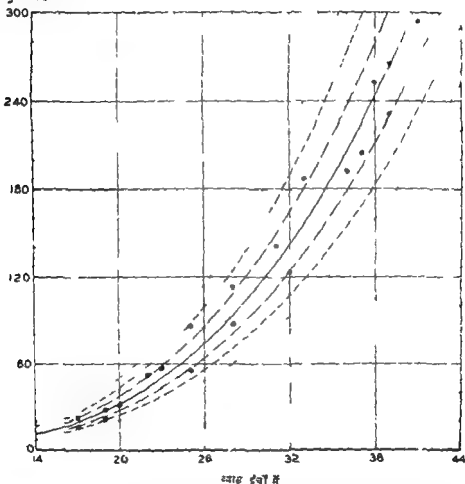
आकृतियों के स्रोत के लिए, देखें सारणी 20 I।

(ध्यान दीजिए कि लघु $a = -2.569125 = 7.430875 - 10$ तथा इसका प्रतिलघु 0.002697 है।) आकलन समीकरण को चार्ट 20.5 पर दिखाया गया है जिसके लघु-गणकीय पैमाने हैं, और चार्ट 20.8 पर जिसके अकण्ठितोप पैमाने हैं।

$$\text{जहाँ लघु } Y = \frac{\sum \text{लघु } Y}{N} = \frac{38.727389}{20} = 1.93636945 \text{ है वहाँ कुल विचरण है}^{10}$$

$$\sum (\text{लघु } Y)^2 = \sum (\text{लघु } Y)^2 - (\text{लघु } Y) \sum \text{लघु } Y$$

आयतन, बोरे
कुट-10



चार्ट 20.8 बीस फोडरोसा देवदार वृक्षों का आयतन तथा व्यास और आकलन की ± 1 , ± 2 , तथा ± 3 मानक प्रुटियों के क्षेत्रों के साथ (लघु Y)_c = लघु $a + b$ लघु Y प्रकार का आकलन समीकरण अकण्ठितोप ग्रिड पर प्रदर्शित। सारणी 20.3 के आकड। आकलन समीकरण को गहरी रेखा से दिखाया गया है।

$$10 \text{ ध्यान दीजिए कि } \sum (\text{लघु } Y)^2 = \sum [\text{लघु } Y - (\text{लघु } Y)]^2 = \sum \left(\text{लघु } Y - \frac{\sum \text{लघु } Y}{N} \right)^2$$

यह $\sum (\text{लघु } (1-1))^2$ नहीं है। इसी प्रकार, $\sum (\text{लघु } Y)_c^2 = \sum [(\text{लघु } Y)_c - (\text{लघु } 1)]^2$ और $\sum (\text{लघु } Y)_c^2 = \sum [\text{लघु } Y - (\text{लघु } 1)]^2$

कुल विचरण के लिए सख्यात्मक मूल्य है

$$\Sigma(\text{लघु } Y)^2 = 78\ 177518 - (1.93636945)(38.727389), \\ = 3\ 186985.$$

व्याख्यात विचरण है¹¹

$$\Sigma(\text{लघु } y)_c^2 = \text{लघु } a \Sigma \text{लघु } Y + b \Sigma(\text{लघु } X \text{ लघु } Y) - (\text{लघु } \bar{Y}) \Sigma \text{लघु } Y, \\ = (-2\ 569125)(38.727389) + (3.136656)(56.619891) \\ - (1.93636945)(38\ 727389), \\ = 3.111085.$$

अव्याख्यात विचरण को अब घटा कर प्राप्त किया जा सकता है

$$\Sigma(\text{लघु } y)_s^2 = \Sigma(\text{लघु } y)^2 - \Sigma(\text{लघु } y)_c^2, \\ = 3\ 186985 - 3\ 111085 = 0\ 075900$$

महसम्बन्ध तथा निर्धारण के गुणांक है

$$r^2_{\text{लघु } Y \text{ लघु } X} = \frac{\Sigma(\text{लघु } y)_c^2}{\Sigma(\text{लघु } y)^2} = \frac{3\ 111085}{3\ 186985} = 0\ 976 \text{ तथा} \\ r_{\text{लघु } Y \text{ लघु } X} = +0\ 988.$$

हम महसम्बन्ध गुणांक के लिये एक चिह्न दिखा सकते हैं, क्योंकि लघु Y तथा लघु X के बीच सम्बन्ध रेखिक है।

क्योंकि आकलन समीकरण के अन्तर्गत केवल दो स्थिरांक आते हैं, अतः हम सशोधित उपाद पूर्ण सूत्र के प्रयोग द्वारा सहसम्बन्ध के गुणांक का परिकलन कर सकते हैं। यह स्मरण किया जाएगा कि यह व्यंजक आकलन समीकरण में पहले स्थिरांकों को ज्ञात किए बिना महसम्बन्ध गुणांक को प्राप्त करने की अनुमति देता है। लघु Y तथा लघु X के लिये,

$r_{\text{लघु } Y \text{ लघु } X}$

$$= \frac{N \Sigma(\text{लघु } X \text{ लघु } Y) - (\Sigma \text{लघु } X)(\Sigma \text{लघु } Y)}{\sqrt{[N \Sigma(\text{लघु } X)^2 - (\Sigma \text{लघु } X)^2][N \Sigma(\text{लघु } Y)^2 - (\Sigma \text{लघु } Y)^2]}}, \\ = \frac{20(56\ 619891) - (28\ 728012)(38\ 727389)}{\sqrt{[20(41\ 581145) - (28.728012)^2][20(78.177518) - (38.727389)^2]}}, \\ = +0\ 988.$$

आकलन की मानक त्रुटि है

$$s_{\text{लघु } Y \text{ लघु } X} = \sqrt{\frac{\Sigma(\text{लघु } y)_s^2}{N}} = \sqrt{\frac{0.075900}{20}} = 0\ 061604$$

11. यदि हम दोनों $(\text{लघु } Y)_c = \text{लघु } a + b \text{ लघु } X$ तथा $(\text{लघु } Y)_s = \text{लघु } a + X \text{ लघु } b$, में $\Sigma(\text{लघु } y)_c^2$ तथा $\Sigma(\text{लघु } y)_s^2$ का परिकलन कर रहे हों तो चिह्नों द्वारा या किसी और प्रकार से व्याख्यात विचरण और व्याख्यात विचरण को प्राप्त करने की दो विधियों के बीच भेद करने की सम्भवता हम इच्छा करेंगे।

आकलन की $\pm 1, 2$, तथा 3 मानक वृटियों के क्षेत्रों को चार्ट 20.5 और 20.8 पर दिखाया गया है। ध्यान दीजिये कि चार्ट 20.8 पर X का मूल्य जितना अधिक बढ़ता है, प्रकीर्ण क्षेत्र उतने ही आकलन समीकरण से पृथक् होते जाते हैं। चार्ट 20.5 पर धन सबदा समान अन्तर पर हैं क्योंकि पैमाने लघुगुणाकीय हैं।

एक Y_c मूल्य का परिकलन तथा आकलन की मानक वृटि का किस प्रकार प्रयोग किया जाता है इसे प्रदर्शित करना अच्छा हो सकता है। जब $X=30$ (जिसके लिये लघु $X=1.477121$) तो (लघु Y)_c का मूल्य निश्चित करने के लिये, हम लिखते हैं

$$\begin{aligned} (\text{लघु } Y)_c &= -2.569125 + (3.136656)(1.477121), \\ &= 2.064095 \end{aligned}$$

इसका प्रतिलघु है 115.9 ताकि $Y_c = 115.9$ बोर्ड फुटों के दशक। आकलन की \pm एक मानक वृटि की सीमाओं को प्राप्त करने के लिये हम लिखते हैं

$$\begin{aligned} \text{प्रतिलघु } [(\text{लघु } Y)_c \pm 1 \text{ लघु } Y \text{ लघु } X] &= \text{प्रतिलघु } (2.064095 \pm 0.061604), \\ &= \text{प्रतिलघु } 2.002491 \text{ तथा } 2.125699, \\ &= 100.6 \text{ तथा } 133.6 \text{ बोर्ड फुटों के दशक।} \end{aligned}$$

आकलन की \pm दो मानक वृटियों की सीमाओं के लिए हम परिकलन करते हैं

$$\begin{aligned} \text{प्रतिलघु } [(\text{लघु } Y)_c \pm 2 \text{ लघु } Y \text{ लघु } X] &= \text{प्रतिलघु } (2.064095 \pm 0.123208), \\ &= 87.3 \text{ तथा } 153.9 \text{ बोर्ड फुटों के दशक} \end{aligned}$$

आकलन की \pm तीन मानक-वृटियों की सीमाओं के लिये

$$\begin{aligned} \text{प्रतिलघु } [(\text{लघु } Y)_c \pm 3 \text{ लघु } Y \text{ लघु } X] &= \text{प्रतिलघु } (2.064095 \pm 0.184812) \\ &= 75.7 \text{ तथा } 177.4 \text{ बोर्ड फुटों के दशक।} \end{aligned}$$

इसी ढंग से X के अन्य मूल्यों पर आधारित आयतन के आकलनों के लिये सीमाओं को प्राप्त किया जा सकता है। हाँ, इसे अवश्यमेव स्मरण रखना चाहिये कि मारणी में प्रतिलघुओं को देखने से पूर्व (लघु Y)_c मूल्य तथा $1 \text{ लघु } Y$ मूल्य को आपस में अवश्य जोड़ लेना चाहिये। विकल्प स्वरूप 1_c मूल्यों का आकलन की मानक वृटि के एक अनुपात के रूप में प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरण के लिये,

$$\begin{aligned} \text{प्रतिलघु } 1 \text{ लघु } Y \text{ लघु } X &= \text{प्रतिलघु } 0.061604 = 1.1524 \text{ तथा} \\ \text{प्रतिलघु } -1 \text{ लघु } Y \text{ लघु } X &= \text{प्रतिलघु } -0.061604 = \text{प्रतिलघु } 9.938396 - 10, \\ &= 0.8678 \end{aligned}$$

आकलन की \pm एक मानक वृटि की सीमाओं को प्राप्त करने के लिये हमारे आकलन समीकरण से परिवर्तित किन्हीं Y_c मूल्यों को अब इन अनुपातों से गुणा किया जा सकता है। उस अवस्था में जब $X=30$ तथा $1_c=115.9$, तो हम वही मूल्य

$$115.9 \times 1.1524 = 133.6 \text{ तथा}$$

$$115.9 \times 0.8678 = 100.6 \text{ बोर्ड फुटों के दशक}$$

प्राप्त करते हैं जो कि पहले प्राप्त किये थे। आकलन की \pm दो या तीन मानक वृटियों की सीमाओं के लिए प्रविधि वही है, अपवाद यह है कि प्रारम्भिक पग के अन्तर्गत

$\text{लघु } Y \text{ तब } X \text{ को 2 या 3 से गुणा करना पड़ता है या अभी अभी प्राप्त अनुपातों के वग या घन किये जा सकते हैं।}$

\sqrt{Y}, X सम्बन्ध—क्योंकि चार्ट 20 6 का प्रकीर्ण आरेख चार्ट 20 5 के प्रकीर्ण आरेख से अधिक लगभग रेखिक दिखाई देता है अतः हमें लघु Y , लघु X सम्बन्ध की अपेक्षा \sqrt{Y} X सम्बन्ध के लिये सहसम्बन्ध या निर्धारण के उच्चतर गुणांक की प्राप्ति करने की आशा करनी चाहिए। तथापि वे गुणांक जिनका हम परिकलन करने वाले हैं उन गुणांकों से बहुत ऊँचे नहीं हो सकते जो अभी अभी प्राप्त किये गए हैं क्योंकि हमने पाया था कि $r_{\text{लघु } Y \text{ तब } X} = 0.976$ तथा $r_{\text{लघु } Y \text{ लघु } X} = +0.988$

सारणी 20 4

बीस पॉडरोसा देवदार वृक्षों के आयतन के वर्गमूल तथा व्यास के बीच सम्बन्ध के मापों के निर्धारण के लिये प्रयुक्त मूल्यों की संगणना
(वर्गमूलों को परिशिष्ट 8 से प्राप्त किया जा सकता है।)

छाती की ऊँचाई पर व्यास (इंच) X	आयतन* (बोर्ड फुट - 10) Y	\sqrt{Y}	$X \sqrt{Y}$	X
36	192	13.86	498.96	1.296
28	113	10.63	297.64	.784
28	88	9.38	262.64	.784
41	294	17.15	703.15	1.681
19	28	5.29	100.51	.361
32	123	11.09	354.88	1.024
22	51	7.14	157.08	.484
38	252	15.87	603.06	1.444
25	56	7.48	187.00	.625
17	16	4.00	68.00	.289
31	141	11.87	367.97	.961
20	32	5.66	113.20	.400
25	86	9.27	231.75	.625
19	21	4.58	87.02	.361
39	231	15.20	592.80	1.521
33	187	13.67	451.11	1.089
17	22	4.69	79.73	.289
37	205	14.32	529.84	1.369
23	57	7.55	173.65	.529
39	265	16.28	634.92	1.521
569	2.460	204.98	6.494.91	17.437

* सारणी 20 1 की टिप्पणी देखें।

आंकड़ों के योग के लिये सारणी 20 1 देखें।

आकलन समीकरण

$$(\sqrt{Y})_c = a + bX$$

प्रकार का है, और प्रसामान्य समीकरण

$$I \quad \Sigma \sqrt{Y} = Na + b \Sigma X,$$

$$II \quad \Sigma X \sqrt{Y} = a \Sigma X + b \Sigma X^2$$

है। सारणी 20 4 से मूल्यों का प्रतिस्थापन करने से (वर्ग तथा वर्गमूल परिशिष्ट व में दिये गए हैं), हम

$$I \quad 204 \ 98 = 20a + 569b, \text{ तथा}$$

$$II \quad 6,494 \ 91 = 569a + 17,437b,$$

प्राप्त करते हैं, जब इन्हें युग्मत् रूप से हल किया जाता है तो ये

$$a = -4 \ 8587836 \text{ तथा}$$

$$b = 0 \ 5313293$$

प्रदान करते हैं।

तब, आकलन समीकरण

$$(\sqrt{Y})_c = -4 \ 86 + 0 \ 531 X,$$

है, जिसे चाट 20 6 पर प्रदर्शित किया गया है जहाँ \sqrt{Y} मूल्यों तथा X मूल्यों का अवन किया गया है, तथा चाट 20 9 पर दिखाया गया है जिस पर Y तथा X मूल्य दृष्टिगोचर होते हैं।

$$\Sigma (\sqrt{Y})^2 = \Sigma (\sqrt{Y})^2 - \sqrt{Y} \Sigma \sqrt{Y} = \Sigma Y - \sqrt{Y} \Sigma \sqrt{Y},$$

से¹² कुल विचरण का परिकलन किया गया है, जहाँ

$$\sqrt{Y} = \frac{\Sigma \sqrt{Y}}{N} = \frac{204 \ 98}{20} = 10 \ 249 \text{ कुल विचरण है}$$

$$\Sigma (\sqrt{Y})^2 = 2,460 - (10 \ 249)(204 \ 98) = 359 \ 1600$$

व्याख्यात विचरण है

$$\begin{aligned} \Sigma (\sqrt{Y})_c^2 &= a \Sigma \sqrt{Y} + b \Sigma X \sqrt{Y} - \sqrt{Y} \Sigma \sqrt{Y} \\ &= (-4 \ 8537836)(204 \ 98) + (0 \ 5310293)(6,494 \ 91) \\ &\quad - (10 \ 249)(204 \ 98), \\ &= 352 \ 1940 \end{aligned}$$

अव्याख्यात विचरण है

$$\begin{aligned} \Sigma (\sqrt{Y})^2 &= \Sigma (\sqrt{Y})^2 - \Sigma (\sqrt{Y})_c^2 \\ &= 359 \ 1600 - 352 \ 1940 = 6 \ 9660. \end{aligned}$$

¹² ध्यान दीजिये कि $\Sigma (\sqrt{Y})^2 = \Sigma (\sqrt{Y} - \sqrt{Y})^2 = \Sigma \left(\sqrt{Y} - \frac{\Sigma \sqrt{Y}}{N} \right)^2$

यह $\Sigma (\sqrt{Y} - \sqrt{Y})^2$ नहीं है। इसी प्रकार, $\Sigma (\sqrt{Y})^2 = \Sigma [(\sqrt{Y})_c - \sqrt{Y}]^2$ तथा $\Sigma (\sqrt{Y})^2 = \Sigma [\sqrt{Y} - (\sqrt{Y})_c]^2$

निर्धारण के गुणांक को

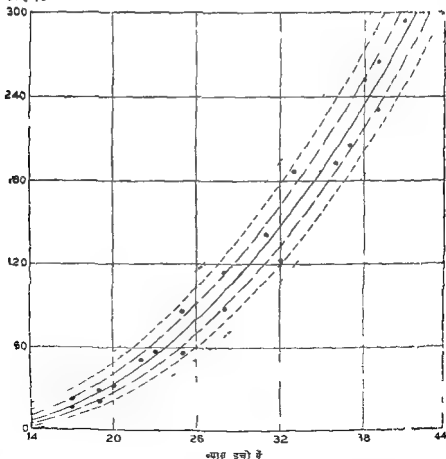
$$\begin{aligned} r' \sqrt{Y} X &= \frac{\sum (\sqrt{Y})_c^2}{\sum (\sqrt{Y})_c} \\ &= \frac{352.1940}{359.1600} = 0.981 \end{aligned}$$

स प्राप्त किया जाता है। यह मूल्य उस मूल्य से थोड़ा सा अधिक है जिसे द्वितीयान्न समीकरण ($r' Y X X^2 = 0.978$) के प्रयोग से प्राप्त किया था, और उससे भी अधिक है जब लघुगणकीय आकलन समीकरण ($r^2 \log Y \log X = 0.976$) का प्रयोग किया गया था। सहसम्बन्ध का गुणांक निर्धारण के गुणांक का वर्गमूल है,

$$r \sqrt{Y} X = +0.990,$$

आयतन बोर्ड

फुट = 10



चार्ट 20.9 बीम पोडरोसा देवदार वृक्षों का आयतन तथा व्यास तथा आकलन की ± 1 , ± 2 , एवं ± 3 , मानक त्रुटियों के क्षेत्रों के साथ, $(\sqrt{Y})_c = a + bY$, प्रकार का आकलन समीकरण एक अकर्मण्यतीय ग्रिड पर प्रदर्शित। सारणी 20.4 के आंकड़ों का आकलन समीकरण को गहरी रेखा से दिखाया गया है।

अथवा यदि a तथा b का परिकलन न किया गया हो तो इसे निम्नलिखित से ज्ञात किया जा सकता है

$$\begin{aligned} r_{\sqrt{Y}X} &= \frac{N\Sigma X\sqrt{Y} - (\Sigma X)(\Sigma\sqrt{Y})}{\sqrt{[N\Sigma X - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y - (\Sigma\sqrt{Y})^2]}} \\ &= \frac{20(6,494.91) - (569)(204.98)}{\sqrt{[20(17,437) - (569)^2][20(2,460) - (204.98)^2]}} \\ &= +0.990 \end{aligned}$$

आकलन की मानक त्रुटि

$$s_{\sqrt{Y}X} = \sqrt{\frac{\Sigma(\sqrt{Y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{6,9660}{20}} = 0.590$$

आकलन की $\pm 1, 2$, तथा 3 मानक त्रुटियों के क्षेत्र चाटें 20.6 तथा 20.9 पर अंकित हैं। लघुगुणकोय सम्बन्ध के समान, X की वृद्धि के साथ-साथ निरपेक्ष दृष्टि से क्षत्र विस्तृत होते चले जाते हैं। इसे चाट 20.9 में देखा जा सकता है। चाट 20.6 में क्षेत्र एक जैसे अन्तर पर है क्योंकि \sqrt{Y} मूल्यों को आलेखित किया गया था।

जब $X=30$ तो Y_c के मूल्य को निम्न प्रकार से प्राप्त किया जाता है

$$(\sqrt{Y})_c = -4.86 + (0.531)(30) = 11.07$$

क्योंकि $(\sqrt{Y})_c = 11.07$, $Y_c = (11.07)^2 = 122.5$ बोर्ड फुटों के दशक। आकलन की \pm एक मानक त्रुटि की सीमाओं को प्राप्त करने के लिये हम

$[(\sqrt{Y})_c \pm s_{\sqrt{Y}X}]^2 = (11.07 \pm 0.59)^2 = 109$ तथा 136.0 बोर्ड फुटों के दशक का परिकलन करते हैं। परिकलन की \pm दो मानक त्रुटियाँ की सीमाओं का

$[(\sqrt{Y})_c \pm 2s_{\sqrt{Y}X}]^2 = [11.07 \pm 2(0.59)]^2$
 $= 97.8$ तथा 150.1 बोर्ड फुटों के दशक

से परिकलन किया जाता है। आकलन की \pm तीन मानक त्रुटियों की सीमाओं के लिये

$[(\sqrt{Y})_c \pm 3s_{\sqrt{Y}X}]^2 = [11.07 \pm 3(0.59)]^2$
 $= 86.5$ तथा 164.9 बोर्ड फुटों के दशक।

इसी प्रकार से आयातन के अन्य आकलनों के लिए सीमाओं का परिकलन किया जा सकता है। यह स्मरण रखना महत्वपूर्ण है कि वगों को प्राप्त करने से पूर्व $(\sqrt{Y})_c$ तथा $s_{\sqrt{Y}X}$ मूल्यों को अवश्य मिला देना चाहिये।

वृक्षों के व्यास और आयातन के लिये तीन अरेखिक सम्बन्धों की तुलना—यद्यपि यह स्पष्ट है कि पाइरोसा देवदार वृक्षों के आयातन और व्यास के बीच महत्सम्बन्ध का वर्णन करने के लिये तीन अरेखिक आकलन समीकरणों में से कोई भी एक रेखिक समीकरण की अपेक्षा प्राथमिकता देने योग्य है, तथापि यह स्पष्ट विलुक्त नहीं है कि तीन अरेखिक समीकरणों में से कौन सा श्रेष्ठ है, क्योंकि वे सब निर्धारण के ऐसे गुणांक प्रदान करते हैं जो केवल तीसरे दशमलव स्थान पर भिन्न होते हैं। सभी का पूर्णांकन 0.98 पर होता है। कई समीकरण प्रकारों को पाना, जो इतने समान गुणांक प्रदान करें हैं कि उनका बीच-बीच की तकनीक भी गुञ्जायश्व न हो, प्रायः अमाधारण बात है। तथापि यह अवश्य

स्मरण रखना चाहिय कि, एक दृष्टि से, गुणांक पूरी तरह तुलना-योग्य नहीं हैं। द्वितीयांश वक्र ने Y मूल्य में विचरण के 97.8 प्रतिशत ($r^2_{Y \cdot XX^2} = 0.978$) की व्याख्या की। लघुगुणकीय आकलन समीकरण ने Y मूल्यों के लघुगुणकों में विचरण के 97.6 प्रतिशत ($r^2_{\log Y \cdot \log X} = 0.976$) की व्याख्या की। \sqrt{Y} तथा X का प्रयोग करने वाले आकलन समीकरण ने Y मूल्यों के वर्गमूलों में विचरण के 98.1 प्रतिशत ($r^2_{\sqrt{Y} \cdot \sqrt{X}} = 0.981$) की व्याख्या की।

आकलन की तीन मानक त्रुटियों की परस्पर एक दूसरे से तुलना नहीं की जा सकती, क्योंकि वे विभिन्न इकाइयों में हैं। द्वितीयांश वक्र के लिए आकलन की मानक त्रुटि सदैव 13.2 बोड फुट - 10 है। जब लघुगुणकीय आकलन समीकरण का प्रयोग किया जाता है तो आकलन की मानक त्रुटि सदैव घनात्मक दिशा में आकलन का 15.2 प्रतिशत है या ऋणात्मक दिशा में आकलन का 13.2 प्रतिशत है। जैसा कि अध्याय 19 में संकेत किया गया था आकलन की मानक त्रुटि आकलित मूल्यों से यथार्थ मूल्यों के प्रसार का एक समग्र माप है जो तब पर भी विशेष आकलन पर लागू किया जाता है। जब $X = 18-30$ तथा $+0$ हो, तो सारणी 20.5 तीन अमेरिकी विधियों में से प्रत्येक के द्वारा किए गए पोंडरोसा देवदार वृक्षों के आयतन के आकलनों तथा प्रत्येक दिशा में आकलन की एक मानक त्रुटि के द्वारा प्रस्तुत त्रुटि की मात्रा को प्रदर्शित करती है। द्वितीयांश वक्र तथा $\sqrt{Y} \cdot X$ सम्बन्ध द्वारा किए गए आकलन अधिक भिन्न नहीं हैं, जब $X = 18$, तो सभी तीन समीकरण आयतन का लगभग एकसा आकलन प्रदान करते हैं। जब द्वितीयांश समीकरण का प्रयोग किया जाता है तो निरपेक्ष दृष्टि से त्रुटि स्थिर रहती है चाहे X बड़ा हो या छोटा अन्य दो समीकरण प्रकारों में से किसी एक के लिए जैसे ही X बढ़ता जाता है त्रुटि भी बड़ी होती जाती है। X के छोटे मूल्यों के लिए लघुगुणकीय सम्बन्ध अल्पतम त्रुटियाँ को प्रदर्शित करता है, जबकि X के बड़े मूल्यों के लिए, द्वितीयांश वक्र अल्पतम त्रुटियाँ प्रदर्शित करता है। $\sqrt{Y} \cdot X$ सम्बन्ध, इन दोनों के बीच प्रायः मध्यवर्ती है।

एक कसौटी के अन्तर्गत जिसका विभिन्न समीकरण प्रकारों की उपयुक्तता की तुलना करने के लिए सुझाव दिया गया है, X के प्रत्येक प्रेक्षित मूल्य के लिए Y_c मूल्य का परिकलन और $\sqrt{\frac{\sum (Y - Y_c)^2}{N}}$ की गणना समाहित है। द्वितीयांश समीकरण के लिए यह $s_{Y \cdot XX^2}$ है, और क्योंकि न्यूनतम वर्ग जोड़ ने $\sum (Y - Y_c)^2$ को अल्पतम कर दिया, अतः $s_{Y \cdot XX^2} = 13.2$ का मूल्य अल्पतम होने की आशा की जाएगी। यह कुछ आश्चर्य की बात है कि $\sqrt{Y} \cdot X$ का सम्बन्ध, जिसके अन्तर्गत \sqrt{Y} मूल्यों के साथ न्यूनतम वर्गों का जोड़ आता था, भी Y_c मूल्यों के चतुर्दिक् Y मूल्यों का मानक विचलन के रूप में 13.2 प्रदान करता है। लघुगुणकीय सम्बन्ध के लिए, जिसके अन्तर्गत लघु Y मूल्यों के साथ न्यूनतम वर्गों का जोड़ आता था, Y_c मूल्यों के चतुर्दिक् Y मूल्यों का मानक विचलन 14.9 है। प्रत्येक उदाहरण में इकाई बोर्ड फुटों के दशक हैं।

एक और कसौटी के अन्तर्गत आकलन समीकरण को जान लेना आता है, जिसके चतुर्दिक् Y मूल्य अधिकतर लगभग प्रसामान्य रूप से बँट हुए हैं। क्योंकि N केवल 20 है, अतः यह इस उदाहरण के लिए कठिनाता से समुचित दिखाई देता है।

सारणी 20 5

पोडरोसा देवदार वृक्षों के आयतन तथा जब $X=18$ 30 एवं 40 इंच हो तो तीन समीकरण प्रकारों के लिए आयतन की \pm एक मानक त्रुटि के धनो के आयतन (सारणी की रचना में मूल्य बाइ फुट - 10 हैं।)

आकलन समीकरण	$X=18$ इंच			$X=30$ इंच			$X=40$ इंच		
	अदृष्टात्मक त्रुटि	Y_e	धनात्मक त्रुटि	अदृष्टात्मक त्रुटि	Y_e	धनात्मक त्रुटि	अदृष्टात्मक त्रुटि	Y_e	धनात्मक त्रुटि
द्वितीयांश	13.2	22.5	13.2	13.2	122.1	13.2	13.2	268.9	13.2
लघुगणकीय	3.0	23.2	3.6	15.3	115.9	17.7	37.8	285.8	43.5
$\sqrt{Y} \cdot X$	5.2	22.1	5.9	12.7	122.5	13.5	19.0	268	19.7

जैसा कि प्रारम्भ में उल्लेख किया गया था तीन अरेखिक समीकरण प्रकारों में चयन का बहुत कम आधार है। पृष्ठ 450-451 पर वर्णित $\sqrt{Y} \cdot X$ सम्बन्ध के ताकिक निहित अर्थ के साथ कदाचित् पूर्ववर्ती अनुच्छेदों में प्रस्तुत जानकारी इसे चुनने के लिए व्यक्ति को बाध्य करे। जब कई प्रविधियाँ लगभग समान महत्व की हों तो परिवर्तन के लिए सुगमतम या सरलतम को चुनना अनुचित नहीं है। इस आधार पर भी हम $\sqrt{Y} \cdot X$ सम्बन्ध को चुन सकते हैं।

लघु $Y \cdot X$ सम्बन्ध—जब Y मूल्यों के लघुगणका को X मूल्यों के साथ सहसंबन्धित करते हैं तो आकलन समीकरण

$$(\text{लघु } Y)_e = \text{लघु } a + X \text{ लघु } b$$

प्रकार का है। प्रसामान्य समीकरण

$$I \quad \Sigma \text{ लघु } Y = N \text{ लघु } a + \text{लघु } b \Sigma X$$

$$II \quad \Sigma (X \text{ लघु } Y) = \text{लघु } a \Sigma X + \text{लघु } b \Sigma X^2$$

है। कुल विचरण है¹³

$$\Sigma (\text{लघु } Y)^2 = \Sigma (\text{लघु } Y)^2 - (\overline{\text{लघु } Y}) \Sigma \text{ लघु } Y$$

व्याख्यात विचरण है¹⁴

$$\Sigma (\text{लघु } Y)^2 = \text{लघु } a \Sigma \text{ लघु } Y + \text{लघु } b \Sigma (X \text{ लघु } Y) - (\overline{\text{लघु } Y}) \Sigma \text{ लघु } Y$$

तथा अन्याख्यात विचरण

$$\Sigma (\text{लघु } Y)^2 = \Sigma (\text{लघु } Y)^2 - \Sigma (\text{लघु } Y)^2$$

है। निर्धारण के गुणांक को

$$r_{\text{लघु } Y \cdot X} = \frac{\Sigma (\text{लघु } Y)^2}{\Sigma (\text{लघु } Y)^2}$$

13 देख टिप्पणी 10।

14 देख टिप्पणी 11।

से प्राप्त किया जा सकता है। वास्तव में, सहसम्बन्ध का गुणांक निर्धारण के गुणांक का वर्गमूल है। यदि लघु a तथा लघु b की आवश्यकता न हो, तो r लघु $Y.X$ का परिकलन

$$r_{\text{लघु } Y.X} = \frac{N\Sigma(X \cdot \text{लघु } Y) - (\Sigma X)(\Sigma \text{लघु } Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma(\text{लघु } Y)^2 - (\Sigma \text{लघु } Y)^2]}}$$

में किया जा सकता है। आकलन की मानक त्रुटि है।

$$s_{\text{लघु } Y.X} = \sqrt{\frac{\Sigma(\text{लघु } y)^2}{N}}$$

$\frac{1}{Y}$, X सम्बन्ध—इस सम्बन्ध के लिए, आकलन समीकरण

$$\left(\frac{1}{Y}\right)_c = a + bX$$

प्रकार का है। असामान्य समीकरण हैं।

$$I \quad \Sigma \frac{1}{Y} = Na + b\Sigma X,$$

$$II \quad \Sigma\left(X \cdot \frac{1}{Y}\right) = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

कुल विचरण है¹⁵

$$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{1}{Y}\right)^2 - \left(\frac{1}{Y}\right) \Sigma \frac{1}{Y},$$

$$\text{जहाँ } \left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{\Sigma \frac{1}{Y}}{N}$$

व्याख्यात विचरण

$$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)_c^2 = a\Sigma \frac{1}{Y} + b\Sigma X \frac{1}{Y} - \left(\frac{1}{Y}\right) \Sigma \frac{1}{Y},$$

है तथा अव्याख्यात विचरण

$$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)_e^2 = \Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2 - \Sigma\left(\frac{1}{y}\right)_c^2$$

है।

$$r_{\frac{1}{Y}.X}^2 = \frac{\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)_c^2}{\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2}.$$

15 ध्यान दीजिए कि $\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2 = \Sigma\left[\frac{1}{Y} - \left(\frac{1}{Y}\right)\right]^2 = \Sigma\left(\frac{1}{Y} - \frac{\Sigma \frac{1}{Y}}{N}\right)^2$ है। यह

$\Sigma[1 - (Y - \bar{Y})]^2$ नहीं है। इसी प्रकार, $\Sigma\left(\frac{1}{Y}\right)_c^2 = \Sigma\left[\left(\frac{1}{Y}\right)_c - \left(\frac{1}{Y}\right)\right]^2$ तथा

$$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)_e^2 = \Sigma\left[\frac{1}{Y} - \left(\frac{1}{Y}\right)_c\right]^2.$$

से निर्धारण के गुणांक का परिकलन किया जा सकता है और $r_{1\bar{Y}}X$ वगैरह है। विकल्प से,

$$r_{1\bar{Y}}X = \frac{N\Sigma X' \frac{1}{Y} - (\Sigma X)(\Sigma \frac{1}{Y})}{\sqrt{[N\Sigma X'^2 - (\Sigma X)^2] [N\Sigma (\frac{1}{Y})^2 - (\Sigma \frac{1}{Y})^2]}}$$

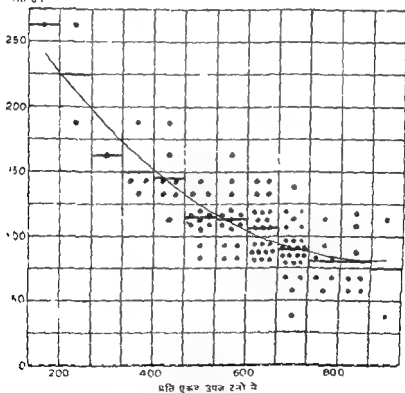
से सहसम्बन्ध गुणांक को पाया जा सकता है जिसमें a तथा b के मूल्यों की आवश्यकता नहीं पड़ती। आयतन की मानक त्रुटि है।

$$s_{1\bar{Y}}X = \sqrt{\frac{\Sigma (\frac{1}{Y})^2}{N}}$$

सहसम्बन्ध अनुपात, η

जब सहसम्बन्ध सारणी में साँकेतिक रूप प्रकाशित किया जाए हो जैसे कि सारणी 20.6 में, और जब अरेखिक सम्बन्ध विद्यमान हो, तो कई बार ऐसे सहसम्बन्ध गुणांक

प्रति घण्टे
प्रति टन



चार्ट 20.10 पूर्व-मध्य इतिनाँयस में भूईअनाज को काटने के लिए आवश्यक प्रति टन मनुष्य घण्टे तथा प्रति एक टन उपज। सैनिक रणार्थ प्रत्येक उपज के लिए प्रति टन औसत मनुष्य घण्टा का सङ्केत करती हैं जबकि एक सम्बन्ध $Y_1 = 325.6794 - 0.565820Y + 0.0003275019Y^2$ में परिवर्तित मूल्यों को प्रस्तुत करता है। इस सम्बन्ध का परिचयन मूल चर्चा के पुस्तक के प्रथम संस्करण में पृष्ठ 721-725 पर किया गया था। औसत सारणी 20.6 के साथ दिए गए गीत में।

का मूल्य जानना रुचिकर होता है, जो उस समय उत्पन्न होगा जब आकलन समीकरण को अपेक्षा स्तम्भों के समांतर माध्यों का प्रयोग किया गया हो। चार्ट 20 10, शैतिज रेखाओं के प्रयोग से, सारणी 20 6 के स्तम्भ माध्यों को प्रदर्शित करता है। यह तुलना के उद्देश्यों के लिए आंकड़ों के साथ जुड़े द्वितीयान्न वक्र को भी दिखाता है। स्तम्भों के माध्यों पर आधारित, सहसम्बन्ध का माप, सहसम्बन्ध अनुपात r_{YX} है। यह उन सहसम्बन्ध गुणांक के समान है जिनकी व्याख्या हम पहले ही कर चुके हैं अर्थात् उसमें यह उस Y श्रेणी में कुल विचरण के अनुपात का वर्गमूल है जिसे स्तम्भ माध्यों के विचरण द्वारा समझाया गया है।¹⁶ अर्थात्

$$r_{YX} = \sqrt{\frac{\text{स्तम्भ माध्यों द्वारा व्याख्यात विचरण}}{Y \text{ श्रेणी का कुल विचरण}}}$$

या, चिह्नों में¹⁷,

$$\begin{aligned} r_{YX}^2 &= \frac{\sum_1^k [N_c (\bar{Y}_c - \bar{Y})^2]}{\sum (Y - \bar{Y})^2} = \frac{\left[\sum_1^k \left(\frac{\sum_1^{N_c} Y^2}{N_c} \right) - \bar{Y} \sum Y \right]}{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}} \\ &= \frac{\sum_1^k \left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} Y \right)^2}{N_c} \right] - \frac{(\sum Y)^2}{N}}{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}} \end{aligned}$$

जहाँ \bar{Y}_c एक स्तम्भ का समांतर माध्य है,

N_c एक स्तम्भ में मदों की संख्या है,

\sum_1^k

\sum एक स्तम्भ में N_c मदों के ऊपर जोड़ का संकेत करता है, तथा

\sum_1^k

\sum , k स्तम्भों के ऊपर जोड़ का संकेत करता है।

क्योंकि सहसम्बन्ध सारणी के आंकड़े वर्ग-अन्तरालों के पदों में हैं, अतः इस व्यंजक को, बारम्बार दृष्टन के समान या सहसम्बन्ध सारणी से पारकलित सहसम्बन्ध गुणांक के समान अवश्यमेव पुन लिखा जाना चाहिए। व्यंजक

$$r_{YX}^2 = \frac{\sum_1^k \left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} f_r d' Y \right)^2}{N_c} \right] - \frac{(\sum f_r d' Y)^2}{N}}{\sum f_r (d')^2 - \frac{(\sum f_r d' Y)^2}{N}}$$

बन जाता है।

¹⁶ एक सहसम्बन्ध अनुपात r_{XY} भी है जो उस X श्रेणी में कुल विचरण के अनुपात का वर्गमूल है जिसकी पंक्ति माध्यों के विचरण द्वारा व्याख्या की गई है।

¹⁷ तीन व्यंजकों में से पहले तथा अन्तिम को समानता का प्रमाण उसका परिणाम है जिसे परिशिष्ट छ, अनुच्छेद 26.1 में दिखाया गया है।

सारणी 20 6

पूरे-मध्य हस्तिकता के बटाई के लिए आवश्यक प्रति टन मनुष्य घण्टा तथा भू द अन्तर्ग या प्रति एकड़ अन्तर्ग के बीच सहसम्बन्ध प्राप्त करने के लिए आवश्यक परिचालन

वर्ग	122 34- 199 96		200 00- 200 68		211 33- 260 67		222 88- 260 67		234 43- 260 67		246 98- 260 67		259 53- 260 67		272 08- 260 67		284 63- 260 67		297 18- 260 67		309 73- 260 67		322 28- 260 67		334 83- 260 67		347 38- 260 67		359 93- 260 67		372 48- 260 67		385 03- 260 67		397 58- 260 67		410 13- 260 67		422 68- 260 67		435 23- 260 67		447 78- 260 67		460 33- 260 67		472 88- 260 67		485 43- 260 67		497 98- 260 67		510 53- 260 67		523 08- 260 67		535 63- 260 67		548 18- 260 67		560 73- 260 67		573 28- 260 67		585 83- 260 67		598 38- 260 67		610 93- 260 67		623 48- 260 67		636 03- 260 67		648 58- 260 67		661 13- 260 67		673 68- 260 67		686 23- 260 67		698 78- 260 67		711 33- 260 67		723 88- 260 67		736 43- 260 67		748 98- 260 67		761 53- 260 67		774 08- 260 67		786 63- 260 67		799 18- 260 67		811 73- 260 67		824 28- 260 67		836 83- 260 67		849 38- 260 67		861 93- 260 67		874 48- 260 67		886 03- 260 67		898 58- 260 67		911 13- 260 67		923 68- 260 67		936 23- 260 67		948 78- 260 67		961 33- 260 67		973 88- 260 67		986 43- 260 67		998 98- 260 67		1011 53- 260 67		1024 08- 260 67		1036 63- 260 67		1049 18- 260 67		1061 73- 260 67		1074 28- 260 67		1086 83- 260 67		1099 38- 260 67		1111 93- 260 67		1124 48- 260 67		1136 03- 260 67		1148 58- 260 67		1161 13- 260 67		1173 68- 260 67		1186 23- 260 67		1198 78- 260 67		1211 33- 260 67		1223 88- 260 67		1236 43- 260 67		1248 98- 260 67		1261 53- 260 67		1273 68- 260 67		1286 23- 260 67		1298 78- 260 67		1311 33- 260 67		1323 88- 260 67		1336 43- 260 67		1348 98- 260 67		1361 53- 260 67		1373 68- 260 67		1386 23- 260 67		1398 78- 260 67		1411 33- 260 67		1423 88- 260 67		1436 43- 260 67		1448 98- 260 67		1461 53- 260 67		1473 68- 260 67		1486 23- 260 67		1498 78- 260 67		1511 33- 260 67		1523 88- 260 67		1536 43- 260 67		1548 98- 260 67		1561 53- 260 67		1573 68- 260 67		1586 23- 260 67		1598 78- 260 67		1611 33- 260 67		1623 88- 260 67		1636 43- 260 67		1648 98- 260 67		1661 53- 260 67		1673 68- 260 67		1686 23- 260 67		1698 78- 260 67		1711 33- 260 67		1723 88- 260 67		1736 43- 260 67		1748 98- 260 67		1761 53- 260 67		1773 68- 260 67		1786 23- 260 67		1798 78- 260 67		1811 33- 260 67		1823 88- 260 67		1836 43- 260 67		1848 98- 260 67		1861 53- 260 67		1873 68- 260 67		1886 23- 260 67		1898 78- 260 67		1911 33- 260 67		1923 88- 260 67		1936 43- 260 67		1948 98- 260 67		1961 53- 260 67		1973 68- 260 67		1986 23- 260 67		1998 78- 260 67		2011 33- 260 67		2023 88- 260 67		2036 43- 260 67		2048 98- 260 67		2061 53- 260 67		2073 68- 260 67		2086 23- 260 67		2098 78- 260 67		2111 33- 260 67		2123 88- 260 67		2136 43- 260 67		2148 98- 260 67		2161 53- 260 67		2173 68- 260 67		2186 23- 260 67		2198 78- 260 67		2211 33- 260 67		2223 88- 260 67		2236 43- 260 67		2248 98- 260 67		2261 53- 260 67		2273 68- 260 67		2286 23- 260 67		2298 78- 260 67		2311 33- 260 67		2323 88- 260 67		2336 43- 260 67		2348 98- 260 67		2361 53- 260 67		2373 68- 260 67		2386 23- 260 67		2398 78- 260 67		2411 33- 260 67		2423 88- 260 67		2436 43- 260 67		2448 98- 260 67		2461 53- 260 67		2473 68- 260 67		2486 23- 260 67		2498 78- 260 67		2511 33- 260 67		2523 88- 260 67		2536 43- 260 67		2548 98- 260 67		2561 53- 260 67		2573 68- 260 67		2586 23- 260 67		2598 78- 260 67		2611 33- 260 67		2623 88- 260 67		2636 43- 260 67		2648 98- 260 67		2661 53- 260 67		2673 68- 260 67		2686 23- 260 67		2698 78- 260 67		2711 33- 260 67		2723 88- 260 67		2736 43- 260 67		2748 98- 260 67		2761 53- 260 67		2773 68- 260 67		2786 23- 260 67		2798 78- 260 67		2811 33- 260 67		2823 88- 260 67		2836 43- 260 67		2848 98- 260 67		2861 53- 260 67		2873 68- 260 67		2886 23- 260 67		2898 78- 260 67		2911 33- 260 67		2923 88- 260 67		2936 43- 260 67		2948 98- 260 67		2961 53- 260 67		2973 68- 260 67		2986 23- 260 67		2998 78- 260 67		3011 33- 260 67		3023 88- 260 67		3036 43- 260 67		3048 98- 260 67		3061 53- 260 67		3073 68- 260 67		3086 23- 260 67		3098 78- 260 67		3111 33- 260 67		3123 88- 260 67		3136 43- 260 67		3148 98- 260 67		3161 53- 260 67		3173 68- 260 67		3186 23- 260 67		3198 78- 260 67		3211 33- 260 67		3223 88- 260 67		3236 43- 260 67		3248 98- 260 67		3261 53- 260 67		3273 68- 260 67		3286 23- 260 67		3298 78- 260 67		3311 33- 260 67		3323 88- 260 67		3336 43- 260 67		3348 98- 260 67		3361 53- 260 67		3373 68- 260 67		3386 23- 260 67		3398 78- 260 67		3411 33- 260 67		3423 88- 260 67		3436 43- 260 67		3448 98- 260 67		3461 53- 260 67		3473 68- 260 67		3486 23- 260 67		3498 78- 260 67		3511 33- 260 67		3523 88- 260 67		3536 43- 260 67		3548 98- 260 67		3561 53- 260 67		3573 68- 260 67		3586 23- 260 67		3598 78- 260 67		3611 33- 260 67		3623 88- 260 67		3636 43- 260 67		3648 98- 260 67		3661 53- 260 67		3673 68- 260 67		3686 23- 260 67		3698 78- 260 67		3711 33- 260 67		3723 88- 260 67		3736 43- 260 67		3748 98- 260 67		3761 53- 260 67		3773 68- 260 67		3786 23- 260 67		3798 78- 260 67		3811 33- 260 67		3823 88- 260 67		3836 43- 260 67		3848 98- 260 67		3861 53- 260 67		3873 68- 260 67		3886 23- 260 67		3898 78- 260 67		3911 33- 260 67		3923 88- 260 67		3936 43- 260 67		3948 98- 260 67		3961 53- 260 67		3973 68- 260 67		3986 23- 260 67		3998 78- 260 67		4011 33- 260 67		4023 88- 260 67		4036 43- 260 67		4048 98- 260 67		4061 53- 260 67		4073 68- 260 67		4086 23- 260 67		4098 78- 260 67		4111 33- 260 67		4123 88- 260 67		4136 43- 260 67		4148 98- 260 67		4161 53- 260 67		4173 68- 260 67		4186 23- 260 67		4198 78- 260 67		4211 33- 260 67		4223 88- 260 67		4236 43- 260 67		4248 98- 260 67		4261 53- 260 67		4273 68- 260 67		4286 23- 260 67		4298 78- 260 67		4311 33- 260 67		4323 88- 260 67		4336 43- 260 67		4348 98- 260 67		4361 53- 260 67		4373 68- 260 67		4386 23- 260 67		4398 78- 260 67		4411 33- 260 67		4423 88- 260 67		4436 43- 260 67		4448 98- 260 67		4461 53- 260 67		4473 68- 260 67		4486 23- 260 67		4498 78- 260 67		4511 33- 260 67		4523 88- 260 67		4536 43- 260 67		4548 98- 260 67		4561 53- 260 67		4573 68- 260 67		4586 23- 260 67		4598 78- 260 67		4611 33- 260 67		4623 88- 260 67		4636 43- 260 67		4648 98- 260 67		4661 53- 260 67		4673 68- 260 67		4686 23- 260 67		4698 78- 260 67		4711 33- 260 67		4723 88- 260 67		4736 43- 260 67		4748 98- 260 67		4761 53- 260 67		4773 68- 260 67		4786 23- 260 67		4798 78- 260 67		4811 33- 260 67		4823 88- 260 67		4836 43- 260 67		4848 98- 260 67		4861 53- 260 67		4873 68- 260 67		4886 23- 260 67		4898 78- 260 67		4911 33- 260 67		4923 88- 260 67		4936 43- 260 67		4948 98- 260 67		4961 53- 260 67		4973 68- 260 67		4986 23- 260 67		4998 78- 260 67		5011 33- 260 67		5023 88- 260 67		5036 43- 260 67		5048 98- 260 67		5061 53- 260 67		5073 68- 260 67		5086 23- 260 67		5098 78- 260 67		5111 33- 260 67		5123 88- 260 67		5136 43- 260 67		5148 98- 260 67		5161 53- 260 67		5173 68- 260 67		5186 23- 260 67		5198 78- 260 67		5211 33- 260 67		5223 88- 260 67		5236 43- 260 67		5248 98- 260 67		5261 53- 260 67		5273 68- 260 67		5286 23- 260 67		5298 78- 260 67		5311 33- 260 67		5323 88- 260 67		5336 43- 260 67		5348 98- 260 67		5361 53- 260 67		5373 68- 260 67		5386 23- 260 67		5398 78- 260 67		5411 33- 260 67		5423 88- 260 67		5436 43- 260 67		5448 98- 260 67		5461 53- 260 67		5473 68- 260 67		5486 23- 260 67		5498 78- 260 67		5511 33- 260 67		5523 88- 260 67		5536 43- 260 67		5548 98- 260 67		5561 53- 260 67		5573 68- 260 67		5586 23- 260 67		5598 78- 260 67		5611 33- 260 67		5623 88- 260 67		5636 43- 260 67		5648 98- 260 67		5661 53- 260 67		5673 68- 260 67		5686 23- 260 67		5698 78- 260 67		5711 33- 260 67		5723 88- 260 67		5736 43- 260 67		5748 98- 260 67		5761 53- 260 67		5773 68- 260 67		5786 23- 260 67		5798 78- 260 67		5811 33- 260 67		5823 88- 260 67		5836 43- 260 67		5848 98- 260 67		5861 53- 260 67		5873 68- 260 67		5886 23- 260 67		5898 78- 260 67		5911 33- 260 67		5923 88- 260 67		5936 43- 260 67		5948 98- 260 67		5961 53- 260 67		5973 68- 260 67		5986 23- 260 67		5998 78- 260 67		6011 33- 260 67		6023 88- 260 67		6036 43- 260 67		6048 98- 260 67		6061 53- 260 67		6073 68- 260 67		6086 23- 260 67		6098 78- 260 67		6111 33- 260 67		6123 88- 260 67		6136 43- 260 67		6148 98- 260 67		6161 53- 260 67		6173 68- 260 67		6186 23- 260 67		6198 78- 260 67		6211 33- 260 67		6223 88- 260 67		6236 43- 260 67		6248 98- 260 67		6261 53- 260 67		6273 68- 260 67		6286 23- 260 67		6298 78- 260 67		6311 33- 260 67		6323 88- 260 67		6336 43- 260 67		6348 98- 260 67		6361 53- 260 67		6373 68- 260 67		6386 23- 260 67		6398	
------	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	-------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	------	--

सारणी 20 6 से मूल्यों का प्रतिस्थापन

$$r^2_{YX} = \frac{150\ 60065 - \frac{(16)^2}{103}}{220 - \frac{(16)}{103}} = \frac{148\ 115}{217\ 515}$$

$$= 0.681,$$

प्रदान करता है जो यह सकेत करता है कि मनुष्य घण्टी (Y चर) में विचरण के 68 प्रतिशत की स्तम्भ माध्यों के प्रयोग द्वारा व्याख्या की गई है। सहसम्बन्ध अनुपात इस मूल्य का वर्गमूल है, अतः

$$r_{YX} = \sqrt{0.681} = 0.825$$

सहसम्बन्ध अनुपात का कोई चिह्न नहीं है क्योंकि दो ध्रुवों के सभी मूल्यों के लिए जिनसे व्यक्ति का वास्तविक पट्टा सकता है, सम्बन्ध आवश्यक रूप से धनात्मक या ऋणात्मक नहीं है। ध्याने भी हो सकता है कि शैक्षणिक अक्षांश सख्यात्मक मूल्यों की प्रवेष्टा गुणात्मक मूल्यों को प्रस्तुत करे।

वन्देखीय सहसम्बन्ध गुणांक के साथ अपने सम्बन्ध के कारण सहसम्बन्ध अनुपात मुख्य रूप से रुचिपूर्ण है। सहसम्बन्ध अनुपात सदैव उस सहसम्बन्ध गुणांक के समान या उससे बड़ा होगा जिसे वर्गीकृत आंकड़ों के साथ वक्र के जोड़ का प्रयोग करके प्राप्त किया गया है, यदि समीकरण में स्थिरांक की सख्या r_{YX} के परिकलन में प्रयुक्त स्तम्भों की सख्या के बराबर या उससे कम हो। जैसे ही समीकरण में स्तम्भों अथवा स्थिरांक की सख्या बढ़ती है वैसे ही r_{YX} तथा वन्देखीय सहसम्बन्ध गुणांक दोनों ही बढ़ते जाते हैं।

सहसम्बन्ध अनुपात की उपयुक्तता की कई सीमाएँ हैं। प्रथम, आंकड़ों को अवश्य-मेव वर्गीकृत किया जाना चाहिए, आवश्यक रूप में दोनों अक्षांशों पर नहीं, परन्तु स्वतन्त्र चर अवश्य ही वर्गीकृत होना चाहिए। दूसरे, यदि स्वतन्त्र चर के लिए वर्गों की सख्या बढ़ाई जाती है तो सहसम्बन्ध अनुपात का मूल्य बढ़ कर 1.0 हो जाता है, यदि वर्ग इतने अधिक हो जाते हैं कि प्रत्येक वर्ग में केवल एक प्रेक्षण होता है। तीसरे, कोई आकलन समीकरण नहीं है और इसलिए आश्रित चर के आकलन का कोई सन्तोषजनक मार्ग नहीं है।

सहसंबन्ध III : अनेकधा और आंशिक सहसंबन्ध

प्रारम्भिक व्याख्या

सरल सहसम्बन्ध—अनेकधा और आंशिक सहसम्बन्ध का विवेचन प्रारम्भ करने से पूर्व, द्वि-चर रैखिक सहसम्बन्ध के प्रारम्भिक निष्कर्षों का संक्षेप में पुनर्विलोकन करना उपादेय होगा, क्योंकि अधिक परिष्कृत भाषों में केवल पूर्वविवेचित क्रियाविविधों का प्रसार मात्र होता है। पहले,

$$Y = a + bX$$

प्रकार के आकलन समीकरणों का परिकलन न्यूनतम वर्गों की विधि से हुआ था। इससे हमें स्वतन्त्र चर के मानों में आश्रित चर के मान का आकलन करना सुगम हो गया। फिर यह निरूपण किया गया कि आश्रित चर की पूर्ण घट-बढ़ (1) रगारयान घट-बढ़ और (2) अपनी परिवर्तनता में जिस घट-बढ़ की व्याख्या करने में हम असमर्थ रहे थे—दोनों का योग थी, अर्थात्,

$$\Sigma y^2 = \Sigma e^2 + \Sigma y^2$$

यह स्मरण रखना चाहिए कि हमने Σy^2 का परिकलन

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \bar{Y} \Sigma Y$$

सूत्र में किया था तथा Σy^2 का परिकलन अधोलिखित व्यंजक से किया गया था

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \bar{Y} \Sigma Y$$

जिसमें

$$\Sigma Y^2 = a \Sigma Y + b \Sigma XY$$

अथवा, अधिक सरलतापूर्वक,

$$\Sigma Y^2 = b \Sigma Y$$

आकलन की मानक त्रुटि s_1 में, जो $\sqrt{\frac{\Sigma e^2}{N}}$ है, हमें आश्रित चर के अपने आकलनों की

त्रुटि के परिसर की जाँच करने का सामर्थ्य प्रदान किया। पूर्ण घट-बढ़ से व्याख्यात घट-बढ़ को घटाने से Σy^2 की प्राप्ति हुई, अर्थात्

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \Sigma Y^2$$

अन्न में, एक माप का परिकलन किया गया जिससे पूर्ण घट-बढ का अनुपात बताया जा सका जिसकी व्याख्या आश्रित चर के परिकलित मानों की घट-बढों से की गई थी। यह अनुपात,

$$r^2 = \frac{\sum y_c^2}{\sum y^2},$$

निर्धारण का गुणांक कहा गया, और इसके वर्गमूल को सहसम्बन्ध का गुणांक बताया गया।

अनेकधा सहसम्बन्ध—अनेकधा सहसम्बन्ध के सिद्धान्त ठीक वे ही हैं जो सरल सहसम्बन्ध के हैं, किन्तु कार्य विधि अधिक भ्रमसाध्य है, क्योंकि इसमें एक से अधिक स्वतन्त्र चर हैं। इसमें किञ्चित् भिन्न संकेतों का प्रयोग भी आवश्यक है। इस अध्याय का दृष्टांत क्षेत्रीय माधिका आय, और इन्हीं क्षेत्रों में प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी एवं सजातीय कर्मचारियों, पूर्ण किए माधिका स्कूल वर्ष तथा प्रतिशत प्रवासी के पारस्परिक सम्बन्ध का विवेचन करेगा। माधिका आय आश्रित चर है तथा अन्य तीन स्वतन्त्र चर हैं।

परिकलनों को सरल करने के लिए जिसमें कि वे इस अध्याय में पूर्णतः दिखाए जा सकें, मयूक्त राज्य अमरीका को लगभग समान जनसंख्या वाले तथा न्यूनाधिक ममाग विशेषताओं वाले 19 क्षेत्रों में विभक्त किया गया है। न्यूयार्क राज्य के अपवाद को छोड़ कर, जिसे न्यूयार्क नगर तथा उत्तरी न्यूयार्क के दो भागों में विभक्त किया गया है, शेष सब क्षेत्रों की सीमाएँ राज्य-सीमाओं के अनुसार हैं। विभिन्न क्षेत्रों का संयोजन अन्यत्र सारणी 21.1 से देखा जा सकता है। समान जनसंख्या के समान क्षेत्रों के चयन से सांख्यिकीय परिणाम इस सीमा तक अधिक सार्थक होते हैं कि गणना में प्रत्येक क्षेत्र को उचित भार दिया जाता है। उधर 4 अक्षरों के समीकरण के साथ केवल 19 प्रेक्षणां के प्रयोग से स्वतन्त्रता के अंश निश्चय ही कुछ कम हो जाते हैं (अध्याय 26 में वह परिच्छेद देखिए जहाँ अनेकधा-सहसम्बन्ध के गुणांकों के महत्व का विवेचन किया गया है)। अतः प्राप्त परिणाम प्रथमतः निर्देशात्मक महत्व के सम्भन्ने आवश्यक हैं।

यह संकेतनों को कुछ सरल कर देता है, यदि अक्षोखेखों से चरों का अन्तर प्रकट करते हुए, विभिन्न अक्षरों का प्रयोग करने के स्थान पर चरों में से प्रत्येक को अक्षर X द्वारा निर्दिष्ट किया जाए। यदि चरों की संख्या अधिक है तो यह विशेष रूप से सत्य है। अतः हम अपने चरों को इस प्रकार निर्दिष्ट करेंगे :

आश्रित चर .

माधिका आय..... X_1

स्वतन्त्र चर :

प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी एवं सजातीय कर्मचारी.. X_2

पूर्ण किए माधिका स्कूल वर्ष X_3

प्रतिशत प्रवासी..... X_4

सारणी 21 1

1960 मे सयुक्त राज्य अमरीका के लगभग समान जनसंख्या वाले
उन्नीस अपेक्षाकृत समान क्षेत्र

क्षेत्र संख्या	जनसंख्या	समाविष्ट राज्य
(दस लाखों में)		
1	8 0	मेन, न्यू हैम्पशायर, वरमोन्ट, मसाचुसेट्स, रूहोड द्वीप
2	8 6	कनेक्टीकट, न्यू जर्सी
3	7 8	न्यूयार्क नगर
4	9 0	न्यूयार्क न्यूयार्क नगर को छोड़कर
5	11 3	पेन्सिलवानिया
6	9 7	ओहियो
7	12 5	इंडियाना मिशिगन
8	10 1	इल्लिनोइस
9	7 4	विसकॉन्सिन, मिनेसोटा
10	7 1	म्याचोवा मिस्सौरी
11	6 7	उत्तरी डकोटा, दक्षिणी डकोटा, नब्रास्का, कमास, कोलोरेडो
12	12 8	डेलावेयर मेरीलैंड, कोलंबिया जिला, वर्जीनिया, उत्तरी कैरोलिना
13	11 3	दक्षिणी कैरोलिना, जॉर्जिया, फ्लोरिडा
14	8 5	पश्चिमी वर्जीनिया, केंटकी, टेनेसी
15	8 7	अलाबामा, मिसौरी, लुइसियाना
16	6 4	एरिज़ोना न्यूमेक्सिको, अरक्सास, ओक्लाहोमा
17	7 5	माटाना, इडाहो, व्योमिंग, वाशिंगटन, ओरेगन, यूटाह, नेवादा
18	15.7	कैलिफोर्निया
19	9.6	टेक्सास

अगले पृष्ठों में हम 1, 2, और 3 चरों से प्रारम्भ करते तथा मूल सकल्पनाओं और परिकल्पनाओं को समझने के बाद चर 4 का परिचय देंगे। सहसम्बन्ध काय-विधि में प्रथम पण एक समीकरण प्राप्त करना है जिसमें माध्यिका प्राय के आकलन के साधन-रूप में दोनों स्वतन्त्र चरों का समावेश हो। आकलन चिह्न $X_{1,2,3}$ से व्यक्त किया जाता है क्योंकि यह चर Y_1 का आकलन है, जिसका परिकल्पन चर X_2 तथा X_3 से हुआ है। दो स्वतन्त्र चरों के होने के कारण b चिह्न भी दो होंगे। समीकरण इस प्रकार का होगा

$$Y_{1,2,3} = a_{1,2,3} + b_{12,3}X_2 + b_{13,2}X_3$$

b' , और उनके अधोलिखित अक्षरा के अर्थ के सम्बन्ध में दो शब्द आवश्यक हैं। ये आकलन के शुद्ध गुणांक X' , पर महवर्ती स्वतन्त्र चर में परिवर्तन के प्रभाव को सूचित

करते हैं, जब अन्य स्वतन्त्र चर का भी ध्यान रखा गया है।¹ इस प्रकार, $b_{12.3}$ पूर्ण हुए माध्यिका स्कूल वर्षों में घट-बढ़ में स्वतन्त्र, प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों में घट-बढ़ से सम्बद्ध माध्यिका आय में घट-बढ़ का आकलन है। समाजशास्त्री "अन्य बातें समान रहने पर" कहने का प्रादी है। इस दृष्टान्त में, अन्य बात जो समान रखी गई है, वह है विभिन्न क्षेत्रों में माध्यिका स्कूल शिक्षा। जहाँ तक उन क्षेत्रों का सम्बन्ध है जिनमें माध्यिका स्कूल शिक्षा तो समान है किन्तु प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों के सम्बन्ध में भिन्नता है, क्षेत्रों के बीच व्यावसायिक आदि कर्मचारियों में एक प्रतिशत की प्रत्येक घट बढ़ माध्यिका आय में $b_{12.4}$ की घट-बढ़ के साथ सामान्यतः रहेगी। आकलन समीकरण में अन्य b गुणांक की सामान्यमान के आधार पर व्याख्या की जाती है और अधोलिखित में दशमलव बिन्दु के बाहिनी धोर का अंक उस कारक की धोर संकेत करता है जिसे स्थिर रखा गया है। हाँ, वास्तव में केवल प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों की आय पर प्रभाव जानने के लिए हमें अन्य सब तत्वों को, न कि केवल पूर्ण हुए माध्यिका स्कूल वर्षों को, स्थिर रखना चाहिए। उद्योगों हम अधिकाधिक चरों को प्रस्तुत करते हैं, यह अभीष्ट परिस्थिति अधिकाधिक गहरी सन्निकट होती जाती है। स्थिर $a_{1.23}$ माध्यिका आय के लिए परिकल्पित मूल्य है जब अन्य विचारित तत्वों का मूल्य शून्य हो। किसी क्षेत्र के लिए माध्यिका आय का आकलन प्रत्येक स्वतन्त्र चर तथा a के मूल्य के योग से सम्बद्ध गुड राशियाँ का योग होता है।

यहाँ हम यह कह सकते हैं कि प्रकृति-विज्ञानी अपने प्रयोग की योजना प्रायः इस प्रकार बना सकता है जिससे कई एक चरों पर नियन्त्रण किया जा सके, जैसे, उदाहरण के लिए, तापमान, भारतांश यथवा वायु दाब। जीव-विज्ञानी तथा कृषि-प्रयोगकर्ता अपने चरों पर पर्याप्त नियन्त्रण रख सकते हैं। दूसरी ओर, अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र तथा अधिनाश सामाजिक शास्त्रों को प्रायः प्रयोगात्मक प्रणाली की अपेक्षा पर्यवेक्षण-आत्मक प्रणाली को अपनाना पड़ता है। इन क्षेत्रों में काम करने वालों का प्रयुक्त सामग्री पर प्रायः केवल असंख्य सीमित नियन्त्रण रहने के कारण उन्हें इस अध्याय में स्पष्ट की गई तकनीकों द्वारा चरों में से कुछ को सार्वजनिक विधि से (प्रयोगात्मक विधि की अपेक्षा) स्थिर रखने का प्रयत्न करना पड़ेगा।²

1 पारिभाषिक रूप में किसी चर का ध्यान, अन्य चरों पर उसके प्रभाव को घटा कर रखा जाता है। इस प्रकार यदि

$$x_{s1.2} = x_1 - x_{c1.2},$$

$$x_{s2.2} = x_2 - x_{c2.2},$$

$$x_{s2.3} = x_1 - x_{c1.3},$$

$$x_{s2.3} = x_2 - x_{c2.3},$$

तो $b_{12.3}$ पर $x_{s1.3}$ का दाल है तथा $b_{13.2}$ पर $x_{s2.2}$ का दाल है। विशेष रूप में

$$b_{12} = \frac{\sum x_1 x_2}{\sum x_2^2}, \text{ किन्तु } b_{12.3} = \frac{\sum x_{s1.3} x_{s2.3}}{\sum x_{s2.3}^2};$$

$$b_{13} = \frac{\sum x_1 x_3}{\sum x_3^2}, \text{ किन्तु } b_{13.2} = \frac{\sum x_{s1.2} x_{s3.2}}{\sum x_{s3.2}^2}.$$

2 अन्य विधि जो प्रायः व्यावहारिक नहीं है, प्रक्षिप्त आँकड़ों से उन प्रेक्षणों का चयन करना है, जिनका अध्ययन के अन्तर्गत चर को छोड़कर शेष सब स्वतन्त्र चरों के सम्बन्ध में स्थिर मूल्य हो।

जैसा पिछले उदाहरणों में दिखाया गया है, आश्रित श्रेणी की कुल विभिन्नता दो राशियों का योग होती है (1) उस श्रेणी के आकलित मूल्यों में उनके माध्य से विभिन्नता, तथा (2) आकलित मूल्यों में वास्तविक मूल्य की विभिन्नता, अर्थात्

$$\sum x_{12}^2 = \sum r_{c12}^2 + \sum v_{c12}^2$$

सम्बन्ध-मापों की परिकलन-विधि अनिवार्यतः वही है जो सरल सहसम्बन्ध की है। आकलन की मानक त्रुटि है

$$s_{12} = \sqrt{\frac{\sum r_{c12}^2}{N}}$$

तथा अनेकधा निर्धारण का गुणांक है

$$R_{12}^2 = \frac{\sum \lambda_{c12}^2}{\sum x_1^2}$$

R_{12}^2 कुल घट-बढ़ के अनुपात को व्यक्त करता है जो परिकलित या X_{c12} मानों के घट-बढ़ों में उपस्थित है, तथा जिसकी स्वतन्त्र चरों की ओर संकेत द्वारा व्याख्या की गई है। अनेकधा सहसम्बन्ध का गुणांक R_{12} अनेकधा निर्धारण के गुणांक का वर्गमूल है। R का कोई चिह्न नहीं है, क्योंकि एक स्वतन्त्र चर के साथ साहचर्य धनात्मक हो सकता है किन्तु दूसरे में ऋणात्मक या नकारात्मक। यहाँ इस बात पर ध्यान देना रुचिकर होगा कि जैसे-जैसे प्रतिरिक्त सहचर स्वतन्त्र चरों को एक समस्या में लाया जाता है, R_{12} 0 में पहुँच जाता है। 0 पर तथा s_{12} 0 में पहुँच जाता है शून्य पर। यदि हम सब सगत स्वतन्त्र चरों को सम्मिलित कर पाते तो R_{12} 1.0 होगा, तथा हम X_1 के पूर्ण आकलन कर सकते थे।

आंशिक सहसम्बन्ध—हम देख चुके हैं कि चर X_3 का प्रयोग कुछ मात्रा में व्याख्यात घट-बढ़ में प्रतिकलित हुआ जो $\sum r_{c12}$ द्वारा संकेतित है, किन्तु आश्रित चर की कुछ घट-बढ़ की व्याख्या नहीं हुई, यह थी $\sum v_{c12}$ । X_2 के प्रतिरिक्त X_3 के प्रवेश से $\sum v_{c12}$ द्वारा संकेतित व्याख्यात घट-बढ़ प्राप्त हुई जो अवश्यमेव $\sum v_{c12}$ में अधिक होता चाहिए यदि चर X_3 समस्या से सम्बद्ध है। $\sum r_{c12}$ किसी भी दशा में $\sum x_{c12}^2$ से कम नहीं हो सकता।

अब, X_2 द्वारा व्याख्यात घट-बढ़ की मात्रा $\sum r_{c12}$ थी, किन्तु X_2 के घट-बढ़ की $\sum r_{c12}^2 \sim \sum x_{c12}^2$ द्वारा संकेतित एक प्रतिरिक्त मानों की व्याख्या प्रस्तुत की। यदि हम लिखें

$$\frac{\sum r_{c12}^2 - \sum x_{c12}^2}{\sum x_{c12}^2}$$

तो हमारे पास आंशिक निर्धारण का गुणांक r_{12}^2 होगा। उपर्युक्त व्यञ्जक की शब्दों में तथा अधिक सामान्य रूप में व्यक्त करने के लिए हम कह सकते हैं कि आंशिक निर्धारण का गुणांक (1) अन्य स्वतन्त्र चर के प्रवेश के परिणामस्वरूप होने वाले आश्रित चर के परिकलित मानों की घट-बढ़ में वृद्धि का अनुपात का (2) नए चर के प्रवेश से पूर्व व्याख्यात घट-बढ़ के साथ अनुपात है।

यद्यपि

$$\sum r_{c12}^2 = \sum x_1^2 - \sum r_{c12}^2$$

अतः $r_{13.2}^2$ के व्यञ्जक को निम्नलिखित दो विधियों में से किसी एक में लिखा जा सकता है

$$r_{13.2}^2 = \frac{\sum x_{13.2}^2 - \sum x_{1.2}^2}{\sum x_{13.2}^2} \quad \text{अथवा} \quad \frac{\sum x_{13.2}^2 - \sum x_{1.2}^2}{\sum x_{1.2}^2 - \sum x_{1.2}^2}.$$

यदि पिछले व्यञ्जक के भाज्य तथा हर का $\sum x_{1.2}^2$ से भाग दिया जाए, तो हम पायेंगे

$$r_{13.2}^2 = \frac{R_{13.2}^2 - r_{12}^2}{1 - r_{12}^2}$$

इस रूप में आंशिक निधारण के गुणांक को निम्नलिखित का अनुपात समझा जा सकता है (1) अन्य स्वतन्त्र चर के प्रवेश के परिणामस्वरूप आंशिक चर के परिकल्पित मानों की घटवट के अनुपात में वृद्धि का (2) नए चर के प्रवेश से पूर्व अव्याहतता घटवट के अनुपात के साथ।

$r_{13.2}$ $r_{13.1}$ का वर्गमूल आंशिक महसम्बन्ध का गुणांक है और यह आकलन समीकरण में b_{13} का चिह्न लाने का है। आंशिक सहसम्बन्ध के गुणांक का प्रयोग 13.2 हमारी समस्या के लिए प्रयोज्य करना है कि सहसम्बन्ध माध्यिका आय X_1 , तथा माध्यिका स्कूल वर्ष X_2 में है, जब प्रतिजन व्यावसायिक, तकनीकी तथा सजातीय कर्मचारियों X_3 को \bar{X}_3 का मान पर स्थिर रखा गया है। यदि हम ऐसे क्षेत्र चुन लें जो व्यवसाय के विचार से निम्नलिखित समान हों तो उन क्षेत्रों की माध्यिका आय तथा माध्यिका स्कूल वर्षों में सरल सहसम्बन्ध प्रायः उपर्युक्त आंशिक महसम्बन्ध के गुणांक के समान होगा। आंशिक (या निवल) सहसम्बन्ध गुणांक का एक उद्देश्य आंशिक चर की घटवटों की व्याख्या में किसी समस्या में विभिन्न स्वतन्त्र चरों का सापेक्ष महत्त्व की धार प्रस्तुत करना है।

परिकलन विधि

योगफल का परिकलन—क्योंकि इस अध्याय में चार चरों में सम्बन्ध के मापों की संकेत समस्या की आवश्यकता पड़ेगी, अतः विभिन्न मूलों के लिए आवश्यक सभी मानों का एक साथ परिकलन करना सुविधाजनक होगा। चार श्रेणियों के लिए मूल आंकड़े, अपने योगफल और अकण्ठितीय माध्यों सहित सारणी 21.2 में दिए गए हैं। अलग-अलग वर्ग और गुणनफल तथा वर्गों और गुणनफल के योगफल सारणी 21.3 में दिखाए गए हैं। इनसे हम वर्गीकृत विचलनों के योग तथा विचलनों के गुणनफल के योग प्राप्त करते हैं। उदाहरण के लिए,³

3 इन समीकरणों की व्युत्पत्ति पर्याप्त स्पष्ट है।

$$\begin{aligned} \sum x_1^2 &= \sum (X_1 - \bar{X}_1)^2, \\ &= \sum (X_1^2 - 2\bar{X}_1 X_1 + \bar{X}_1^2), \\ &= \sum X_1^2 - 2\bar{X}_1 \sum X_1 + N\bar{X}_1^2, \\ &= \sum X_1^2 - 2\bar{X}_1 \sum X_1 + \bar{X}_1 \sum X_1, \\ &= \sum X_1^2 - \bar{X}_1 \sum X_1 \\ \sum x_1 x_2 &= \sum [(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)], \\ &= \sum (X_1 X_2 - \bar{X}_1 X_2 - \bar{X}_2 X_1 + \bar{X}_1 \bar{X}_2), \\ &= \sum X_1 X_2 - \bar{X}_1 \sum X_2 - \bar{X}_2 \sum X_1 + N\bar{X}_1 \bar{X}_2, \\ &= \sum X_1 X_2 - \bar{X}_1 \sum X_2 - \frac{\sum X_1 \sum X_2}{N} + \frac{\sum X_1 \sum X_2}{N}, \\ &= \sum X_1 X_2 - \bar{X}_1 \sum X_2 \end{aligned}$$

सारणी 21 2

1960 में सयुक्त राज्य के 19 क्षेत्रों के लिए माध्यिका आय प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी, एवं सजातीय कमचारी पूर्ण हुए माध्यिका स्कूल वर्ष तथा प्रतिशत प्रवासी

क्षेत्र	माध्यिका आय (सहस्र डालरों में) X_1	प्रतिशत व्यावसायिक तक- नीकी एवं सजातीय कमचारी X_2	पूर्ण हुए माध्यिका स्कूल वर्ष X_3	प्रतिशत प्रवासी X_4
1	59	11.7	11.3	12.9
2	68	12.5	10.7	15.8
3	61	11.1	10.1	11.2
4*	67	13.7	11.2	15.9
5	57	10.7	10.2	10.0
6	62	10.9	10.9	14.0
7	61	10.9	10.8	14.4
8	66	10.7	10.5	12.8
9	58	10.7	10.6	15.4
10	51	9.8	10.3	18.0
11	52	11.3	11.4	22.9
12	51	11.0	9.8	19.4
13	43	9.2	9.8	24.2
14	41	9.3	8.8	13.7
15	38	9.2	8.9	15.4
16	45	11.1	10.3	24.0
17	59	12.0	12.0	23.7
18	67	13.7	12.1	24.5
19	49	10.8	10.4	20.7
योग	1055	210.3	200.1	328.9
माध्य	55.52632	11.068421	10.531579	17.310526

*-यूनायटिड स्टेट्स नगर को छोड़कर शेष यूनायटिड स्टेट्स के लिए आंकड़ों का निम्नलिखित सम्बन्ध न परिवर्तन किया गया

$$N_{upstate} Med_{upstate} = N_{state} Med_{state} - N_{city} Med_{city}$$

माध्यिका आय प्रतिशत व्यावसायिक तकनीकी एवं सजातीय कमचारियों पूर्ण हुए माध्यिका स्कूल वर्षों तथा प्रतिशत प्रवासी को प्रत्येक राज्य का जनगणना से प्राप्त किया गया ताकि प्रत्येक राज्य के लिए भारत जनगणना माध्य प्राप्त किया जा सके।

जॉइंट सयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो द्वारा प्रकाशित यू० एस० मन्सल ऑफ पापुलेशन 1960, प्रप 1 कंरिक्टिक्न ऑफ दि पापुलेशन भाग 1 युनाइटेड स्टेट्स नमरो, पृष्ठ 1-248, 1-249, 1-277 से।

सारणी 213

सांख्यिका आय तथा तीन स्वतन्त्र चरों के मध्य सम्बन्ध के मापों के लिए वर्गा गुणनफलों और योगों का परिकलन
(संयुक्त राज्य के 19 शहरों के लिए 1960)

क्षेत्र	X_1^2	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_2^2	X_2X_3	X_2X_4	X_3^2	X_3X_4	X_4^2
1	34 81	69 03	66 67	76 11	136 89	132 21	150 93	127 69	145 77	166 41
2	46 24	85 00	72 76	107 44	156 25	133 75	197 51	114 29	169 06	249 64
3	37 21	67 71	61 61	68 32	123 21	112 11	124 32	102 01	113 12	125 44
4	44 89	91 79	75 04	106 53	187 69	153 44	217 83	125 44	178 08	252 81
5	32 49	60 99	58 14	59 00	114 49	109 14	107 00	104 04	102 00	100 00
6	38 44	67 58	67 58	86 80	118 81	118 81	152 61	118 81	152 60	196 00
7	37 21	66 49	65 88	87 84	118 81	117 72	156 96	116 64	155 52	207 36
8	43 36	70 62	69 30	84 48	114 49	112 35	136 96	110 25	134 40	163 84
9	33 64	62 06	61 48	89 32	114 49	113 42	164 78	112 36	163 24	237 16
10	26 01	49 98	52 53	91 80	96 04	100 94	176 41	106 09	185 40	324 00
11	27 04	58 76	59 28	119 08	127 69	128 82	258 77	129 96	261 06	524 41
12	26 01	56 10	49 98	98 94	121 00	107 80	213 49	96 04	199 12	376 36
13	18 49	39 56	42 14	104 06	84 64	90 16	222 64	96 04	237 16	585 64
14	16 81	38 13	36 08	56 17	86 49	81 84	127 41	77 44	120 56	187 69
15	14 44	34 96	33 82	58 52	84 64	81 88	141 68	79 21	137 06	237 16
16	20 25	49 95	46 35	108 00	123 21	114 33	266 40	106 09	247 20	576 00
17	31 81	70 80	70 80	139 83	144 00	144 00	284 40	144 00	284 40	561 69
18	44 89	91 79	81 07	164 15	187 69	165 77	335 65	146 41	296 45	690 25
19	24 01	52 92	50 96	101 43	116 64	112 32	223 56	108 16	215 28	428 49
योग	601 25	1 184 22	1 121 47	1 805 82	2 357 17	2 230 81	3 659 19	2 121 17	3 488 48	6 100 35

सारणी 212 के बीजों पर आधारित।

$$\Sigma x_1^2 = \Sigma Y_1^2 - \bar{X}_1 \Sigma X_1$$

$$\Sigma x_2^2 = \Sigma Y_2^2 - \bar{X}_2 \Sigma X_2$$

$$\Sigma x_1 x_2 = \Sigma Y_1 X_2 - \bar{X}_1 \Sigma X_2 \text{ अथवा } \Sigma Y_1 X_2 - \bar{X} \Sigma Y_1$$

$$\Sigma x_1 x_3 = \Sigma Y_1 X_3 - \bar{X}_1 \Sigma X_3 \text{ अथवा } \Sigma Y_1 X_3 - \bar{X}_3 \Sigma Y_1$$

अन्य योगफलों के लिए इन तथा समान सूत्रों के प्रयोग से प्राप्त होते हैं ।⁴

$$\Sigma x_1^2 = 601.25 - (5.552632)(105.5) = 15.447$$

$$\Sigma x_2^2 = 2,357.17 - (11.068421)(210.3) = 29.481$$

$$\Sigma x_3^2 = 2,121.17 - (10.531579)(200.1) = 13.801$$

$$\Sigma x_4^2 = 6,100.35 - (17.310526)(328.9) = 406.918$$

$$\Sigma x_1 x_2 = 1,184.22 - (5.552632)(210.3) = 16.502$$

$$\Sigma x_1 x_3 = 1,121.47 - (5.552632)(200.1) = 10.388$$

$$\Sigma x_1 x_4 = 1,805.82 - (5.552632)(328.9) = -20.441$$

$$\Sigma x_2 x_3 = 2,230.81 - (11.068421)(200.1) = 16.019$$

$$\Sigma x_2 x_4 = 3,659.19 - (11.068421)(328.9) = 18.786$$

$$\Sigma x_3 x_4 = 3,488.48 - (10.531579)(328.9) = 24.644$$

सम्बन्ध के सकल माप—सरल सहसम्बन्ध वास्तव में सकल सहसम्बन्ध है, क्योंकि यह दो चरों के मध्य सम्बन्ध को, अन्य चरों के प्रभाव के लिए सहसम्बन्ध तकनीक द्वारा बिना किसी समझ के, मापता है । परिचयात्मक अनुभाग में विकसित प्रतीकों का प्रयोग करते हुए, यदि हम माधिका प्राय X_1 का केवल प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी एवं मजदूरीय कर्मचारियों X_2 से सहसम्बन्ध स्थापित करना चाहे तो हम निम्नांकित मापों का परिकलन करते हैं

प्राकलन समीकरण :

$$\lambda_{1.2} = a_{1.2} + b_{1.2} Y_2 \text{ अथवा } x_{1.2} = b_{1.2} x_2$$

प्रामाण्य समीकरण :

$$\text{I} \quad \Sigma Y_1 = N a_{1.2} + b_{1.2} \Sigma Y_2 \text{ अथवा } \bar{X}_1 = a_{1.2} + b_{1.2} \bar{X}_2$$

$$a_{1.2} = \bar{X}_1 - b_{1.2} \bar{X}_2$$

$$\text{II} \quad \Sigma X_1 X_2 = a_{1.2} \Sigma Y_2 + b_{1.2} \Sigma X_2^2 \text{ अथवा } \Sigma \lambda_{1.2} X_2 = b_{1.2} \Sigma Y_2^2$$

$$b_{1.2} = \frac{\Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_2^2}$$

कुल घटवट

$$\Sigma r_1^2 = \Sigma X_1^2 - \bar{X}_1 \Sigma X_1$$

परिकलित मानों के वर्गों का योगफल तथा व्याख्यात घटवट

$$\Sigma \lambda_{1.2}^2 = a_{1.2} \Sigma Y_1 + b_{1.2} \Sigma Y_1 Y_2 \quad \Sigma r_{1.2}^2 = b_{1.2} \Sigma x_1 x_2$$

$$(\text{व्याख्यात वर्गों का योग}) \quad (\text{व्याख्यात घटवट})$$

⁴ सारणी 21.2 में प्रेषणा में दो या तीन महत्त्वपूर्ण घन हैं । अब सारणी 21.3 में गुणनफल प्राय चार या पाँच अथवा उस घनित बिन्दु के हैं । इस अध्याय में इन मानों से परिकलित विभिन्न मापों में दो या तीन में अति महत्त्वपूर्ण घन नहीं हो सकते । फिर भी परिकलनों पर आन्तरिक त्रुटि के निमित्त तथा मध्य-वर्ती परिकलन पर आधारित अन्तिम परिणामों की परिशुद्धता में योगदान के निमित्त अति अति अति बिन्दु

अव्याख्यात घटबढ

$$\Sigma x_{c1\ 2}^2 = \Sigma X_1^2 - \Sigma Y_1^2, \text{ अथवा } \Sigma X_1^2 - \Sigma x_{c1}^2,$$

आकलन की मानक त्रुटि

$$s_{1\ 2} = \sqrt{\frac{\Sigma x_{c1}}{N}} \\ = \sqrt{\frac{\Sigma Y_1^2 - \Sigma X_1^2}{N}} \text{ अथवा } \sqrt{\frac{\Sigma Y_1^2 - \Sigma x_{c1}^2}{N}},$$

सहसम्बन्ध का गुणांक

$$r_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma Y_1 - A_1 \Sigma X_1}{\Sigma Y_1^2 - A_1 \Sigma X_1}} \text{ अथवा } \sqrt{\frac{\Sigma Y_1^2 - \Sigma x_{c1}^2}{\Sigma Y_1^2}}$$

पाठको का ध्यान पहन ही हम बात पर गया होगा कि हमने सरल सहसम्बन्ध में प्रयुक्त विभिन्न समाकरणों और सूत्रों को ही कुछ भिन्न प्रतीकों के साथ प्रस्तुत किया है।

इन व्यञ्जकों पर आधारित परिकलनों के परिणाम नीचे दिए गए हैं। निरर्थक श्रम को बचाने के लिए, माध्यों से विचलनों का उपयोग करते हुए, ऊपर दाहिनी ओर दिए गए सूत्रों का प्रयोग किया गया है।

आकलन समीकरण के लिए स्थिरांक

$$b_{12} = \frac{16\ 502}{29\ 481} = +0\ 55975$$

$$a_{1\ 2} = 5\ 5526 \quad (0\ 55975)(11\ 068421) = -0\ 6429.$$

आकलन समीकरण

$$Y_{c1\ 2} = -0\ 6429 + 0\ 55975 X_2 \\ x_{c1\ 2} = +0\ 55975 x_2$$

कुल घटबढ

$$\Sigma x_1^2 = -601\ 25 - (5\ 552632)(105\ 5) = 15\ 447$$

व्याख्यात घटबढ

$$\Sigma x_{c1\ 2}^2 = (0\ 55975)(16\ 502) = 9\ 237$$

अव्याख्यात घटबढ

$$\Sigma x_{1\ 2}^2 = 15\ 447 - 9\ 237 = 6\ 210$$

आकलन की मानक त्रुटि

$$s_{1\ 2}^2 = \frac{6\ 210}{19} = 0\ 3268$$

$$s_{1\ 2} = 0\ 571$$

सहसम्बन्ध का गुणांक

$$r_{12}^2 = \frac{9\ 237}{15\ 447} = 0\ 59798$$

$$r_{12} = 0\ 7733$$

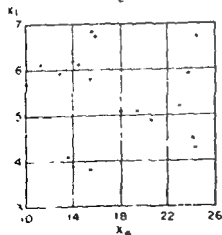
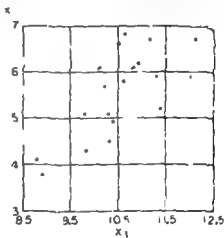
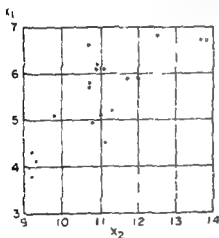
चर 3 के लिए समान विधि को अपनाते हुए, हम पाते हैं :

$$\begin{aligned} b_{13} &= +0.75270, \\ a_{13} &= -2.3715, \\ \Sigma x_{13}^2 &= 7.819, \\ \Sigma x_{31}^2 &= 7.628, \\ s_{13} &= 0.634, \\ r_{13} &= 0.50618, \\ r_{31} &= +0.7115 \end{aligned}$$

चार्ट 21.1 माधिका आय तथा विचाराधीन स्वतन्त्र चरो में से प्रत्येक के मध्य सरल सम्बन्ध के प्रकीर्ण प्राप्ति को प्रस्तुत करता है। इन तीन सम्बन्धों के लिए सहसम्बन्ध गुणांक तथा तीन स्वतन्त्र चरो के मध्य सहसम्बन्ध के गुणांक है

$$\begin{aligned} r_{12} &= +0.7733 & r_{23} &= +0.7942 \\ r_{13} &= +0.7115 & r_{34} &= +0.1715 \\ r_{41} &= -0.2578 & r_{34} &= +0.3289 \end{aligned}$$

यहाँ हम बात पर ध्यान देना रुचिकर होगा कि प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी एवं सजातीय कर्मचारी, X_2 , ने माधिका आय के साथ उच्चतम सरल सहसम्बन्ध को व्यक्त



चार्ट 21.1 माधिका आय X_1 तथा तीन स्वतन्त्र चरो प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी, एवं सजातीय कर्मचारी X_2 , पूर्ण हुए माधिका स्कूल वर्ष X_3 , और प्रतिशत प्रवासी X_4 में से प्रत्येक के प्रकीर्ण प्राप्ति । बिन्दु संख्या 21.2 से ।

किया, तथा प्रतिशत प्रवासी, X_1 , ने न्यूनतम का। घ्राणे हम देखेंगे कि क्या अन्य चरो का प्रभाव हटा दिए जाने पर स्वतन्त्र चर महत्व की उसी कोटि को बनाए रखते हैं।

दो स्वतन्त्र चर अनेकधा सहसंबन्ध—निस्सन्देह, हम माध्यिका आय के अधिक परिशुद्धता के साथ आकलन की आशा कर सकते हैं, यदि हम केवल एक की अपेक्षा दो स्वतन्त्र चरा पर विचार करें। अब आइये हम प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों तथा माध्यिका स्कूल वर्गों दोनों से आकलन करें। आकलन समीकरण इस प्रकार होगा

$$Y_{123} = a_{123} + b_{123}X_1 + b_{132}X_2,$$

अथवा, विचलनों की दशा में,

$$x_{123} = b_{123}x_1 + b_{132}x_2$$

X_1 तथा a क पश्चात् 1 23 अधोनेत्र हम बताते हैं कि हम X_1 (प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों) तथा X_2 (माध्यिका स्कूल वर्गों) चरो से X_1 (माध्यिका आय) के मानों का आकलन कर रहे हैं। प्रथम b , समान माध्यिका स्कूल वर्ग संयोजन वाले क्षेत्रों के लिए प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों में इकाई परिवर्तन के साथ सम्बद्ध माध्यिका आय में प्रसामान्य परिवर्तन का परिचायक है, दूसरा b समान प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों वाले क्षेत्रों के लिए माध्यिका स्कूल वर्गों में इकाई परिवर्तन के साथ सम्बद्ध माध्यिका आय में प्रसामान्य परिवर्तन को व्यक्त करता है।

आवश्यक प्रसामान्य समीकरण है

$$I \quad \Sigma Y_1 = Na_{123} + b_{12} \Sigma X_2 + b_{13} \Sigma X_3,$$

$$II \quad \Sigma Y_1 Y = a_{123} \Sigma X_1 + b_{123} \Sigma Y_2^2 + b_{133} \Sigma X_2 X_3,$$

$$III \quad \Sigma X_1 Y_2 = a_{123} \Sigma Y_2 + b_{12} \Sigma Y_2 Y_3 + b_{13} \Sigma Y_3^2$$

यदि प्रसामान्य समीकरणों को माध्यो से विचलनों के रूप में प्रस्तुत किया जाए तो पर्याप्त श्रम-निवारण किया जा सकता है। इस दशा में प्रथम समीकरण अदृश्य हो जाता है, क्योंकि Σx_1 , Σx_2 , तथा Σx_3 प्रत्येक शून्य है। शेष दो समीकरण हैं।

$$II \quad \Sigma x_1 x_2 = b_{12} \Sigma x_2^2 + b_{13} \Sigma x_2 x_3,$$

$$III \quad \Sigma x_1 x_3 = b_{12} \Sigma x_2 x_3 + b_{13} \Sigma x_3^2$$

आवश्यक प्रतिस्थापन करने से, हम पाते हैं

$$II \quad 16\ 502 = 29\ 451b_{123} + 16\ 019b_{132},$$

$$III \quad 10\ 388 = 16\ 019b_{123} + 13\ 801b_{132}$$

इन युगपत् समीकरणों को हल करने पर प्राप्त होता है :

$$b_{123} = +0\ 40820,$$

$$b_{132} = +0\ 27889$$

a_{123} प्राप्त करने के लिए, हम समीकरण I का प्रयोग करते हैं, इस N से भाग देने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\bar{X}_1 = a_{123} + b_{123}\bar{X}_2 + b_{132}\bar{X}_3$$

$$\begin{aligned}
 a_{1\ 23} &= \bar{X}_1 - b_{1\ 2} \bar{X}_2 - b_{1\ 3} \bar{X}_3 \\
 &= 5\ 552\ 632 - (0\ 408\ 20)(11\ 068\ 421) - (0\ 278\ 89)(10\ 531\ 579), \\
 &= -1\ 902\ 6
 \end{aligned}$$

तब आकलन समीकरण है

$$Y_{c1\ 23} = -1\ 903 - 0\ 408 X_2 + 0\ 279 X_3$$

व्याख्यात घटबढ़ है⁶

$$\begin{aligned}
 \Sigma x_{c1\ 23} &= b_{12} \Sigma x_1 x_2 + b_{13} \Sigma x_1 x_3 \\
 &= (0\ 408\ 20)(16\ 502) + (0\ 278\ 89)(10\ 388) \\
 &= 9\ 633
 \end{aligned}$$

सम्बन्ध के अन्य मापों का परिकलन अब यथावत् उस ढंग से किया जाता है जिससे केवल एक स्वतन्त्र चर होने पर होना है।

$$\begin{aligned}
 \Sigma x_{1\ 23}^2 &= \Sigma x_1^2 - \Sigma x_{c1\ 23}^2 \\
 &= 15\ 447 - 9\ 633 = 5\ 814
 \end{aligned}$$

$$s_{1\ 23} = \frac{\Sigma x_{1\ 23}}{N} = \frac{5\ 814}{19} = 0\ 3060,$$

$$s_{1\ 23} = 0\ 553$$

$$R_{1\ 23}^2 = \frac{\Sigma x_{c1\ 23}^2}{\Sigma x_1^2} = \frac{9\ 633}{15\ 447} = 0\ 6236,$$

$$R_{1\ 23} = 0\ 7897$$

अनेकधा निर्धारण $R_{1\ 23}$ का गुणांक 0 6236 होने के कारण, हमने X_1 में उपस्थित घटबढ़ की 62 प्रतिशत व्याख्या की है। ध्यान दीजिए कि r_{12}^2 अथवा r_{13}^2 से $R_{1\ 23}^2$ बृहत् है, जब r_{12}^2 0 50618 था, तब r_{13}^2 का मान 0 59798 पाया गया।

आकलन की मानक त्रुटि $s_{1\ 23}$ 0 553 अभिनिश्चित की गई जो $s_{1\ 2} = 0\ 571$ अथवा $s_{1\ 3} = 0\ 634$ दोनों से लघु है। दो स्वतन्त्र चरों X_2 और X_3 के प्रयोग द्वारा X_1 के आकलन, केवल X_2 अथवा X_3 में से किसी एक के प्रयोग द्वारा किये गये आकलनों की अपेक्षा अधिक सतोपजनक होगे। विशेष रूप से, X_1 मानों का मानक विचलन आकलन समीकरण

$$Y_{c1\ 23} = a_{1\ 23} + b_{12\ 3} X_2 + b_{13\ 2} X_3$$

के निकट मान ग्रहण करता है। यह Y_1 मानों के मानक विचलन लगभग

$$Y_{c1\ 2} = a_{1\ 2} + b_{12} X_2$$

अथवा, लगभग

$$Y_{c1\ 3} = a_{1\ 3} + b_{13} X_3$$

से कम है।

⁶ माय हो, $\Sigma x_{c1\ 23}^2 = \Sigma Y_{c1\ 23}^2 - \bar{X}_1 \Sigma Y_1$, जहाँ $\Sigma X_{c1\ 23}^2 = a_{1\ 23} \Sigma X_1 + b_{12\ 3} \Sigma Y_1 X_2 + b_{13\ 2} \Sigma Y_1 X_3$

दो स्वतंत्र चर : आंशिक सहसम्बन्ध—जब केवल एक स्वतंत्र चर (प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारी) पर विचार किया गया, तब व्याख्यात घटवट धी $\Sigma x_{c1,2}^2 = 9\ 237$ जब दो स्वतंत्र चरों (प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारी तथा माध्यिका स्कूल वर्षों) का प्रयोग किया गया तब व्याख्यात घटवट बढ़ कर $\Sigma x_{c1,23}^2 = 9\ 633$ हो गई। अतएव, माध्यिका स्कूल वर्षों द्वारा व्याख्यात घटवट में वृद्धि

$$\Sigma x_{c1,23}^2 - \Sigma x_{c1,2}^2 = 9\ 633 - 9\ 237 = 0\ 396$$

हुई। केवल प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों पर विचार करने के बाद, जिस घटवट की व्याख्या करना शेष है, वह

$$\begin{aligned}\Sigma x_{c1,2}^2 &= \Sigma x_1^2 - \Sigma x_{c1,2}^2 \\ &= 15\ 447 - 9\ 237 = 6\ 210\end{aligned}$$

थी। तब पहले अव्याख्यात घटवट का अनुपात, जिसकी व्याख्या माध्यिका स्कूल वर्षों की भी सम्मिलित करके की गई सानुपातिक है।

$$\frac{0\ 39616}{6\ 210} = 0\ 06379$$

जैसा पहले नोट किया जा चुका है, यह अनुपात आंशिक निर्धारण का गुणांक कहलाता है, जिसका वगमूल आंशिक सहसम्बन्ध का गुणांक है। अर्थात्

$$\begin{aligned}r_{13,2}^2 &= \frac{\Sigma x_{1,23}^2 - \Sigma x_{c1,2}^2}{\Sigma x_1^2 - \Sigma x_{c1,2}^2} = \frac{\Sigma x_{c1,23}^2 - \Sigma x_{c1,2}^2}{\Sigma x_{c1,2}^2} \\ &= \frac{9\ 633 - 9\ 237}{6\ 210} = 0\ 06379;\end{aligned}$$

$$r_{13,2} = \pm 0\ 2525$$

इस आंशिक सहसम्बन्ध के गुणांक का चिह्न वही है, जो आकलन समीकरण में $b_{13,2}$ का है। यह गुणांक माध्यिका आय और माध्यिका स्कूल वर्षों में सम्बन्ध की सन्नि-
कटता का माप है जब प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों को सांख्यिकीय रूप से स्थिर रखा गया हो, यह सरल सहसम्बन्ध गुणांक है, जो समान प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्म-
चारियों वाले क्षेत्रों के सम्बन्ध में प्रत्याशित होगा। जैसा पहले कहा जा चुका है, यदि $r_{13,2}^2$ के लिए उपयुक्त व्यञ्जक के भाज्य और हर दोनों को Σx_1^2 से भाग दिया जाए तो हम आंशिक निर्धारण गुणांक तथा दो मूल निर्धारण गुणांकों के मध्य सम्बन्ध प्रदर्शित करने वाला सूत्र पायेंगे। इस प्रकार,

$$\begin{aligned}r_{13,2}^2 &= \frac{R_{1,23}^2 - r_{12}^2}{1 - r_{12}^2}, \\ &= \frac{0\ 62363 - 0\ 54798}{1 - 0\ 59798} = 0\ 06379,\end{aligned}$$

$$r_{13,2} = \pm 0\ 2525$$

ध्यान दीजिए कि इस सूत्र में अंकित मानों में से प्रत्येक पिछले सूत्र का ही मान है जो 15 447 द्वारा विभाजित है (वास्तव में, $R_{1,23}^2$ तथा r_{12}^2 को प्राप्त करने के लिए पहले ही यही विधि अपनाई गई है)। इस सूत्र का आगे $R_{1,23}^2$ तथा

r_{12}^2 के परिकलन के लिए आवश्यक अन्तिम विभाजन की जाच-पड़ताल⁶ के लिए प्रयोग किया जा सकता है। इसका प्रयोग उम समय भी किया जा सकता है, जब r_{12}^2 का परिकलन $r_{12}^2 = \frac{\sum x_{12}^2}{\sum x_1^2}$ से भिन्न किसी अन्य विधि से किया जाए, अथवा जब निर्धारण के गुणांक, अथवा सहसम्बन्ध के गुणांक तो निर्दिष्ट हो, किन्तु मूल आंकड़े न हो।

$r_{12.3}$ के सट्टोयी माप के रूप में हमे आंशिक गुणांक $r_{12.3}$ प्राप्त कर लेना चाहिए, जो माध्यिका आय तथा प्रतिजन व्यावसायिक आदि कर्मचारियों के पारस्परिक सम्बन्ध को मापता है, जब कि माध्यिका स्कूल वर्षों को स्थिर रखा गया हो। हमारे आकलन समीकरण में प्रतिजन व्यावसायिक आदि कर्मचारियों और माध्यिका स्कूल वर्षों के प्रयोग द्वारा, न कि अकेले माध्यिका स्कूल वर्षों के प्रयोग से, परिकलित मानों की घटबढ़ में वृद्धि सालून करके हम ऐसा कर सकते हैं। इस प्रकार

$$\begin{aligned} r_{12.3}^2 &= \frac{\sum x_{12.3}^2 - \sum r_{12.3}^2}{\sum x_{12.3}^2} = \frac{9\ 633 - 7\ 819}{7\ 628}, \\ &= \frac{R_{12.3}^2 - r_{12}^2}{1 - r_{12}^2} = \frac{0\ 62363 - 0\ 50619}{0\ 49381}, \\ &= 0\ 23782, \\ r_{12.3} &= +0\ 4877 \end{aligned}$$

आंशिक गुणांक, जैसे $r_{12.3}$ तथा $r_{12.3}$ को प्रायः प्रथम-क्रम गुणांक कहा जाता है, क्योंकि एक चर स्थिर रखा गया है। मूल गुणांकों को शून्य क्रम गुणांक कहा जाता है क्योंकि उनमें कोई चर स्थिर नहीं रखा गया। इस अध्याय में आगे चल कर, हम $r_{12.34}$, $r_{12.34}$, तथा $r_{12.34}$ पर विचार करेंगे जो द्वितीय क्रम गुणांक है। साधारणतया कहा जाए तो क्रम अभिधान मान्यिकीय रूप से स्थिर रखे गए चरों की संख्या का परिचायक है।

माध्यिका आय तथा प्रतिजन व्यावसायिक, तकनीकी एवं मजदूरीय कर्मचारियों का पारस्परिक मूल सहसम्बन्ध r_{12} स्मरण करें $+0\ 7733$ था। दोनों चरों में माध्यिका स्कूल वर्षों की घटबढ़ों के प्रभाव को हटाने से सम्बन्ध में प्रचुर कमी हुई, क्योंकि $r_{12.3} = +0\ 4877$ इसी प्रकार, r_{12} माध्यिका आय और माध्यिका स्कूल वर्षों में मूल सहसम्बन्ध $+0\ 7115$ था। प्रतिजन व्यावसायिक आदि कर्मचारियों की घटबढ़ों के प्रभाव को हटाने का परिणाम हुआ $r_{12.34} = +0\ 2529$ यहाँ भी स्पष्ट कम हो गई। उद्धृत दोनों क्रियाएँ प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों और माध्यिका समाप्त स्कूल वर्षों के बीच अति उच्च सहसम्बन्ध $+0\ 7942$, के कारण है। पहले का और तब दूसरे का प्रभाव हटाने में आंशिक सहसम्बन्ध गुणांकों पर क्रमात्मक प्रभाव पड़ा।

$R_{1.2}$ तथा सकल और आंशिक सहसम्बन्ध के मापों में सम्बन्ध—पाठक को यह देख कर आश्चर्य होगा कि जब $r_{12} = +0\ 7733$ तथा $r_{12} = +0\ 7115$, तब $R_{1.2}$ केवल $0\ 7897$ है। यह इन मापों का लक्षण नहीं है कि अनन्त गुणांक दो सकल गुणांकों का

6 तथापि नोट करें कि $\sum x_{12}^2$ में आय दिए जाने के कारण भ्रान्त और हल की प्रवृत्ति एक सापेक्ष भ्रम की है।

योग हो। सम्बन्ध उसकी अनेक अधिक जटिल है।⁷ तथापि, यह कहा जा सकता है कि समान चिह्न वाले r_{12} और r_{13} के निदिष्ट मानों के लिए, स्वतंत्र चरों में जितनी ही द्विरावृत्ति कम होगा (यद्यपि उनका वनात्मक सहसंबंध जितना कम या ऋणात्मक सहसंबंध जितना अधिक होगा) उतना ही अनेकधा महसबध अधिक होगा। प्रस्तुत उदाहरण में, यह अत्यंत रुचिकर है कि $r_{23} = 0.794$ और इसलिए इन दो चरों में काफी द्विरावृत्ति का परिचायक है। इसीलिए माध्यिका स्कूल वर्षों अथवा प्रांतगत व्यावसायिक, तकनीकी एवं सजातीय कर्मचारियों को जोड़ देने से किसी भी अकेले स्वतंत्र चर के प्रयोग से प्राप्त महसबध की अपेक्षा महसम्बन्ध में कोई महत्वपूर्ण सुधार नहीं होता। इसका बिल्कुल उलट वास्तव में यह हमें कम कर देता है।⁸

महसबध का अनेकधा गणना दो आंशिक गुणांकों का योग भी नहीं है। तथापि, एक नवोद्भूत सम्बन्ध है (r_{12}^2 तथा r_{13}^2 के लिए अभी-अभी निदिष्ट व्यञ्जकों से व्युत्पन्न) जो निम्नांकित दो रूपां में से किसी भी रूप में लिखा जा सकता है

$$R_{1,23} = r_{12} + r_{13}^2(1 - r_{12}^2),$$

$$= 0.5980 + (0.0638)(1 - 0.4980) = 0.6236, \text{ अथवा}$$

$$R_{1,23} = r_{13} + r_{12}^2(1 - r_{13}^2),$$

$$= 0.5062 + (0.2378)(1 - 0.5062) = 0.6236$$

इन समीकरणों को पाठ्ये जाँचें। उक्त पर ध्यान देना रुचिकर होगा। उदाहरण के लिए प्रथम समाकरण में (1) एक स्वतंत्र चर के प्रयोग द्वारा व्याख्यात घटबढ़ के अनुपात तथा (2) (क) उक्त स्वतंत्र चर $1 - r_{12}^2$ द्वारा घटबढ़ात घटबढ़ के अनुपात, तथा (ख) प्रथम चर r_{12}^2 के अनिरिक्त अथ स्वतंत्र चर के प्रयोग के फलस्वरूप व्याख्यात (क) के अनुपात का गुणनफल का योग है।

तीसरे स्वतंत्र चर अनेकधा सहसंबंध— पिछले अनुच्छेदों में हमने, दो स्वतंत्र चरों, प्रतिशत व्यावसायिक तकनीकी एवं सजातीय कर्मचारियों, X_2 तथा माध्यिका समाप्त स्कूल-वर्षों X_3 पर विचार किया। यदि हम एक तीसरा स्वतंत्र चर, प्रतिशत प्रवासी X_4 और जोड़ दें, तो हम निम्न प्रकार के आकलन समीकरण का प्रयोग करेंगे

$$X_{1,234} = a_{1,234} + b_{1,24}X_2 + b_{1,34}X_3 + b_{1,44}X_4$$

7 सम्बन्ध निम्न प्रकार है

$$R_{1,23}^2 = \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}$$

इस उदाहरण में,

$$R_{1,23}^2 = \frac{0.5980 + 0.5062 - 2(0.7733)(0.7115)(0.7942)}{1 - 0.6307} = 0.6236,$$

$$R_{1,23} = 0.7897$$

8 एक एंगे अंशिक लौकिक स्थिति के लिए जिसमें किसी एक अकेले स्वतंत्र चर के प्रयोग से प्राप्त महसबध की अपेक्षा, एक और स्वतंत्र चर को जोड़ने में सहसम्बन्ध में सुधार हो जाता है मूल दशवीं पुस्तक का द्वितीय संस्करण, पृष्ठ 545—546 देखिए।

चार स्थिरांको को प्राप्त करने के लिए यदि हम X -मानों का प्रयोग करें तो चार प्रसामान्य समीकरणों की आवश्यकता पड़ती है। वे हैं

$$I \quad \Sigma X_1 = Na_{1 \cdot 234} + b_{12 \cdot 34} \Sigma X_2 + b_{13 \cdot 24} \Sigma X_3 + b_{14 \cdot 23} \Sigma X_4$$

$$II \quad \Sigma X_1 X_2 = a_{1 \cdot 234} \Sigma X_2 + b_{1 \cdot 34} \Sigma X_2^2 + b_{12 \cdot 34} \Sigma X_3 + b_{11 \cdot 23} \Sigma X_3^2 + b_{11 \cdot 24} \Sigma X_4$$

$$III \quad \Sigma X_1 X_3 = a_{1 \cdot 234} \Sigma X_3 + b_{1 \cdot 34} \Sigma X_3^2 + b_{13 \cdot 24} \Sigma X_4 + b_{14 \cdot 23} \Sigma X_3 X_4$$

$$IV \quad \Sigma X_1 X_4 = a_{1 \cdot 234} \Sigma X_4 + b_{1 \cdot 34} \Sigma X_2 X_4 + b_{12 \cdot 34} \Sigma X_3 X_4 + b_{14 \cdot 23} \Sigma X_3^2$$

तथापि, X मानों के प्रयोग द्वारा हम पहले की भांति प्रसामान्य समीकरण I का निरसन कर देने हैं। तब शेष समीकरण य होंगे

$$II \quad \Sigma X_1 X_2 = b_{12 \cdot 34} \Sigma X_2 + b_{1 \cdot 34} \Sigma X_2^2 + b_{14 \cdot 23} \Sigma X_3 X_4$$

$$III \quad \Sigma X_1 X_3 = b_{1 \cdot 34} \Sigma X_3 + b_{12 \cdot 34} \Sigma X_3^2 + b_{14 \cdot 23} \Sigma X_3 X_4$$

$$IV \quad \Sigma X_1 X_4 = b_{1 \cdot 34} \Sigma X_4 + b_{12 \cdot 34} \Sigma X_2 X_4 + b_{14 \cdot 23} \Sigma X_3^2$$

प्रसामान्य समीकरणों II, III तथा IV में पूर्व प्राप्त वर्गीकृत विचलनों के यागों तथा विचलनों के गुणनफलों के यागों को प्रतिस्थापित करने से हम

$$II \quad 16502 = 29481b_{12 \cdot 34} + 16019b_{1 \cdot 34} + 13786b_{14 \cdot 23}$$

$$III \quad 10388 = 16019b_{12 \cdot 34} + 13801b_{1 \cdot 34} + 24644b_{14 \cdot 23}$$

$$IV \quad -20441 = 13786b_{12 \cdot 34} + 24644b_{1 \cdot 34} + 40691b_{14 \cdot 23}$$

प्राप्त करते हैं।

तीन युग्मत समीकरणों को हल करने की विधियोंकि पृष्ठ 438—440 पर दी गई है अतः यहाँ उसकी पुनरावृत्ति नहीं की जाएगी। हल

$$b_{12 \cdot 34} = +0.31911$$

$$b_{1 \cdot 34} = +0.55874$$

$$b_{14 \cdot 23} = -0.09880$$

प्रदान करता है।

यदि हम प्रसामान्य समीकरण I को इस प्रकार लिखें

$$a_{1 \cdot 234} = a_{1 \cdot 234} - b_{12 \cdot 34}a_{1 \cdot 234} - b_{13 \cdot 24}a_{1 \cdot 234} - b_{14 \cdot 23}a_{1 \cdot 234}$$

तो हम सारणी 21.1 से समान्तर माध्यों के मानों तथा अभी दिए गए b मानों को प्रतिस्थापित करके पायेंगे

$$\begin{aligned} a_{1 \cdot 234} &= 552632 - (0.31911)(11068421) - (0.55874)(10531579) \\ &\quad - (0.09880)(17310526) \\ &= -21535 \end{aligned}$$

तब, आंशिक समीकरण है

$$X_1 = -21535 + 0.31911X_2 + 0.55874X_3 - 0.09880X_4$$

व्याख्यान घटबड़ है

$$\Sigma X_1^2 = b_{12 \cdot 34}^2 \Sigma X_2^2 + b_{13 \cdot 24}^2 \Sigma X_3^2 + b_{14 \cdot 23}^2 \Sigma X_4^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (0.31911)(16.502) + (0.55874)(10.388) \\
 &\quad + (-0.09880)(-20.441), \\
 &= 13.0897
 \end{aligned}$$

तथा अव्याख्यात घटबट है

$$\begin{aligned}
 \Sigma x'_{1 \cdot 23} &= \Sigma x'_1 - \Sigma r'_{1 \cdot 23}, \\
 &= 15.447 - 13.0897 = 2.3573
 \end{aligned}$$

अब हम आकलन की मानक त्रुटि का परिकलन कर सकते हैं जो है

$$s_{1 \cdot 23} = \sqrt{\frac{\Sigma x'^2_{1 \cdot 23}}{N}} = \sqrt{\frac{2.3573}{19}} = 0.352$$

अनेकधा निगमन का गुणांक तथा अनेकधा महसबध क गुणांक हैं

$$R'_{1 \cdot 23} = \frac{\Sigma x'_{1 \cdot 23}}{\Sigma x'_1} = \frac{13.0897}{15.447} = 0.8474,$$

$$R_{1 \cdot 23} = 0.9205$$

आंशिक सहसम्बन्ध का परिकलन प्रारम्भ करने से पहले यह देवना बाध्यतीय है कि चर X_1 क प्रयोग में हमारे सम्बन्ध में क्या सुचारु हुआ है। यह स्मरण करें कि $R'_{1 \cdot 23}$, 0.6236 था जिसका अर्थ है कि X_2 तथा X_3 की ओर निर्देश द्वारा हमने X_1 में घटबट के 62 प्रतिशत की व्याख्या प्रस्तुत की थी। हमने अभी $R'_{1 \cdot 23}$ को 0.8474 के बराबर पाया है। अब तीन स्वतंत्र चरों का प्रयोग द्वारा हमने आश्रित चर में घटबट के 85 प्रतिशत की व्याख्या की है।⁹ $R_{1 \cdot 23}$ न केवल $R'_{1 \cdot 23}$ से, बल्कि यह $R^2_{1 \cdot 23}$ अथवा $R^2_{1 \cdot 23}$ से भी बड़ा है। इन अन्तिम दो गुणांकों में से किसी का भी पहल परिकलना नहीं हुआ है। वे

$$R^2_{1 \cdot 23} = 0.7551 \text{ तथा } R^2_{1 \cdot 34} = 0.7774$$

हैं। पहल (पृष्ठ 481) यह देखा गया था कि r'_{12} अथवा r'_{13} दोनों से $R'_{1 \cdot 23}$ बड़ा था। पाठक जाँच कर सकते हैं कि (1) r'_{12} अथवा r'_{13} दोनों से $R'_{1 \cdot 23}$ बढ जाता है, तथा (2) r'_{12} अथवा r'_{13} दोनों में से प्रत्येक की अपेक्षा $R'_{1 \cdot 23}$ बढा है।

समुचित स्वतंत्र चरों के योग से R' अथवा R का मान जैसे बढता है वैसे आकलन की मान त्रुटि का मानक घटता है। पहले हमने $s_{1 \cdot 23}$ को 0.553 के बराबर पाया था, अब हम देखते हैं कि $s_{1 \cdot 234} = 0.352$ $s_{1 \cdot 23}$ तथा $s_{1 \cdot 34}$ (जिनमें से किसी का परिकलन पहल नहीं हुआ) के मानों में से प्रत्येक से बढा है, व

$$s_{1 \cdot 24} = 0.446 \text{ तथा } s_{1 \cdot 32} = 0.425$$

हैं। यह स्पष्ट है कि तीन स्वतंत्र चरों में किन्हीं दो का प्रयोग से प्राप्त आकलन की अपेक्षा

9 यह स्मरण रखना आवश्यक है कि अन्य स्वतंत्र चरों को जोड़ने में स्वतन्त्रता के बर्तारित अर्थों की हानि हो जाती है। इस प्रकार कभी कभी यह हो सकता है कि R^2 के मान में वृद्धि हो सकती है किन्तु वृद्धि का साधक होना आवश्यक नहीं है। निर्धारण के आंशिक और अनेकधा गुणांकों की साधकता की परीक्षा में चर्चा अध्याय 26 के अन्तिम भाग में की गई है।

सभी तीनों स्वतन्त्र चरों के प्रयोग द्वारा प्राप्त माध्यिका आय के आकलन अधिक सतोषजनक होंगे। अधिक यथार्थ रूप में कहा जाए तो आकलन समीकरण

$$X_{11\ 231} = a_{1\ 231} + b_{12\ 31}X_2 + b_{13\ 21}X_3 + b_{14\ 21}X_4$$

के लगभग होने पर X_1 मानों का मानक विचलन,

$$X_{1\ 1\ 23} = a_{12\ 3} + b_{12\ 3}X_2 + b_{13\ 2}X_3$$

के लगभग अथवा

$$X_{1\ 1\ 23} = a_{1\ 23} + b_{12\ 4}X_2 + b_{13\ 2}X_3$$

के लगभग अथवा

$$Y_{1\ 33} = a_{1\ 33} + b_{13\ 4}X_2 + b_{14\ 3}X_4$$

के लगभग X_1 मानों के मानक विचलन की अपेक्षा कम होगा।

तीन स्वतन्त्र चरों का आंशिक सहसम्बन्ध—पहले प्रयुक्त विधि के समानान्तर,

$$\begin{aligned} r_{14\ 23}^2 &= \frac{\Sigma y_{1\ 14}^2 - \Sigma y_{1\ 23}^2}{\Sigma y_{1\ 1}^2 - \Sigma y_{1\ 23}^2} \\ &= \frac{13\ 090 - 9\ 633}{15\ 447 - 9\ 633} = 0\ 59454, \end{aligned}$$

$$r_{13\ 23} = -0\ 7711$$

क्योंकि $r_{14\ 23}^2 = 0\ 5945$, अतः स्वतन्त्र चर X_4 के प्रयोग ने हमें घटबट के 59 प्रतिशत की व्याख्या करने का सामर्थ्य प्रदान किया, जिसकी व्याख्या करने में X_2 तथा X_3 असफल रहे थे। $b_{14\ 23}$ के चिह्न से सहमति के लिए, $r_{14\ 23}$ का चिह्न ऋणात्मक है, और यह मुख्यतः माध्यिका आय X_1 तथा प्रतिशत प्रवासों X_2 में सम्बन्ध की मापता है, जबकि X_2 तथा X_3 को माध्यिकीय रीति में स्थिर रखा गया है। आगे चल कर हम $r_{13\ 24}$ तथा $r_{12\ 34}$ के मानों को प्राप्त करेंगे, जो क्रमशः चरों X_1 तथा X_3 में सहसम्बन्ध के Y_2 तथा X_4 को स्थिर रख कर और चरों X_1 तथा X_2 में सहसम्बन्ध के X_3 तथा X_4 को स्थिर रखते हुए माप है।

$r_{11\ 3}$ का मान निम्न व्यञ्जक में भी प्राप्त किया जा सकता है

$$\begin{aligned} r_{11\ 23}^2 &= \frac{R_{1\ 231}^2 - R_{1\ 23}^2}{1 - R_{1\ 23}^2} \\ &= \frac{0\ 84740 - 0\ 62363}{1 - 0\ 62363} = 0\ 59454, \end{aligned}$$

$$r_{11\ 23} = -0\ 7711$$

चार या अधिक स्वतन्त्र चरों—जब चार या अधिक स्वतन्त्र चर हों तो युगपत् समीकरणों के हल के लिए डूलिटल विधि (अथवा किसी अन्य व्यवस्थित विधि) का प्रयोग उचित है।¹⁰

10 प्रसामान्य हमीकरण (तथा उनमें व्युत्पन्न अन्य व्यापकीकृत व्यञ्जक) मूल यथेष्टो युगपत् के द्वितीय संस्करण में 549—551 पृष्ठा पर दिए गए हैं और डूलिटल विधि का वचन 498—503 पृष्ठों पर दिया गया है।

अनेकधा आंशिक गुणांक—ठीक जिस प्रकार आंशिक निधारण का गुणांक मापता है (1) अथ स्वतंत्र चर प्रवेश के परिणामस्वरूप आंशिक चर के परिकलित माना की घटवृद्ध के परिमाण में वृद्धि (2) उस घटवृद्ध के सापेक्ष में जिसका नए चर के प्रवेश से पूर्व व्याख्या नहीं की गई थी उसी प्रकार निर्धारण का अनेकधा आंशिक गुणांक दो या अधिक नए स्वतंत्र चरों के प्रवेश के परिणामस्वरूप होने वाली सापेक्ष वृद्धि को मापता है।

अनेकधा तथा आंशिक सहसम्बन्ध गुणांकों तक एक अन्य अभिगम

कभी कभी बिना अध्ययन के ऐसे परिणाम सामने आते हैं जो अनेक चरों के लिए श्रवण शून्य क्रम सहसम्बन्ध गुणांक प्रस्तुत करते हैं। यदि अनेकधा और आंशिक गुणांक प्राप्त करने हों तो शून्य क्रम गुणांकों से उन्हें प्राप्त करना सम्भव है। आंशिक गुणांकों के लिए हम त्रिजिन सूत्रों का प्रयोग करते हैं उनका उपयोग यह जानने के लिए भी होगा कि आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक कभी बड़े और कभी छोटे क्यों होते हैं जब अधिक चरों को स्थिर रखा जाता है। पिछला अध्याय में हमने पहले अनेकधा सहसम्बन्ध गुणांकों और फिर आंशिक गुणांकों पर विचार किया था। वर्तमान विवरण के लिए पहले आंशिक गुणांकों पर विचार करना उपयोगी होगा क्योंकि चार या अधिक चरों के लिए अनेकधा गुणांक आंशिक गुणांकों में से कुछ के प्रयोग द्वारा अत्यन्त सुगमता से प्राप्त हो जाते हैं।

प्रथम क्रम आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक—तान शून्य क्रम गुणांकों के मानों से किसी भी प्रथम क्रम गुणांक का निर्धारण किया जा सकता है। उदाहरण के लिए,

$$r_{12} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{1 - r_{12}^2} \sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

हम इन प्रथम क्रम गुणांकों में से क्योंकि धातु का परिकलन करने और क्योंकि पाठक अन्यो के मानों का जानने का इच्छा कर सकते हैं अतः नीचे शून्य क्रम r , r^2 , $1 - r^2$, तथा $\sqrt{1 - r^2}$ के सभी मानों की सूची प्रस्तुत की जा रही है। अनेकधा गुणांकों के परिकलन के लिए हम $1 - r^2$ मानों में से कुछ का प्रयोग करते हैं।

$$\begin{array}{ll} r_{12} = +0.7753, & r_{12}^2 = 0.5980 \\ r_{13} = +0.7115 & r_{13}^2 = 0.5062, \\ r_{14} = -0.7578 & r_{14}^2 = 0.0665 \\ r_{22} = +0.7942 & r_{22}^2 = 0.6307 \\ r_{24} = +0.1715 & r_{24}^2 = 0.0294, \\ r_{34} = +0.3289 & r_{34}^2 = 0.1081 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1 - r_{12}^2 = 0.4020 & \sqrt{1 - r_{12}^2} = 0.6340 \\ 1 - r_{13}^2 = 0.4938, & \sqrt{1 - r_{13}^2} = 0.7027 \\ 1 - r_{14}^2 = 0.9335 & \sqrt{1 - r_{14}^2} = 0.9662 \\ 1 - r_{22}^2 = 0.3693 & \sqrt{1 - r_{22}^2} = 0.6077, \\ 1 - r_{24}^2 = 0.9706, & \sqrt{1 - r_{24}^2} = 0.9852, \\ 1 - r_{34}^2 = 0.8919 & \sqrt{1 - r_{34}^2} = 0.9444 \end{array}$$

जब किसी सहसम्बन्ध समस्या में चार चर अन्तर्गम्य हों तब वास्तव में प्रथम क्रम गुणांकों का होना संभव है।¹¹ अपने प्रयोजनों के लिए हम इनमें से केवल आठ का परिकलन करेंगे। छ के X_1 आश्रित चर होगा तथा दो अन्य चर r_{13} और r_{34} जिनका प्रयोग द्वितीय-क्रम आंशिक गुणांकों को प्राप्त करने के लिए किया जाएगा। यदि हमारा उद्देश्य, अगले परिच्छेद में दिखाए गए केवल तीन द्वितीय क्रम गुणांकों को प्राप्त करना होता, तो हम X_1 आश्रित चर वाले छ प्रथम क्रम गुणांकों में से अंतिम दो की आवश्यकता नहीं पड़ती।

$$r_{13} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{1-r_{12}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}} = \frac{0.7115 - (0.773)(0.7942)}{(0.6340)(0.6077)} = +0.2526$$

$$r_{14} = \frac{r_{14} - r_{13}r_{34}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{34}^2}} = \frac{-0.2578 - (0.7733)(0.1715)}{(0.6340)(0.9852)} = -0.6251$$

$$r_{14} = \frac{r_{14} - r_{12}r_{24}}{\sqrt{1-r_{12}^2}\sqrt{1-r_{24}^2}} = \frac{-0.2578 - (0.7115)(0.3289)}{(0.7027)(0.9444)} = -0.7411$$

$$r_{13} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{1-r_{12}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}} = \frac{0.7733 - (0.7115)(0.7942)}{(0.7027)(0.6077)} = +0.4876$$

$$r_{13} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{24}}{\sqrt{1-r_{12}^2}\sqrt{1-r_{24}^2}} = \frac{0.7115 - (-0.2578)(0.3289)}{(0.9662)(0.9444)} = +0.8727$$

$$r_{12} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{34}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{34}^2}} = \frac{0.7733 - (-0.2578)(0.1715)}{(0.9662)(0.9852)} = +0.8588$$

$$r_{34} = \frac{r_{34} - r_{23}r_{24}}{\sqrt{1-r_{23}^2}\sqrt{1-r_{24}^2}} = \frac{0.1715 - (0.7942)(0.3289)}{(0.6077)(0.9444)} = -0.1563$$

$$r_{34} = \frac{r_{34} - r_{23}r_{24}}{\sqrt{1-r_{23}^2}\sqrt{1-r_{24}^2}} = \frac{0.3289 - (0.7942)(0.1715)}{(0.6077)(0.9852)} = +2.3219$$

अब हम देख सकते हैं कि प्रथम क्रम गुणांक, शून्य क्रम गुणांक से कभी बड़े और कभी छोटे बने होते हैं। प्रथम क्रम गुणांक में से तीन पर विचार काजिए (1) r_{13} , r_{13} की अपेक्षा छोटा है। ध्यान दीजिए r_{12} तथा r_{23} के चिह्न समान हैं और दोनों धनात्मक हैं और r_{13} के व्यञ्जक के भाज्य का मान r_{13} से बहुत छोटा है। यह तथ्य कि हर 10 से छोटा है परिणाम की वृद्धि में सहायक होता है। (2) r_{11} , r_{14} से बड़ा है, दोनों से छोटा है परिणाम की वृद्धि में सहायक होता है। (3) r_{11} , r_{14} से बड़ा है, दोनों से छोटा है परिणाम की वृद्धि में सहायक होता है। (4) r_{11} , r_{14} से बड़ा है, दोनों से छोटा है परिणाम की वृद्धि में सहायक होता है। (5) r_{11} , r_{14} से बड़ा है, दोनों से छोटा है परिणाम की वृद्धि में सहायक होता है। (6) r_{11} , r_{14} से बड़ा है, दोनों से छोटा है परिणाम की वृद्धि में सहायक होता है। (7) r_{11} , r_{14} से बड़ा है, दोनों से छोटा है परिणाम की वृद्धि में सहायक होता है। (8) r_{11} , r_{14} से बड़ा है, दोनों से छोटा है परिणाम की वृद्धि में सहायक होता है। (9) r_{11} , r_{14} से बड़ा है, दोनों से छोटा है परिणाम की वृद्धि में सहायक होता है। (10) r_{11} , r_{14} से बड़ा है, दोनों से छोटा है परिणाम की वृद्धि में सहायक होता है।

11 इस बात का प्रमाण कि ये मूल उनका समकक्ष हैं, जिसका हम प्रमाण करते आ रहे हैं, परिच्छेद 21 में दिया गया है। परिकलन का थम पथान क्रम किया जा सकता है, यदि $\sqrt{1-r^2}$ के मानों को $\frac{1}{2}$ बार या इससे अधिक के टब्लेस ऑफ $\sqrt{1-r^2}$ तथा $1-r$ फार यूज इन नॉनल कोरिलेशन एंड रिग्रेशन में जॉन्स हारविज प्रस, वास्तामोर, जेम्स टूमेन ता बसा की, दि फॉलो स्टैटिस्टिकल टेबल्स, संशोधित संस्करण, मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क, 1948 में देख लिया जाए।

r_{23} और r_{24} का गुणनफल क्योंकि r_{24} से अधिक नहीं है, क्योंकि r_{23} और r_{24} के चिह्न समान (धनात्मक) हैं, और क्योंकि r_{34} धनात्मक है अतः r_{34} के व्ययजक में भाज्य का मान r_{34} से छोटा धनात्मक मान है। हर यद्यपि 10 से छोटा है, किन्तु इतना छोटा नहीं कि परिणाम में उस बिन्दु तक वृद्धि कर दे जहाँ यह r_{24} के समान या उससे अधिक हो जाए।

द्वितीय-क्रम आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक—द्वितीय-क्रम गुणांक प्रथम-क्रम गुणांक से प्राप्त किए जा सकते हैं। हम केवल उन द्वितीय क्रम गुणांक का परिवर्तन करेंगे जिनका X_1 आश्रित चर होगा। ये हैं

$$r_{24.23} = \frac{r_{24} - r_{12}r_{13.2}}{\sqrt{1-r_{23}^2}\sqrt{1-r_{34}^2}} = \frac{(-0.6751) - (0.2526)(0.3219)}{\sqrt{1-(0.2526)^2}\sqrt{1-(0.3219)^2}} \\ = -0.7711$$

$$r_{13.24} = \frac{r_{13.2} - r_{12}r_{23.2}}{\sqrt{1-r_{24}^2}\sqrt{1-r_{34}^2}} = \frac{(0.2526) - (-0.6251)(0.3219)}{\sqrt{1-(-0.6251)^2}\sqrt{1-(0.3219)^2}} \\ = +0.6141$$

$$r_{12.34} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23.4}}{\sqrt{1-r_{23}^2}\sqrt{1-r_{34}^2}} = \frac{0.4876 - (0.7411)(-0.1563)}{\sqrt{1-(-0.7411)^2}\sqrt{1-(-0.1563)^2}} \\ = +0.5616$$

द्वितीय क्रम गुणांक में सतीना के लिए समान परिणाम प्रस्तुत करने वाले, वकल्पित मूल उपपद हैं। वे हैं

$$r_{34.23} = \frac{r_{34} - r_{12}r_{13.2}}{\sqrt{1-r_{23}^2}\sqrt{1-r_{34}^2}},$$

$$r_{12.34} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23.4}}{\sqrt{1-r_{23}^2}\sqrt{1-r_{34}^2}},$$

$$r_{13.24} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23.4}}{\sqrt{1-r_{23}^2}\sqrt{1-r_{34}^2}}$$

ध्यान दीजिए कि $r_{12.24}$ $r_{23.2}$ से बड़ा है। दूसरी ओर $r_{13.24}$, $r_{13.4}$ की अपेक्षा छोटा है। इस प्रकार अन्य द्वितीय क्रम गुणांक और उचित प्रथम क्रम गुणांक में तुलना की जा सकती है।

m चरों के लिए सामान्य रूप¹² है

$$r_{1m.23 \dots (m-1)} = \frac{r_{1m.2} - r_{1(m-1).23} r_{1(m-1).2 \dots (m-1)}}{\sqrt{1-r_{1(m-1).23}^2} \sqrt{1-r_{1(m-1).2 \dots (m-1)}^2}}$$

12 अन्य रूप भी लिख जा सकते हैं। तथापि, यह सर्वाधिक तत्कालम्पल रूप है, क्योंकि आंशिक गुणांक निम्न क्रम वाले से, क्रमशः X_2 , X_3 , X_4 , ..., X_m चरों का प्रयोग करते हुए निर्मित किए जा रहे हैं। भाज्य में प्रथम r के अधोलेख $(m-1)$ को वहाँ, जहाँ यहाँ किया गया, वरन् 1 अथवा m के अनिवार्य किसी भी अधोलेख का त्याग करना संभव होगा। उदाहरण के लिए यदि 3 का त्याग कर दिया जाए, तो तीन गुणांक के अधोलेख होंगे

$$1m.24 \dots (m-2), 13.24 \dots (m-1) \text{ तथा } m3.24 \dots (m-1)$$

यहां रुक कर अपने परिकल्पनों के कुछ परिणामों का निरीक्षण करना रुचिकर होगा। X_1 आश्रित चर से पन्निवेष्टित शून्य क्रम प्रथम क्रम और द्वितीय क्रम गुणांक नीचे दिखाए गए हैं

$$\begin{array}{lll} r_{12} = +0.7733 & r_{12.3} = +0.4876 & r_{12.34} = +0.5606 \\ & r_{12.4} = +0.8588 & \\ r_{13} = +0.7115 & r_{13.2} = +0.2526 & r_{13.24} = +0.6141 \\ & r_{13.4} = +0.8727 & \\ r_{14} = -0.2578 & r_{14.2} = -0.6251 & r_{14.23} = -0.7711 \\ & r_{14.3} = -0.7411 & \end{array}$$

जब अर्ध चरों के प्रभाव के लिए कोई छूट नहीं दी गई थी, तब X_2 (प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारी) प्रथम कोटि में तथा X_4 (प्रतिशत प्रवासी) अन्तिम कोटि में थे। जब X_4 के लिए समझन किया गया तब माध्यिका स्कूल वष X_3 प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारी X_2 से आगे की कोटि में आ गया जब X_3 के लिए समझन किया गया तब प्रतिशत प्रवासी X_4 प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारी X_2 से आगे था जब X_2 के लिए समझन किया गया तब प्रतिशत प्रवासी X_4 माध्यिका स्कूल वष X_3 से ऊपर की कोटि में था। अतः जब दो स्वतंत्र चरों को स्थिर रखा गया तब प्रतिशत प्रवासी X_4 प्रथम या और प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारी X_2 अन्तिम था।

अनेकधा गुणांक—पाद टिप्पणी 7 में यह पहले ही मकेत किया जा चुका है कि तीन चर अनेकधा गुणांक को शून्य क्रम गुणांक से प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार

$$R_{1.23} = \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}$$

$$= \frac{0.5980 + 0.5062 - 2(0.7733)(0.7115)(0.7942)}{0.3693}$$

$$= 0.6236$$

$$R_{1.3} = 0.7897$$

$$R_{1.4} = \frac{r_{12}^2 + r_{14}^2 - 2r_{12}r_{14}r_{24}}{1 - r_{24}^2}$$

$$= \frac{0.5980 + 0.0665 - 2(0.7733)(-0.2578)(0.1715)}{1 - 0.0294}$$

$$= 0.7551$$

$$R_{1.24} = 0.8689$$

$$R_{1.34} = \frac{r_{13}^2 + r_{14}^2 - 2r_{13}r_{14}r_{34}}{1 - r_{34}^2}$$

$$= \frac{0.5062 + 0.0665 - 2(0.7115)(-0.2578)(0.3289)}{1 - 0.1081}$$

$$= 0.7774$$

$$R_{1.24} = 0.8817$$

पृष्ठ 484 पर दिए सूत्रों के समान सूत्रों का प्रयोग करें

$$R_{1\ 23}^2 = r_{12}^2 + r_{13}^2 (1 - r_{12}^2) = 0.5980 + (0.0638)(0.4020) = 0.6236.$$

$$R_{1\ 23} = 0.7897$$

$$R_{1\ 24}^2 = r_{12}^2 + r_{14}^2 (1 - r_{12}^2) = 0.5980 + (0.3908)(0.4020) = 0.7551.$$

$$R_{1\ 24} = 0.8689$$

$$R_{1\ 34}^2 = r_{13}^2 + r_{14}^2 (1 - r_{13}^2) = 0.5062 + (0.5492)(0.4938) = 0.7774$$

$$R_{1\ 34} = 0.8817$$

$$\begin{aligned} R_{1\ 234}^2 &= r_{12}^2 + r_{13}^2 (1 - r_{12}^2) + r_{14}^2 (1 - R_{1\ 23}^2), \\ &= 0.5980 + (0.0638)(0.4020) + (0.5946)(0.3764) \\ &= 0.8474 \end{aligned}$$

$$R_{1\ 234} = 0.9205$$

$r_{13\ 2}$ के लिए पृष्ठ 482 पर निर्दिष्ट सूत्र को पुन व्यवस्थित करके हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$\begin{aligned} 1 - R_{1\ 23}^2 &= (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2) \\ R_{1\ 23}^2 &= 1 - [(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)] \end{aligned}$$

इस व्यञ्जक को m चरों के लिए सामान्य रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\begin{aligned} R_{1\ 2\ 4\ \dots\ m}^2 &= \\ &= 1 - [(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)(1 - r_{14}^2) \dots (1 - r_{1m}^2)] \end{aligned}$$

इस व्यञ्जक का एक भिन्न रूप है

$$R_{1\ 234\ \dots\ m}^2 = 1 - [(1 - R_{1\ 234\ \dots\ (m-1)}^2)(1 - r_{1m}^2)].$$

आकलन के गुणांक तथा आकलन की मानक त्रुटियाँ—जब केवल शून्य-क्रम गुणांकों के ही मान ज्ञात हों, तब विभिन्न b मानों तथा आकलन की मानक त्रुटि को ज्ञात करने का भार उठाना सम्भाव्य नहीं होता। फिर भी, यदि s_1 , अथवा Σx_1^2 तथा N , ज्ञात हों, तो हम आकलन की मानक त्रुटि निम्न सूत्र में ज्ञात कर सकते हैं :

$$s_{1\ 234\ \dots\ m} = s_1 \sqrt{1 - R_{1\ 234\ \dots\ m}^2}.$$

m प्रसामान्य समीकरणों का हल किए बिना (देखिए पादटिप्पणी 10), आकलन के गुणांक निम्न से प्राप्त किए जा सकते हैं

$$b_{1m\ \dots\ (m-1)} = r_{1m\ 23\ \dots\ (m-1)} \frac{s_{1\ 234\ \dots\ m}}{s_{m\ 123\ \dots\ (m-1)}}.$$

स्वतन्त्र चरों के अलग-अलग महत्त्व के अन्य माप—हम आंशिक निर्धारण या सहसम्बन्ध के गुणांकों के बारे में तीन स्वतन्त्र चरों के अलग-अलग महत्त्व के मापों के रूप में पहले ही विचार कर चुके हैं। स्वतन्त्र चरों के अलग-अलग महत्त्व के दो अन्य मापों का यदाकदा प्रयोग होता है। ये हैं : (1) बीटा गुणांक, तथा (2) अलग निर्धारण के

गुणांक। बीटा गुणांको की β_1 तथा β_2 , जिनका बारबारता बंटन के वर्णन के लिए प्रयोग होता है, के साथ मझाति नहीं होनी चाहिए। माप के दोनों समुच्चय स्वभाव से बिल्कुल भिन्न हैं।¹³

अनेकधा वक्ररेखीय सहसंबंध

दो चरो में पारस्परिक संबन्ध के ही समान, एक आश्रित चर और एक या अधिक स्वतन्त्र चरो में पारस्परिक सम्बन्ध कभी-कभी अरेखिक होता है। जब यह सत्य हो, तब हम एक बहुपद का प्रयोग कर सकते हैं अथवा हम एक या अधिक चरो का लघुगुणको, व्युत्क्रमी, मूलो या घातो में रूपान्तरण कर सकते हैं अथवा किसी अन्य ढंग से परिवर्तित कर सकते हैं।

बहुपद—यदि X_1 और X_2 में अरेखिक सम्बन्ध प्रतीत होता हो, जबकि X_1 और X_2 में रेखिक सम्बन्ध हो तब इस ढंग के समीकरण

$$X_{1.22} = a_{1.22} + b_{12.2}X_2 + b_{12.23}X_2^2 + b_{12.23}X_2^3$$

का प्रयोग किया जा सकता है। इस समीकरण के फलस्वरूप व्याख्यात घटवढ अनुमानतः अधिक परिमाण में प्रकट होगी, अपेक्षाकृत निम्न समीकरण के प्रयोग द्वारा

$$X_{1.22} = a_{1.22} + b_{12.2}X_2 + b_{12.2}X_2^2$$

व्याख्यात घटवढ के परिमाण में वृद्धि की मायंकता के लिए, अध्याय 26 में वर्णित निर्धारण के आंशिक गुणांको की विधियों से जांच की जा सकती है। मूल अग्रजी पुस्तक के प्रथम संस्करण के पृष्ठ 779—784 पर अरेखिक अनेकधा सहसंबन्ध के विश्लेषण के लिए बहुपद का प्रयोग किया गया था।

रूपान्तरण—लघुगुणको व्युत्क्रमी, मूलो, घातो, अथवा श्रेणियों में से एक (या अधिक) के मानों के किसी अन्य फलन के प्रयोग का परिणाम अरेखिक सम्बन्ध का रेखिक रूप में लघुकरण हो सकता है। उदाहरण के लिए, एक आकलन समीकरण निम्नलिखित में से किसी एक प्रकार का हो सकता है

$$X_{1.22} = a_{1.22} + b_{12.2} \text{ लघु } X_2 + b_{12.2} X_2,$$

$$X_{1.22} = a_{1.22} + b_{12.2} X_2 + b_{12.2} \sqrt{X_2},$$

$$X_{1.22} = a_{1.22} + b_{12.2} \frac{1}{X_2} + b_{12.2} X_2,$$

$$\text{लघु } X_{1.22} = a_{1.22} + b_{12.2} X_2 + b_{12.2} X_2$$

विभिन्न सचय भी मभव हैं। रूपान्तरण का प्रयोग करते समय, यदि सम्भव हो तो, चरो के पारस्परिक सम्बन्ध की प्रकृति की एक परिकल्पना बनानी चाहिए, जैसा अध्याय 20 में पोडरोसा देवदार वृक्षों के आंकड़ों के लिए प्रयुक्त निम्न रूपान्तरण के सम्बन्ध में किया गया था :

$$(\sqrt{Y})_c = a + bX$$

लेलाचित्रीय विधि—संयुक्त राज्य अमरीका के कृषि विभाग में नाल्पिकीविदों ने एक नितान्त नम्य प्रविधि का विकास किया है, जिससे निम्न सम्बन्ध के वक्र तथा अनेकधा सहसंबन्ध के गुणांको के चार्टों और गणित (सरल अवगाणित से अधिक विवसित नहीं) के प्रयोग

13. बीटा गुणांको और अन्य निर्धारण के गुणांको के प्रयोगों के विवरण और दृष्टान्त के लिए मूल अग्रजी पुस्तक का द्वितीय संस्करण, पृष्ठ 557—559 देखिए।

द्वारा, क्रमिक सन्निकटीकरण प्राप्त किये जा सकते हैं। जहाँ इस विधि की स्पष्ट सीमाएँ हैं, वहाँ गणितीय विधियों से, उपयुक्त प्रकार के समीकरण के निर्धारण में समान्वेपी साधन के रूप में यह उपयोगी है।

यद्यपि लेखाचित्रीय विधि अत्यधिक नम्य है, किन्तु यह अत्यन्त आत्मनिष्ठ भी है। समान आंकड़ों से प्राप्त दो सांख्यिकीविदों के वक्र विरल ही विल्कुल एकसमान होंगे। अतः अच्छे परिणाम अनुभवी एवं उत्तम विवेकशील व्यक्तियों द्वारा ही प्राप्त किये जा सकते हैं। यह उन गणितीय प्रक्रिया के विरोध में है, जो न्यूनतम वर्गों की विधि पर आधारित है, जिस दशा में (नूटियों को छोड़कर) एक निदिष्ट प्रकार के समीकरण के लिए केवल एक मभव परिणाम प्राप्त किया जा सकता है। जब चरों की अधिक संख्या का प्रयोग किया जाए तब लेखाचित्रीय विधि में एक व्यावहारिक कठिनाई भी निहित रहती है। इस पुस्तक के इस संस्करण में लेखाचित्रीय विधि की व्याख्या नहीं की गई है, किन्तु जिन पाठकों की रुचि हो वे मूल अंग्रेजी पुस्तक के प्रथम संस्करण के पृष्ठ 784—789 देखें।

सहसंबंध IV : काल-श्रेणी का सहसम्बन्ध

दो या दो से अधिक काल-श्रेणियों की क्षत्रीय घटवढ को सहसंबधित करने की समस्या मूलभूत रूप से वही है जो कालक्रम रहित श्रेणी को सहसंबधित करने की है। तथापि, काल श्रेणी को सहसंबधित करत समय, हमें इस तथ्य पर विचार करना चाहिए कि वार्षिक आंकड़ों में उपनति प्रायः विद्यमान रहती है तथा मासिक आंकड़ों में उपनति और ऋतु-विभिन्नता दोनों के साथ-साथ अनियमित घटवढ भी पाई जा सकती है।

वार्षिक आंकड़े

भारतीय 22.1 में संयुक्त राज्य के 1952 से 1963 तक प्रत्येक वर्ष के यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेकें के निर्माण में औसत वार्षिक कर्मचारी सरप्रा के आंकड़े निरदिष्ट हैं। मर्यात्मक आंकड़ों से, दो श्रेणियों के व्यवहार के सम्बन्ध में बहुत कम समझ में आ सकता है किन्तु जब दो श्रेणियों को चार्ट 22.1 तथा 22.2 पर लेखाक्षेत्रीय रीति से प्रदर्शित किया जाता है, तब यह स्पष्ट हो जाता है कि : (1) यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं में रोजगार की उपनति निम्नमुखी है, (2) ठेकें के निर्माण में रोजगार की उपनति ऊर्ध्वमुखी है, तथा (3) दो श्रेणियों की घटवढों में घनात्मक सहसंबध है।

उपनति के लिए असमजित आंकड़ों का सहसंबध—दो काल श्रेणियों में सहसंबध स्थापित करने समय हम यह जानने के इच्छुक होते हैं कि श्रेणियों की घटवढ समान दिशा में चलती है या विपरीत दिशाओं में, तथा माहुर्य उच्च है या निम्न। यदि हमारा सम्बन्ध घटवढ की प्रपेक्षा दो श्रेणियों की उपनति से है तो हम दो उपनतियों में सहसंबध स्थापित नहीं करेंगे क्योंकि वे आवश्यक रूप से पूर्ण रेखिक या अरेखिक सहसंबध प्रकट करेगी। उपनतियाँ की तुलना या ती लेखाक्षेत्रीय रीति से की जाती है या उपनति ममीकरणों की परीक्षा द्वारा। जब उपनति के लिए असमजित काल श्रेणी व आंकड़ों को सहसंबधित किया जाता है तो परिणामी गुणांक, घटवढों तथा दो उपनतियों दोनों के मध्य स्थित सम्बन्ध को प्रकट करता है। यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेकें के निर्माण में रोजगार व आंकड़े प्रतीक आग्न के रूप में चार्ट 22.3 में निरदिष्ट हैं तथा सहसंबध गुणांक का मान सारणी 22.1 में मिलेगा जो—0.373 है। चार्ट 22.1 तथा 22.2 में निरदिष्ट दो श्रेणियाँ की घटवढ के मध्य की दृष्टि से यह गुणांक निम्न दिखाई देता है। कठिनाई यह है कि दोनों उपनतियाँ विपरीत दिशाओं में हैं। मूल प्रान्ति का सहसंबधित करने की अपेक्षा उपनति प्रतिजनताओं को सहसंबधित करके उपनति के प्रभाव का निरसन किया जा सकता है। विकल्प, हम मासिक सहसंबध गुणांक का परिचलन कर

सारणी 22 1

संयुक्त राज्य अमरीका में 1952—1963 में यातायात एवं सावजनिक उपयोगिताओं तथा ठेके के निर्माण में रोजगार का सहस्रवर्ष

(कमचारी हजारों में)

वर्ष	कमचारी		XY	X	Y ²
	यातायात एवं सावजनिक उपयोगिताओं में X	ठेके के निर्माण में Y			
1952	4 248	2 634	11 189 232	18 045 504	6 937 956
1953	4 790	623	11 252 670	18 404 100	6 880 129
1954	4 084	7 62	10 667 408	16 679 056	6 822 544
1955	4 141	2 807	11 603 082	17 147 881	7 851 204
1956	4 244	7 999	12 27 756	18 011 536	8 994 001
1957	4 241	2 93	12 3 6 443	17 986 081	8 543 929
1958	3 976	7 78	11 045 328	15 808 576	7 717 284
1959	4 011	2 960	11 872 460	16 088 121	8 761,600
1960	4 004	7 885	11 551 540	16 032 016	8 323 225
1961	3 93	7 816	10 990 848	15 233 409	7 929 856
1962	3 903	2 909	11 353 827	15 233 409	8 462 281
1963	3 913	3 029	11 857 477	15 311 569	9 174 841
योग	48 958	3 970	138 503 171	199 981 258	96 398 850

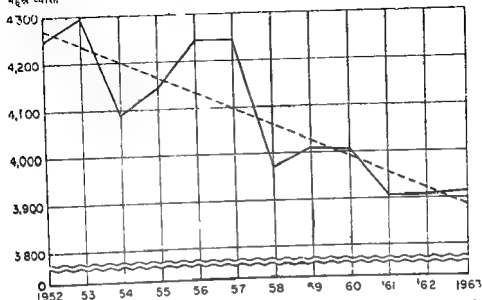
स्रोत: स्टैटिस्टिकल गवर्नमेंट ऑफ़ यूनाइटेड स्टेट्स 1964 पृष्ठ 220 से।

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[N \sum X^2 - (\sum X)^2][N \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}} \\
 &= \frac{12(138 503 171) - (48 958)(33 970)}{\sqrt{[12(199 981 258) - (48 998)^2][12(96 398 850) - (33 970)^2]}} \\
 &= -0.373
 \end{aligned}$$

संकेत है जहाँ दो श्रृंखलाएँ X_1 तथा X_2 हो और जहाँ समय X_3 हो। कभी कभी (1) दो श्रृंखलाओं के लिए प्रत्येक वर्ष से अगले वर्ष तक परिवर्तन के परिणामों अथवा (2) दो श्रृंखलाओं के लिए प्रत्येक वर्ष से अगले वर्ष तक परिवर्तन की प्रतिशतताओं को सहस्रवर्षीय धृत करके उपनति के प्रभाव का घटाया जाता है। हम इनमें से प्रत्येक प्रक्रिया की क्रमशः परीक्षा करेंगे।

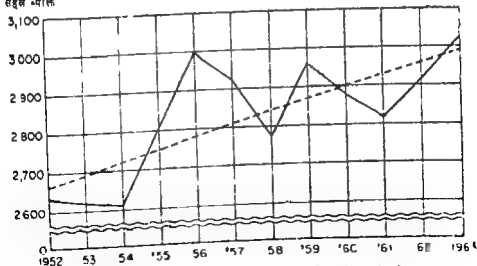
उपनति की प्रतिशतताओं का सहस्रवर्ष—स्पष्ट है कि प्रथम पक्ष प्रत्येक श्रृंखला की उचित उपनति के निर्धारण का है। निदर्शनाय रेखिक उपनतियाँ पर्याप्त होंगी तथा सारणी 22 2 यातायात एवं सावजनिक उपयोगिताओं में कमचारियों की संख्या के उपनति समीकरण उपनति मानों तथा उपनति की प्रतिशतताओं के परिकलन को दिखाती है। इसी प्रकार के परिकलन ठेके के निर्माण में कमचारियों की संख्या के लिए सारणी 22 3 में

सहस्र व्यक्ति



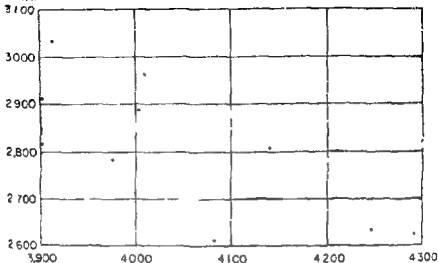
चार्ट 22 । संयुक्त राज्य अमेरिका में यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं में कर्मचारियों की संख्या तथा सरल रेखा उपनति, 1952—1963 । बाकड़े सारणी 22 2 से ।

सहस्र व्यक्ति



चार्ट 22 2 संयुक्त राज्य अमेरिका में ठेके के निर्माण में कर्मचारियों की संख्या तथा सरल रेखा उपनति, 1952—1963 । बाकड़े सारणी 22 3 में ।

का निर्माण
कर्मचारी
3100



यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिता कर्मचारी

चार्ट 22.3 यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेके के निर्माण में कर्मचारियों की संख्या 1952—1963 का प्रकीर्ण आरेख। आइये सारणी 22.1 से।

सारणी 22.2

यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं में रोजगार, 1952—1963, के लिए
उपनति का निर्धारण तथा उपनति मानों के प्रतिशत का परिकलन

वर्ष	X	कर्मचारी (सहस्रो में) Y	YY	उपनति मान Y _e	उपनति का प्रतिशत [Y - Y _e]
1952	-11	4 248	-46,728	4,273.7	99.40
1953	-9	4 290	-38,610	4,238.5	101.22
1954	-7	4 084	-28,588	4 203.2	97.16
1955	-5	4 141	-20,705	4,168.0	99.35
1956	-3	4 244	-12,732	4,132.7	102.69
1957	-1	4,241	- 4,241	4 097.4	103.50
1958	1	3 976	3 976	4,062.2	97.88
1959	3	4 011	12,033	4,026.9	99.61
1960	5	4 004	20,020	3,991.7	100.31
1961	7	3,903	27 321	3,956.4	98.65
1962	9	3 903	35,127	3,921.1	99.54
1963	11	3,913	43 043	3,885.9	100.70
योग	0	48 958	-1,084

नोट: सारणी 22.1 के नीचे दिये गये स्तंभों से।

$$N = 12 \quad \Sigma X^2 = 2(286) = 572$$

$$a = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{48,958}{12} = 4,079.8$$

$$b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{-10,034}{572} = -17.63$$

$$Y_e = 4,079.8 - 17.63X$$

मूल, 1957 तथा 1958 के मध्य।

सारणी 22 3

ढेका निर्माण से रोजगार, 1952—1963, की उपनति का निर्धारण तथा उपनति-मानों के प्रतिशत का परिकलन

वर्ष	Y	कर्मचारी (सहस्र) Y	XY	उपनति मान Y_c	उपनति-प्रतिशत $[Y - Y_c]$
1952	- 11	2,634	- 28,974	2,667 4	98.75
1953	- 9	2,623	- 23,607	2,697 1	97 25
1954	- 7	2 612	- 18,284	2 726 8	95 79
1955	- 5	2,812	- 14,010	2,756 5	101.65
1956	- 3	2 999	- 8,997	2,786 3	107.63
1957	1	2,923	- 2,923	2,816 0	103 80
1958	1	2,778	2,778	2,845 7	97 62
1959	3	2,960	8,880	2 875 4	102.94
1960	5	2,885	14,425	2,905 1	99.31
1961	7	2,816	19,712	2,934 8	95 95
1962	9	2 909	26,181	2,964 5	98.13
1963	11	3,029	33,319	2 994 3	101 16
योग	0	33,970	8,500

आंकड़े सारणी 22 1 के नीचे दिए गए स्रोतों से ।

$$N = 12 \quad \Sigma X^2 = 2(286) = 572$$

$$a = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{33,970}{12} = 2,830.8$$

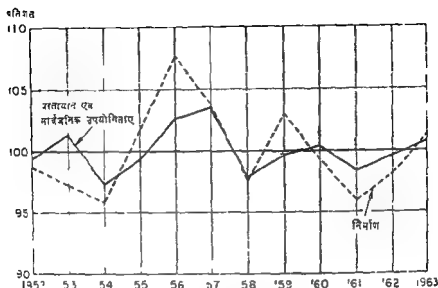
$$b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{8,500}{572} = 14.86$$

$$Y_c = 2,830.8 + 14.86X$$

मुख्य, 1957 तथा 1958 के मध्य ।

X इकाइयाँ, $\frac{1}{2}$ वर्ष ।

दिखाए गए हैं । उपनति प्रतिशत के आंकड़ों के दो समुच्चय चार्ट 22 4 में आलेखित किये गये हैं, जहाँ यह देखा जा सकता है कि जब कोई श्रेणी अपनी उपनति-रेखा से ऊपर (या नीचे) होती है, तब दूसरी श्रेणी भी प्रायः अपनी उपनति-रेखा से ऊपर (या नीचे) होती है । चार्ट 22 4 में हम सम्बन्ध की घनिष्ठता का समुचित चित्र प्राप्त होता है; तथापि इस



चार्ट 22.4 यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेका निर्माण में कर्मचारियों की संख्या, 1952—1963, की उपनति की प्रतिशतताएँ। आंकड़े सारणी 22.2 तथा 22.3 व।

उद्देश्य की सिद्धि चार्ट 22.5 से अधिक अच्छी प्रकार से होती है जो उपनति प्रतिशतताओं की दो श्रेणियों का प्रकीर्ण आरेख है। इस प्रकीर्ण आरेख से यह स्पष्ट है कि दो श्रेणियों की उपनति की प्रतिशतताओं में काफी उच्च घनात्मक सहसम्बन्ध विद्यमान है तथा r का मान सारणी 22.4 में $+0.739$ पाया गया है।

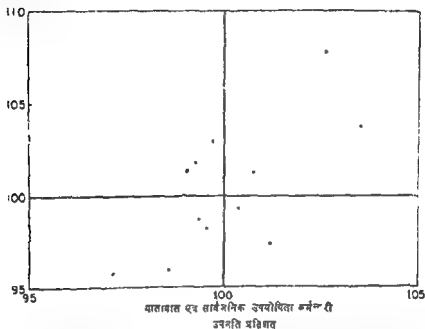
यहलें की सारणियों तथा चार्टों में चित्रित परिस्थिति चार सम्भावनाओं में से एक है।¹ वे हैं

1. दो काल श्रेणियों में घटवृद्ध का घनात्मक सहसम्बन्ध हो सकता है, किन्तु उपनतियों विपरीत दिशा में हो सकती हैं। उपनति की प्रतिशतताओं को सहसम्बन्धित करने

1. इस अध्याय के सम्पूर्ण विवेचन में, हमने केवल ऐतिहासिक उपनतियों और ऐतिहासिक सहसम्बन्ध पर विचार किया है। ऐतिहासिक उपनतियों तथा/अथवा घटवृद्ध के ऐतिहासिक सहसम्बन्ध पर विचार करते हुए उपनति का निरसन न करने का परिणाम इतना सरलता से नहीं बनाया जा सकता, जितना उस अवस्था में जब केवल ऐतिहासिक सम्बन्ध अन्तर्गत है। तथापि, यदि कोई उपनति ऐतिहासिक है तो इसके प्रभाव का निरसन उतना ही महत्वपूर्ण है जितना ऐतिहासिक उपनति की दशा में।

के स्थान पर, उपनति के लिए समझन किए बिना आंकड़ों को सहसम्बन्धित करने के परिणामस्वरूप धनात्मक सहसम्बन्ध गुणांक नीचे चला जाएगा अथवा यह ऋणात्मक गुणांक

डेका निर्माण
कर्मचारी
उपनति प्रतिशत



चार्ट 22.5 1952—1963 में यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा डेका निर्माण में कर्मचारियों की सप्लाई की उपनति की प्रतिशतों का प्रकीर्ण प्रारण।
आंकड़े सारणी 22.4 से।

में भी परिवर्तित हो सकता है, यदि उपनतियाँ घटवर्द्धा के परिप्रेक्ष्य में प्रकट की जायें जैसा कि हमारे आंकड़ों में है। निदर्शन में, $r = +0.739$ उपनति के प्रतिशत आंकड़ों के लिए है, जबकि $r = -0.373$ असमन्वित रोजगार आंकड़ों के लिए है।

2. दो काल-श्रेणियों की घटवर्द्धा को धनात्मक रूप में सहसम्बन्धित किया जा सकता है तथा उपनतियाँ उन्नी दिशा में हो सकती हैं। उपनति की प्रतिशतताओं को सहसम्बन्धित करने की प्रपेक्षा, उपनति के लिए समझन किए बिना आंकड़ों को सहसम्बन्धित करने का परिणाम धनात्मक सहसम्बन्ध गुणांक में वृद्धि होगा। (यदि उपनति की प्रतिशतताएँ दिखाती कि $r = +1.0$, तो उपनतियों की प्रपेक्षा तथा असमन्वित आंकड़ों में सहस्रवध स्थापित करने से r का मान उन्वतर नहीं हो सकता था।) यद्यपि आंकड़ों में प्रत्यक्ष काल को ही व्याप्ति मिलती है, तथापि 1958—1964 में डलवाई लोहे के उत्पादन तथा इस्पात की सिल्लियों और ठनाई के इस्पात के उत्पादन घनत्व संतुलित के निदर्शन को काम करेगे

सारणी 22.4

1952—1963 यातायात एवं सांख्यिक उपयोगिताओं तथा ठेका निर्माण में रोजगार की उपनति की प्रतिशतताओं का सहसम्बन्ध

वर्ष	मानागत एवं सांख्यिक उप-योगिताएँ X	निर्माण Y	XY	X ²	Y ²
1952	99.40	98.75	9,815.7500	9,880.3600	9,751.5625
1953	101.22	97.25	9,843.6450	10,245.4884	9,457.5625
1954	97.16	95.79	9,306.9564	9,440.0656	9,175.7241
1955	99.35	101.65	10,098.9275	9,870.4225	10,332.7225
1956	102.69	107.63	11,052.5247	10,545.2361	11,584.2169
1957	103.50	103.80	10,743.3000	10,712.2500	10,774.4400
1958	97.88	97.62	9,555.0456	9,580.4944	9,529.6644
1959	99.61	102.94	10,253.8543	9,922.1521	10,596.6436
1960	100.31	99.31	9,961.7861	10,062.0961	9,862.4761
1961	98.65	95.95	9,465.4675	9,731.8225	9,206.4025
1962	99.54	98.13	9,767.8602	9,908.2116	9,629.4969
1963	100.70	101.16	10,186.8120	10,140.4900	10,233.3456
योग	1,200.01	1,199.98	120,051.9284	120,039.0893	120,134.2576

स्रोत: सारणी 22.2 तथा 22.3 से।

$$r = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[N \sum X^2 - (\sum X)^2][N \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

$$= \frac{12(120,051.9284) - (1,200.01)(1,199.98)}{\sqrt{[12(120,039.0893) - (1,200.01)^2][12(120,134.2576) - (1,199.98)^2]}}$$

$$= +0.739$$

सारणी 22.5 में आंकड़े प्रस्तुत किए गए हैं, जिनका व्यवहार चार्ट 22.6 में देखा जा सकता है। चार्ट 22.6 में दो श्रेणियों की उपनतियाँ भी दिखाई गई हैं जो दोनों ऊर्ध्वमुखी हैं। चार्ट से यह स्पष्ट है कि अपनी उपनतियों के निर्दोश श्रेणियों की घटबटों का उच्च घनात्मक सहसम्बन्ध है। पहले, अममजित आंकड़ों को सहसम्बन्धित करने में, हम सारणी 22.5 में पाते हैं कि $r = +0.995$ । अब दो श्रेणियों में से प्रत्येक को उपनति-प्रतिशतताओं के रूप में रखा जाता है, तब जो मान प्राप्त होते हैं वे सारणी 22.6 में दिखाए गए हैं। इस सारणी से यह भी प्रकट होता है कि उपनति के प्रतिशत आंकड़ों का सहसम्बन्ध करने में $r = +0.965$ प्राप्त होता है। उपनति के प्रतिशत आंकड़े इतने घनिष्ठ रूप से सम्बन्धित हैं कि उपनतियों की उपेक्षा करने से गुणांक में बहुत अधिक वृद्धि नहीं हो सकती।

3. दो काल-श्रेणियों की घटबटों श्रृंखलात्मक रूप में सहसम्बन्धित हो सकती हैं, किन्तु उपनतियाँ उन्नी दिशा में हो सकती हैं। उपनति की प्रतिशतताओं को सहसम्बन्धित

सारणी 22 5

1958—1964 में ढलुओं लोहे के उत्पादन तथा इस्पात की सिल्लियों और
ढलाई के इस्पात के उत्पादन का सहसम्बन्ध
(दस लाख शार्ट टन में)

वर्ष	ढलुओं लोहा X	इस्पात की सिल्लियों तथा ढलाई का इस्पात Y	XY	X ²	Y ²
1958	57.2	85.3	4,879.16	3,271.84	7,276.09
1959	60.2	93.4	5,622.68	3,624.04	8,723.56
1960	66.5	99.3	6,603.45	4,422.25	9,860.49
1961	64.6	98.0	6,330.80	4,173.16	9,604.00
1962	65.6	98.3	6,448.48	4,303.36	9,662.89
1963	71.8	109.3	7,847.74	5,155.24	11,946.49
1964	85.6	126.9	10,862.64	7,327.36	16,103.61
योग	471.5	710.5	48,594.95	32,277.25	73,177.13

आंकड़े स्टैटिस्टिकल टेम्प्लेट ग्रॉफ दि युनाइटेड स्टेट्स के विभिन्न अकों तथा सर्वे ग्रॉफ
करन्ट विज़नेस, फरवरी 1965, पृष्ठ S-32 से।

$$r = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

$$= \frac{7(48,594.95) - (471.5)(710.5)}{\sqrt{[7(32,277.25) - (471.5)^2][7(73,177.13) - (710.5)^2]}}$$

$$= +0.995$$

करने की अपेक्षा, उपनति के लिए समझन किए बिना आंकड़ों को सहसम्बन्धित करने का
परिणाम ऋणायत्मक सहसम्बन्ध गुणांक में कमी होगा अथवा धनात्मक गुणांक में इसका
परिवर्तन भी हो सकता है, यदि उपनतियाँ घटबढ़ के सम्बन्ध में उद्घोषित हैं।

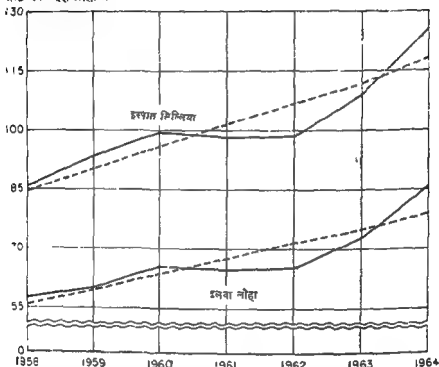
4. दो काल श्रेणियों की घटबढ़ें ऋणायत्मक रूप में सहसम्बन्धित हो सकती हैं
तथा उपनतियाँ विपरीत दिशा में हो सकती हैं। उपनति की प्रतिशतताओं को सहसम्बन्धित
करने की अपेक्षा, उपनति के लिए समझन किए बिना आंकड़ों को सहसम्बन्धित करने के
फलस्वरूप ऋणायत्मक सहसम्बन्ध गुणांक में वृद्धि होगी। (यदि उपनति की प्रतिशतताएँ
दिखाती कि $r = -1.0$, तो उपनतियों की उपेक्षा तथा असमझित आंकड़ों में सहसम्बन्ध
स्थापित करने से r का मान उच्चतर नहीं हो सकता था।)

यदि दो काल-श्रेणियों में सहसम्बन्ध स्थापित करना हो, और यदि दोनों श्रेणियों की
उपनतियाँ समस्त हो, तो निस्सन्देह आंकड़ों की उपनति की प्रतिशतताओं के रूप में व्यक्त
करना आवश्यक नहीं है। तथापि, यदि दो श्रेणियाँ म से एक की उपनति ऊर्ध्वमुखी या

अधोमुखी हों, तो दो श्रेणियों की घटबढ़ों का उष्णुक्त सहसम्बन्ध तब तक प्राप्त नहीं होगा जब तक उपनति को व्यक्त करने वाली श्रेणी से उपनति का निरसन न कर दिया जाए।

कभी-कभी ऐसा होता है कि एक श्रेणी के वार्षिक आंकड़े अन्य घनिष्ठन सहसंबन्धित श्रेणी के लिए समान वार्षिक अंक से पूर्व, नियमित रूप से प्राप्त होते हैं, अथवा

बोटे टन दस लाखों में



चार्ट 22 6 1958—1964 में दलुघ्रा लोहे का उत्पादन तथा इस्पात की सिलिलयो और डलाई के इस्पात का उत्पादन, सरल रेखा उपनतियो सहित। उत्पादन के आंकड़े सारणी 22 5 से। उपनतियाँ इन अर्कों से परिकल्पित की गईं।

उपलब्ध कराए जाते हैं। ऐसी परिस्थिति में, यदि सहसम्बन्ध उच्च है, तो श्रेणी के लिए उपयोगी आकलन प्रस्तुत किया जा सकता है जो इतनी ग्रीष्मता से उपलब्ध नहीं होता। प्रक्रिया में तीन बातें हैं—(1) उस श्रेणी के लिए प्रवर्धित उपनति की प्रतिशतता के रूप में प्रथम उपलब्ध अंक को अभिव्यक्त करना, (2) सारणी 22 4 जैसी सारणी से प्राप्त आकलन समीकरण के प्रयोग द्वारा अन्य श्रेणी के लिए उपनति-प्रतिशत के अंक का आकलन करना, तथा (3) इस आकलित उपनति-प्रतिशत के अंक को उन श्रेणी के लिए प्रवर्धित उपनति के आकलित उपनति-प्रतिशत को लेकर उसके द्वारा उन इकाइयों में बदलना जिसमें श्रेणी अभिव्यक्त हो (टन, डॉलर, सूचकांक आदि)। हम पूर्ववर्ती विवरण के आंकड़ों निदर्शन प्रस्तुत नहीं करेंगे, क्योंकि अधिकांश श्रेणियाँ मासिक आधार पर उपलब्ध हैं, तथा जब वर्ष के ग्यारह महीनों के आंकड़े पहले से ज्ञात हों, तो अन्य श्रेणी के लिए केवल वार्षिक योग पर आधारित उसके श्रेणी वार्षिक योग का आकलन बहुत

सारणी 22 6

1958—1964 में ढलुआँ सोहे के उत्पादन तथा इस्पात की सिल्लियों एवं ढलाई के इस्पात के उत्पादन की उपनति की प्रतिशतताओं का सहसम्बन्ध

वर्ष	ढलुआँ लोहा X	इस्पात की सिल्लियाँ तथा ढलाई का इस्पात Y	XY	X^2	Y^2
1958	102.4	100.6	10,301.44	10,485.76	10,120.36
1959	100.9	103.3	10,422.97	10,180.81	10,670.89
1960	104.7	103.5	10,836.45	10,962.09	10,712.25
1961	95.9	96.6	9,263.94	9,196.81	9,331.56
1962	92.1	91.8	8,454.78	8,482.41	8,427.24
1963	95.7	97.1	9,292.47	9,158.49	9,428.41
1964	108.5	107.7	11,652.90	11,772.25	11,534.76
योग	700.2	700.3	70,224.95	70,238.62	70,225.47

उपनति प्रतिशत के अर सारणी 22 5 के उत्पादन आरंभ से प्राप्त किए गए तथा चार्ट 22 6 में दिखाई गई उपनतियों का उपयोग किया गया।

$$r = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

$$= \frac{7(70,224.95) - (700.2)(700.3)}{\sqrt{[7(70,238.62) - (700.2)^2][7(70,225.47) - (700.3)^2]}}$$

$$= +0.965$$

कम उपादेय हो सकता है। यह स्पष्ट होना चाहिए कि प्रक्रिया घटवटों के दो समुच्चयों के बीच वर्तमान सम्बन्ध के तथा दो उपनति-रेखाओं के भी सातत्य का ग्रहण करती है।

घटवटों का सहसम्बन्ध जब आंकड़े s से विभाजित किए गए हों—अध्याय 16 में सहसंकेत किया गया था कि काल-श्रेणियों की, जिनमें घटवटों के कोणांक प्रलग-प्रलग हो, लेखाचित्रीय विधि से तुलना करना सुगम है, यदि समजित आंकड़ों का प्रत्येक समुच्चय इनके मानक विचलन में विभाजित किया जावे। जब विचलनों की दो श्रेणियों अपने क्रमिक मानक विचलन के रूप में प्रस्तुत की गई हैं, तो सहसम्बन्ध गुणांक के लिए गुणनफल-पूर्ण सूत्र

$$r = \frac{\Sigma xy}{N s_x s_y} = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{x}{s_x} \cdot \frac{y}{s_y} \right)$$

2 श्रेणी कालानुक्रमी हो सकती है अथवा अकालानुक्रमी। उदाहरण के लिए, अपने माध्यों से विचलनों के रूप में तथा अपने मानक विचलनों (जो कभी-कभी मानक एक कहलाते हैं) से सम्बन्ध में अनिवार्य युग्मित श्रेणियों के दो समुच्चय सहसम्बन्धित किए जा सकते हैं, जैसा कि सारणी 22 7 में दिखाया गया है।

सारणी 22.7
1952—1963 में यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेका निर्माण में रोजगार के लिए s के हथ में अभिव्यक्त उपनति से प्रतिशतता बिचलनो का सहसम्बन्ध

वर्ष	यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताएं				ठेका निर्माण			$\frac{x}{s_x} \times \frac{y}{s_y}$
	λ	λ^2	$\frac{\lambda}{s_x}$	y'	y^2	$\frac{y}{s_y}$		
1952	-0.60	0.3600	-0.341	-1.25	1.5625	-0.368	+0.125488	
1953	+1.22	1.4884	+0.694	-2.75	7.5625	-0.810	-0.502140	
1954	-2.84	8.0656	-1.615	-4.21	17.7241	-1.240	+2.002600	
1955	-0.65	0.4225	0.370	+1.65	2.7225	+0.486	-0.179820	
1956	+2.69	7.2361	+1.530	+7.63	58.2169	+2.248	+3.439440	
1957	+3.50	12.2500	+1.991	+3.80	14.4400	+1.120	+2.229920	
1958	-2.12	4.4944	-1.206	-2.38	5.6644	-0.701	+0.845406	
1959	-0.39	0.1521	-0.222	+2.94	8.6436	+0.866	-0.192252	
1960	+0.31	0.0961	+0.176	-0.69	0.4761	-0.203	-0.035728	
1961	-1.35	1.8225	-0.768	-4.15	16.4025	-1.193	+0.916224	
1962	-0.46	0.2116	-0.262	-1.87	3.4969	-0.551	+0.144362	
1963	+0.70	0.4900	+0.398	+1.16	1.3456	+0.342	+0.136116	
योग		37.0893			138.2576		+8.869616	

x तथा y' मान सारणी 22.2 तथा सारणी 22.3 में अंतिम स्तम्भों में 100.00 से बिचलनो के हथ में अभिव्यक्त मान हैं। उपनति देखा से प्रतिशतता बिचलनो का योगफल साधारणतः ठीक शून्य नहीं होता। फिर भी, यदि उपनति शून्यत्व वर्ग द्वारा विचाराधीन मान के अधिकतम में ठीक बँटाई गई है। जो इसकी वण्य अभिव्यक्ति की सभाषना है कि उसकी उपेक्षा की जा सकती है। नीचे सूत्रसम्बद्ध कारक $\left(\frac{\sum \lambda^2}{N}\right)$ तथा $\left(\frac{\sum y'^2}{N}\right)$ को सम्मिलित रूप से s_x तथा s_y के लिए हस्तगत के सीधे स्थान पर प्रदत्त नहीं बदलते।

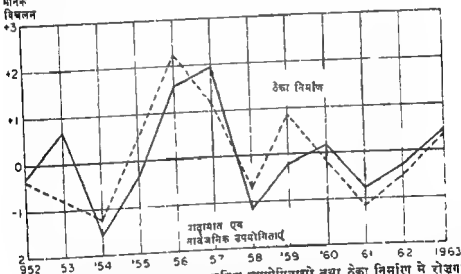
$$s_x = \sqrt{\frac{\sum \lambda^2}{N}} = \sqrt{\frac{37.0893}{12}} = 1.758$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum y'^2}{N}} = \sqrt{\frac{138.2576}{12}} = 3.394$$

$$r = \frac{1}{N} \sum \left(\frac{x}{s_x} \cdot \frac{y'}{s_y} \right) = \frac{1}{12} (+8.869616) = +0.739$$

होता है। इस प्रकार हम, प्राप्त करने हैं केवल (1) युग्मित मानों को गुणा करके, (2) जोड़कर, तथा (3) V में भाग देकर। (ध्यान दीजिए कि $s_x = s_x$ तथा $s_y = s_y$, क्योंकि जोड़ने, या घटाने से एक स्थिर मानों की श्रेणी में s के मान को परिवर्तित नहीं करता।) यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेका निर्माण में रोजगार के आंकड़े अच्छा निदर्शन प्रस्तुत करते हैं क्योंकि चार्ट 22.4 में यह स्पष्ट है कि निर्माण रोजगार की घटबढ़ें उपनति-प्रतिशतनाओं के रूप में अन्य श्रेणियों की घटबढ़ों की अपेक्षा अधिक सुनिश्चित हैं। वास्तव में, चार्ट 22.4 में प्रदर्शित सभी 12 वर्षों में, निर्माण रोजगार के उपनति प्रतिशत मान, यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिता रोजगार मानों की अपेक्षा 100 रेखा से आगे हटे हुए हैं। सारणी 22.7 में उपर्युक्त दो श्रेणियाँ उपनति से प्रतिशत विचलनों के रूप में व्यक्त की गई हैं तथा मानक विचलनों के निर्धारण के लिए आवश्यक परिकलन किए गए हैं। सारणी के नीचे यह द्रष्टव्य है कि यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिता रोजगार के लिए मानक विचलन s_x है 1.758 तथा ठेका निर्माण रोजगार के लिए मानक विचलन s_y है 3.394। सारणी 22.7 $\frac{1}{s_x}$ तथा $\frac{1}{s_y}$ मानों को भी दिखाती है। मानों के ये दो समुच्चय काल-श्रेणी के रूप में, चार्ट 22.7 में दिखाए गए हैं। प्रत्येक श्रेणी को उसके

मानक
विचलन
+3



चार्ट 22.7 यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेका निर्माण में रोजगार 1952—1963 के बीच में अपने मानक विचलनों के रूप में तथा उपनति से प्रतिशत विचलनों के रूप में व्यक्त किया गया है। आंकड़े सारणी 22.7 से।

मानक विचलन में भाग देकर जो कुछ निष्पन्न हुआ, वह चार्ट 22.7 तथा 22.4 की तुलना करके देखा जा सकता है। यदि $\frac{x}{s_x}$ तथा $\frac{y}{s_y}$ मानों का प्रकीर्ण घालेख प्रस्तुत करना हो तो यह चार्ट 22.5 के यथावत समान होगा, सिवाय इसके कि मापक्रम भिन्न होंगे। सारणी 22.7 में $\frac{x}{s_x}$ तथा $\frac{y}{s_y}$ मानों के लिए r का परिवर्तन दिखाया गया है और यह +0.739 प्राप्त हुआ जो सारणी 22.4 में प्राप्त मान के समरूप है।

सारणी 22.8

1952-1963 के सातवत्सव पथ सर्वजनिक उपयोगिताओं से रोजगार, X_1 ,ठेका निर्माण से रोजगार, X_2 , तथा समग्र, X_3 , के प्रांशिक तथा

घनेकाया बहुलव्यय के परिकल्पन

(रोजगार के प्रकटि यद्वा य)

वर्ष	सातवत्सव पथ सर्वजनिक उपयोगिता प्रमाणिकी X_1	ठेका निर्माण कर्मचारी X_2	समग्र X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	X_1^2	X_2^2	X_3^2
1952	4 248	2,634	-11	11,189,232	-46,428	-28,974	6,937,956	18,045,504	18,404,100
1953	4,290	2,623	-9	11,252,670	-38,610	-23,607	6,820,129	18,404,100	16,679,056
1954	4,084	2,612	-7	10,667,408	-38,588	-18,284	6,882,544	17,147,881	18,011,536
1955	4,141	2,802	-5	11,603,082	-20,705	-14,010	7,831,204	17,986,081	15,808,576
1956	4,244	2,999	-3	12,727,756	-12,732	-8,997	8,994,001	16,088,121	16,032,016
1957	4,241	2,923	-1	12,396,443	-4,241	-2,923	8,543,929	17,986,081	15,233,409
1958	3,976	2,778	1	11,045,328	3,976	2,778	7,717,284	16,088,121	15,233,409
1959	4,011	2,960	3	11,672,560	12,033	8,880	8,761,600	16,088,121	15,233,409
1960	4 004	2,885	5	11,551,540	20,020	14,425	8,323,225	16,032,016	15,233,409
1961	3,903	2 816	7	10,990,848	27,321	19,712	7,929,856	15,233,409	15,233,409
1962	3,903	2 909	9	11,353 827	35,127	26,181	8,462,281	15,233,409	15,233,409
1963	3,913	3,029	11	11,852 477	43,043	33,319	9,174,841	15 311,569	15 311,569
योग	48,958	33 970	0	138,503,171	-10,084	8,500	96 396,850	199,981,258	199,981,258

नोट: सारणी 22.1 के नीचे दिए गए सीतों के।

$$\Sigma X_2^2 = 2(286) = 572.$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{N \Sigma X_1 X_2 - (\Sigma X_1)(\Sigma X_2)}{\sqrt{[N \Sigma X_1^2 - (\Sigma X_1)^2][N \Sigma X_2^2 - (\Sigma X_2)^2]}} \\ &= \frac{12(133,503,171) - (48,958)(33,970)}{\sqrt{[12(199,981,258) - (48,958)^2][12(96,398,850) - (33,970)^2]}} \\ &= -0.372824 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{13} &= \frac{N \Sigma X_1 X_3 - (\Sigma X_1)(\Sigma X_3)}{\sqrt{[N \Sigma X_1^2 - (\Sigma X_1)^2][N \Sigma X_3^2 - (\Sigma X_3)^2]}} \\ &= \frac{12(-10,084) - (48,958)(0)}{\sqrt{[12(199,981,258) - (48,958)^2][12(572) - (0)^2]}} \\ &= -0.859264 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{23} &= \frac{N \Sigma X_2 X_3 - (\Sigma X_2)(\Sigma X_3)}{\sqrt{[N \Sigma X_2^2 - (\Sigma X_2)^2][N \Sigma X_3^2 - (\Sigma X_3)^2]}} \\ &= \frac{12(8,500) - (33,970)(0)}{\sqrt{[12(96,398,850) - (33,970)^2][12(572) - (0)^2]}} \\ &= +0.732452 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{123} &= \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}} = \frac{-0.372824 - (-0.859264)(0.732452)}{\sqrt{1 - (-0.859264)^2}\sqrt{1 - (0.732452)^2}} \\ &= +0.737 \end{aligned}$$

तृतीय चर के रूप में समय के साथ प्रसमजित धाँकड़ों का सहसम्बन्ध—दो काल-श्रेणियों को घटबढ़ों को महमबधित करने की एक अन्य प्रक्रिया यह है कि समय को स्थिर रख कर दो श्रेणियों में विद्यमान आशिक महमबध का निर्धारण किया जाए। परिकल्पित आशिक महमबध गुणांक $r_{12.3}$ है, जहाँ X_1 तथा X_2 दो काल-श्रेणियाँ हैं तथा X_3 वर्षों का प्रतिनिधित्व करता है, जो सुविधा के लिए ज्ञान के मध्य में मूल विन्दु से लिए गए हैं। सारणी 22.8 में $r_{1.2}$, r_{13} , तथा r_{23} और उनके निर्धारण के लिए आवश्यक योगफल दिए गये हैं। ध्यान दें कि सारणी 22.8 में दिखाए गए सब योगफल सारणी 22.1, 22.2, तथा 22.3 से प्राप्त किए जा सकते हैं। सारणी 22.8 के नीचे दिए गए परिकलना से हम देखते हैं कि $r_{12.3} = +0.737$ —

यदि तीन चरों के मध्य ज्ञात सम्बन्ध का अध्याय 21 में प्रयुक्त समीकरण के समान एक अनेकधा आकलन समीकरण द्वारा ज्ञात करना अभीष्ट होता, और यदि यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं में कमचारिता की समस्या आधित चर X_1 होता तो हम

प्रकार के समीकरण का प्रयोग करेंगे जहाँ, सारणी 22.8 के समान, X_1 ठेका निर्माण में कमचारिता का आर सकेत करता है तथा 1957 और 1958 के मध्य X_3 के लिए मूल के नाम X_2 समर है तथा X_3 इकाई एक वर्ष। एक धरणा के लिए वार्षिक अंक का, अन्य प्रणाली के लिए आशिक तत्परतापूर्वक उपलब्ध आंकड़ा से आकलन करने के लिए यदि इस प्रकार के समीकरण का प्रयोग किया जाए, तो यह दोनो श्रेणियों के लिए मरत-रेखा उपनति के मानों की तथा दो श्रेणियों की घटबढ़ों में समान सम्बन्ध के नातत्व की कल्पना करता है।

यह सामान्य से अधिक रुचि की बात है कि सारणी 22.8 में प्रस्तुत आशिक और अनेकधा सहसम्बन्ध विचलन पर्याप्त वही है, मानो हमें सारणी 22.2 तथा 22.3 में उपनतियों से विचलन की राशियों का सहसम्बन्ध करना होना। इसे प्रमाणित करने के लिए, सारणी 22.9 बनाई गई है जो यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेका निर्माण में राजगार के लिए उपनति से निरपक्ष विचलन को दिखाती है। सारणी 22.9 के नीचे यह दृष्टान्त है कि उपनति से निरपक्ष विचलनों को सहसम्बन्धित करने की स्थिति में, $r = +0.737$ । यह वही मान है जो सारणी 22.8 में $r_{12.3}$ के लिए प्राप्त हुआ।

अनेकधा तथा आशिक सहसम्बन्ध की प्रक्रिया से क्याकि वही परिणाम प्राप्त होते हैं जो उपनति से निरपक्ष अंतरा का सहसम्बन्धित करके प्राप्त होते हैं, अतः दोनो प्रक्रियाओं में समान कर्मा है। यह कमी पृष्ठ 328—330 पर अतिरिक्त की गई थी, जहाँ यह सकेत किया गया था कि उपनति से निरपक्ष विचलन, उपनति से निरपक्ष विचलन की अपेक्षा प्रायः अधिक सार्थक है। कभी-कभी उपनति से निरपक्ष विचलनों के लिए प्राप्त r का मान, उपनति-प्रतिघातताओं के लिए प्राप्त मान से तनिक बड़ा है, परन्तु इसे उपनति से निरपक्ष विचलनों के प्रयोग के पक्ष में तत्स्वरूप ग्रहण नहीं किया जाना चाहिए। एक या कुछ बड़े निरपक्ष विचलनों का r के मान पर विशिष्ट प्रभाव पड़ेगा, जैसा अध्याय 19 में अतिरिक्त है (देखिए चार्ट 19.9 तथा 19.10 और सहवर्ती विवेचन)।

3. यदि ठेका निर्माण योजना आधित चर होता, तो समीकरण

होगा या X_1 और X_2 चरों का सहसम्बन्ध परस्पर बदली या सक्ती था तथा उपर्युक्त संयोजन का प्रयोग किया जा सकता था।

परिवर्तन-राशियों अथवा परिवर्तन-प्रतिशतताओं का सहसम्बन्ध—कभी कभी, दो काल-श्रेणियों की घटबढ़ों के मध्य सम्बन्ध का अध्ययन दोनों श्रेणियों के लिए प्रत्येक वर्ष से अगले वर्ष के परिवर्तन की राशि का परिवर्तन करके और बाद में परिवर्तन की युग्मित राशियाँ को सहसम्बन्धित करके किया जा सकता है, जिसके मान वनात्मक तथा ऋणात्मक होंगे। यह प्रक्रिया सस्तुति के योग्य नहीं है क्योंकि (1) परिवर्तन की राशियों का प्रयोग मानों के एक युग्म की हानि में प्रतिफलित होगा तथा (2) यदि उपनति अरेखिक है तो उस उपनति के चतुर्दिक् घटन-बढ़न वाले मानों के प्रथम अन्तरो में उपनति तत्त्व फिर भी रहेगा। यह उपनति तत्त्व मूल उपनति की विपरीत दिशा में भी हो सकता था।

विकल्पस्वरूप, दोनों श्रेणियाँ में प्रत्येक के लिए परिवर्तन की प्रतिशतताओं का परिकलन किया जा सकता है और युग्मित प्रतिशतताओं को सहसम्बन्धित किया जा सकता है। यहाँ पुनः अन्तर्ग्रस्त वर्षों की सख्या की अपेक्षा हम मानों का एक कम युग्म पायेंगे। साथ ही उपनति की प्रतिशतताओं में उपनति तत्त्व फिर भी रहेगा यदि श्रेणी के लिए उपनति घातीय वक्र न हुई (पृष्ठ 262)।

ध्यान दें कि इन दोनों प्रक्रियाओं में पहले विवेचित फलनों की अपेक्षा मूल आंकड़ों के भिन्न फलनों को सहसम्बन्धित किया जायेगा।

सारणी 22 9

1952—1963 में यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेका निर्माण में रोजगार की उपनति से निरपेक्ष विचलनों का सहसम्बन्ध (सहो में)

वर्ष	यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताएँ Y	ठेका निर्माण Y	YY	Y ²	Y ⁻
1952	25.7	-33.4	+ 858.38	660.49	1 115.56
1953	+ 51.5	- 74.1	- 3 816.15	2 652.25	5,490.81
1954	-119.2	114.8	+13 684.16	14,208.64	13,179.04
1955	27.0	+ 45.5	- 1,228.50	729.00	2,070.25
1956	+111.3	+212.7	+23,673.51	12 387.69	45,241.29
1957	+143.6	+107.0	+15,365.20	20,620.96	11,449.00
1958	- 86.2	- 67.7	+ 5,835.74	7,430.44	4 583.29
1959	- 15.9	+ 84.6	- 1,345.14	252.81	7,157.16
1960	+ 12.3	- 20.1	- 247.23	151.29	404.01
1961	- 53.4	-118.8	+ 6,243.92	2,851.56	14 113.44
1962	- 18.1	- 55.5	+ 1 004.55	327.61	3,080.25
1963	+ 27.1	+ 34.7	+ 940.37	734.41	1 204.09
योग	+ 0.3	+ 0.1	+ 61 668.81	63 007.15	109,088.19

विचलन सारणी 22 2 तथा 22 3 में रोजगार एवं उपनति-जोड़ों से प्राप्त किए गए थे।

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sum Y_1 Y_2 - (\sum Y_1)(\sum Y_2)}{\sqrt{[\sum Y_1^2 - (\sum Y_1)^2][\sum Y_2^2 - (\sum Y_2)^2]}} \\
 &= \frac{12(61,668.81) - (0.3)(0.1)}{\sqrt{[12(63,007.15) - (0.3)^2][12(109,088.19) - (0.1)^2]}} \\
 &= +0.737
 \end{aligned}$$

काल-श्रेणी को सहसंबंधित करने में समस्याएँ—यह स्पष्ट होना चाहिए कि सह-संबंध गुणांक का मान घाँकड़ों में उपयुक्त उपनति के प्रकार से तथा समय से, जिसमें वह देखा गया है, प्रभावित होता है। यदि 10 वर्षों का समय सप्तसंबंधित किया जा रहा है तो एक श्रेणी के लिए 100 वर्ष के समय में आसृजित उपनति के एक अनुभाग का प्रयोग तथा दूसरी श्रेणी के लिए केवल 10 वर्षों के समय के घाँकड़ों में उपयुक्त उपनति का प्रयोग तर्कसंगत नहीं होगा। प्रत्येक चक्र के आनुमानिक केन्द्र से गुजरने में प्रथम उपनति के प्रसफल होने की पूरी सम्भावना रहेगी, तथा यह भी संभव है कि कुछ चक्रों का स्पर्श तक न हो सके। परिणामस्वरूप सहसंबंध गुणांक दो श्रेणियों के चक्रों में सम्बन्ध की मात्रा को घटा या बढ़ा कर व्यक्त कर सकता है। यह भी स्पष्ट होना चाहिए कि एक श्रेणी के लिए प्रथम उपनति और दूसरी श्रेणी के लिए नम्य उपनति के प्रयोग के परिणाम समान होंगे। यदि हम चक्रीय गतियों को महसूबित करना चाहते हैं, तो ऐसी उपनति का प्रयोग, जो प्रत्येक चक्र के लगभग केन्द्र से गुजरती हो, सर्वोत्तम प्रतीत होता है। हो सकता है कि कोई भी सरल गणितीय वक्र सन्तोषजनक निष्कर्ष न हो और अपेक्षाकृत आत्मनिष्ठ-विधि की, कम से कम प्रथम नग्निकट मान के रूप में, अपनाता पड़े।

अन्य विचारणीय समस्या यह है कि द्वितीय घूर्णों पर आधारित, सहसंबंध की नियर्सन की विधि कालश्रेणी को महसूबित करने के लिए उपयुक्त है प्रथवा नहीं। किसी कालश्रेणी को घटबटों का सामान्यन उपनतिरेखा के चतुर्दिक प्रथम बटन नहीं किया जाता। कभी कभी कुछ चरम विचलन होन हैं, जो वर्गीकृत होने पर r के मान का अधिकतर निर्धारण करने हैं। हम समस्या को ध्यान में रखते हुए, कुछ अधिकारी विद्वान्, चरम विचलनों के विशेष रूप से बड़े होने की दशा में, कोटि-विधि (रेक मैपड) के प्रयोग का सुझाव देत हैं। एक अन्य हल यह है कि द्वितीय घूर्णों की बजाय प्रथम घूर्णों पर आधारित सूत्र का प्रयोग किया जाये।⁴ इस तथ्य को ध्यान में रखते हुए कि बिच बृद्धा इस बात पर केन्द्रित रहती है कि, उनके स्तर अथवा परिवर्तन के परिमाण पर विचार किए बिना, दो श्रेणियाँ एक ही समय, एक ही समान सामान्य दिशा (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) की ओर गतिशील हैं अथवा नहीं, यह हो सकता है कि 2×2 सारणियों (देखिए पृष्ठ 434—436) में प्रयोज्य विधि सर्वथा उपयुक्त हो।

काल-श्रेणी को महसूबित करने में एक अन्य कठिनाई यह है कि सहसंबंध के गुणांक की विश्वसनीयता के आकलन के लिए हमारे पास कोई तर्कसंगत आधार नहीं है। काल-श्रेणी के निमित्त r की किसी विश्वसनीयता परीक्षा के प्रयोग में मुख्य आपत्ति यह है कि विभिन्न प्रेक्षणों का यादृच्छिक बटन नहीं

4. अन्य रोचक सूत्र है

$$C_2 = \frac{\sum (2N - \sum |y|)}{N^2},$$

जहाँ y दो के प्रत्येक युग्म में से छोटे या चीक है जब प्रत्येक श्रेणी औसत विचलनों $\left(\frac{x}{AD_x} \text{ तथा } \frac{y}{AD_y} \right)$ के सम्बन्ध में माध्य से विचलना के रूप में व्यक्त हो। जब बीजगणित के ढंग से योग करने हैं तो y धनात्मक है यदि युग्मित विचलनों के चिह्न समान हैं, तथा उनके असमान होने की दशा में ऋणात्मक है।

होता—काल-श्रेणी में प्रत्येक प्रेक्षण पूर्व और पश्चात् काल-बिन्दुओं के लिए उस श्रेणी में मानों से सम्बन्धित रहता है। इसके अतिरिक्त, इस पारस्परिक सम्बन्ध की निश्चित प्रकृति के सम्बन्ध में हम साधारणतया सामान्यीकरण नहीं कर सकते। कदाचित् यह कठिनाई तब और भी स्पष्ट हो जाएगी जब हम यह पूर्णें कि सारणी 22 7 में प्रयुक्त चक्रीय सम्बन्धों में कितने स्वतंत्र प्रेक्षण सम्मिलित हैं। यद्यपि वहाँ 12 वर्ष हैं किन्तु 12 स्वतंत्र प्रेक्षण नहीं है। वहाँ लगभग तीन पूर्ण चक्र हैं (गर्त में गर्त तक मापते हुए)। तब, क्या वहाँ केवल तीन स्वतंत्र प्रेक्षण हैं? नहीं, वहाँ तीन से अधिक प्रेक्षण हैं, क्योंकि चक्र में प्रत्येक प्रेक्षण पूर्व मानों पर पूर्णतः आश्रित नहीं होता। यदि अब हमारे पास मासिक आँकड़े होते तो क्या 12 वर्षों के लिए हमारे पास 144 स्वतंत्र प्रेक्षण होते? संभावतः नहीं। किन्तु कितने स्वतंत्र प्रेक्षण होंगे यह कहना असम्भव है। यहाँ जो कुछ कहा गया है, वह और भी स्पष्ट हो जाएगा जब पाठक 'ध्वनजला की मात्रा' की धारणा को समझ लेंगे। इसका विवेचन अध्याय 24 में तथा फिर, सहसम्बन्ध के विशेष नन्दर्भ में, अध्याय 26 में किया गया है।

पिछले सभ निदर्शों में कालानुक्रमी श्रेणियों को भौतिक शब्दावली में व्यक्त किया गया है। उनमें से कोई भी नाद्रिक इकाइया में नहीं थी। जब कोई श्रेणी डालरो की शक्ति में है, तो इसे साधारणतः उपयुक्त मूल्य सूचकांक द्वारा विभाजित करके मूल्य-परिवर्तनों के लिए समजित कर लेना चाहिए। ऐसी परिस्थिति तब आती है जब हम मूल्य और जई, भूसा, गेहूँ, या नाबू फनादि जैसी कृषि-उत्पाद के उत्पादन में सम्बन्ध की परीक्षा करते हैं। विद्यमान महसबध समान वर्षों के मूल्य और उत्पादन में अथवा प्रत्येक वर्ष के मूल्य और अगले वर्ष के उत्पादन में हो सकता है।

पहले का विवेचन केवल दो काल-श्रेणियों के सहसम्बन्ध के विषय में है, यद्यपि प्रारम्भ में यह कहा गया था कि हम दो या अधिक काल-श्रेणियों को सहसम्बन्धित कर सकते हैं। यदि कोई व्यक्ति सुअर के मांस के मूल्य में वार्षिक घटवृद्ध की सांख्यिकीय ढंग से व्याख्या करने का दावा करे अपने ऊपर नेता है तो निस्सन्देह यह अपने विश्लेषण में न केवल सुअर के मांस के उत्पादन को लाएगा वरन् मक्का के मूल्य और उत्पादन, तथा शायद बकरी के तथा अन्य प्रकार के मांस के मूल्य और उत्पादन पर भी विचार करेगा। इस प्रकार की समस्या उनकी अपेक्षा जिन पर हमने यहाँ विचार किया है, और भी जटिल है, क्योंकि इसमें कई चरों का अनेकधा सहसम्बन्ध अन्तर्ग्रस्त है। फिर भी, प्रक्रियाएँ ठीक वही हैं जो अध्याय 21 में अनेकधा तथा आंशिक सहसम्बन्ध के लिए बताई गई हैं। विचारणीय चरों की सहायता बिना भी क्यों न हो, किन्तु प्रत्येक श्रेणी की उपनति के लिए उपयुक्त समजन करना चाहिए।

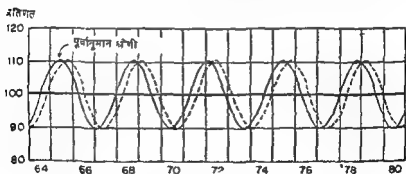
मासिक आँकड़े

मासिक काल-श्रेणियाँ को सहसम्बन्धित करते समय न केवल यह आवश्यक है कि उपनति के लिए समजन किया जाए वरन् आँकड़ा को ऋतुनिष्ठता रहित करना भी आवश्यक है। यदि आँकड़े को ऋतुनिष्ठता रहित न किया गया तो हम आन्तरिक चक्रीय गतिवों के स्थान पर केवल ऋतुजन्य घटवृद्धों को सहसम्बन्धित करेंगे। इसके अनुरिक्त, प्रायः यह भी वाद्यनीय है कि समजित आँकड़ा या घटाकालिक गतिमान औसत द्वारा (जैसे अध्याय 16

म समझाया गया है) मरलन किया जाए ताकि आकस्मिक गतियाँ के कारण हुई अनियमितताओं को दूर किया जा सके।

तुल्यकालिक सम्बन्ध—कभी-कभी यह जानने के लिए कि क्या दो काल श्रेणियाँ साथ-साथ गतिमान होंगी, दो मानिक काल-श्रेणियों को सहसंबन्धित करने की इच्छा होती है। इन प्रकार, ऐसा महसूस स्थापित किया जा सकता है यदि दो संस्थाएँ आर्थिक त्रिआकलाप के समान पक्ष का मापन के अभिप्राय से सूचकांक प्रदान करें। प्रथवा, कोई शोध-विभाग यह जानने में रुचि ले सकता है कि कुछ संघटक श्रेणियों के आधार पर परिकल्पित व्यवसाय-स्थितियों का सूचकांक, चरम गतियों को व्यक्त करने में अधिक व्यापक सूचकांक के साथ, जिसका रचना अधिक खर्चीली भी है, पर्याप्त निकटता से मेल खाता है प्रथवा नहीं। फिर, कोई व्यक्ति बारह फटल रिजर्व जितने में से दो, प्रथवा अधिक के लिए, काल-श्रेणियाँ (उदाहरणार्थ विभागीय महार विन्यास) की तुलना करने में रुचि ले सकता है।

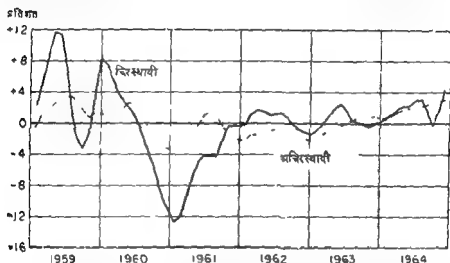
पश्चता और अग्रता—वस्तुतः ऐसी मानिक काल-श्रेणी ज्ञात करने की इच्छा होती है जो एक द्वितीय श्रेणी से आगे चलती हो और इसी कारण जिसका प्रयोग द्वितीय श्रेणी का पूर्वानुमान करने में किया जा सके। वह सम्बन्ध जिसे ज्ञात करने की आशा होती है, कुछ-कुछ चार्ट 22 8 में निरदिष्ट आदर्श सम्बन्ध जैसा है, यद्यपि इस चार्ट में दिखाई गई नियमितता कबो में लगभग कभी नहीं होगी। चार्ट 22 8 में पूर्वानुमान सूचकांक उन श्रेणी से निरन्तर आगे चलता हुआ दिखाई देता है जिसका पूर्वानुमान करना है। जब ऐसी स्थिति होनी है तो पूर्व-गतिशील श्रेणी (अर्थात् पूर्वानुमान सूचकांक) अग्र श्रेणी की "अग्रता" करना हुई कही जाती है। उत्तर-गतिशील श्रेणी को भी पूर्व-गतिशील श्रेणी की



चार्ट 22 8 एक श्रेणी को नियमित रूप से दूसरी से पूर्वगामी दिखाते हुए दो निदर्श श्रेणियाँ।

“पश्चता” करती हुई कहा जाता है। पश्चता-अग्रता सम्बन्ध इतना एकरूप अत्यन्त विरल ही मिलेगा जितना चार्ट 22 8 में दिखाया गया है। वास्तव में, सन् 1941 से, आर्थिक काल श्रेणियों में पश्चता सम्बन्ध, पहल तो द्वितीय विश्वयुद्ध के कारण और फिर कारिगाई युद्ध तथा सुरक्षा उत्पादन के कारण, बिल्कुल सुस्पष्ट नहीं रहे हैं।

चार्ट 22 9, फरवरी 1959 से दिसम्बर 1964 तक के स्थायी तथा अस्थायी निर्माणों और उत्पादन के फेडरल रिजर्व सूचकांकों को प्रकट करता है। ये सूचकांक फेडरल रिजर्व बोर्ड द्वारा सामयिक अनुसूच्य गतियों के लिए समजित किए गए थे। लेखकों ने उपनति को दूर किया तथा अनियमित गतियों को 1, 2, 1 भारित त्रैमासिक गतिमान औसत द्वारा सरल बनाया। चार्ट 22 9 में व्यक्त यथार्थ स्थिति चार्ट 22 8 में प्रस्तुत निदर्शी स्थिति से पर्याप्त भिन्न है, जहाँ एक श्रेणी दूसरी से नियमित रूप से



चार्ट 22 9 1959 से 1964 तक स्थायी तथा अस्थायी निर्माणों के उत्पादन के फेडरल रिजर्व सूचकांकों की चक्रीय गतियाँ। आकड़े सारणी 22 10 से तथा उक्त सारणी में छोड़ दिए वर्षों की कार्यसूचियों (अनिश्चित) से। दोनों सूचकांक उपनति और अनुसूच्य तथा अनियमित गतियों के लिए समजित किए गए थे, तथा प्रतिगता विचलना के रूप में अभिव्यक्त किए गए थे।

पुरोगामी थी। चार्ट 22 9 की परीक्षा कतिपय रुचिकर बातों को प्रकट करती है : 1961 और 1963 में अस्थायी निर्माणों के सूचकांक में निम्न बिन्दुओं का स्थायी निर्माणों के सूचकांक में वैसे ही निम्न बिन्दुओं से संपात प्रतीत होता है, 1959, 1960 और 1961 में स्थायी निर्माणों के सूचकांक में उच्च बिन्दु अन्य सूचकांक में उच्च बिन्दुओं से कुछ महीने पुरोगामी प्रतीत होते हैं।

सामान्यतः, स्थायी निर्माणों का सूचकांक अन्य सूचकांक से पुरोगामी प्रतीत होता है। यह जानने के लिए कि निकटतम एकरूपता कब दिखमान रहती है, हम कई सहसम्बन्ध गुणोंको का परिकलन करेंगे। पहले, तुल्यकालिक रूप से दो श्रेणियों को मध्य-संबन्धित करने से हम $r = +0.670$ पाते हैं। फिर, स्थायी निर्माणों के सूचकांक के मुकाबले अस्थायी निर्माणों के सूचकांक को एक मास की अग्रता प्रदान करके, दोनों को तुल्यकालिक करेंगे, हम $r = +0.519$ प्राप्त करेंगे। यहाँ अस्थायी निर्माणों के सूचकांक के लिए फरवरी 1959 को स्थायी निर्माणों के सूचकांक के लिए मार्च 1959 के मास तुल्यकालिक करने शुरू करना प्रारम्भ होता है और अग्र श्रेणियों के लिए

नवम्बर 1964 का पञ्च श्रणियों के लिए दिसम्बर 1964 के साथ युग्मित करके समाप्त होता है। चाट 22.9 म दो श्रणियाँ में पञ्चता बहुत स्पष्ट न होने के कारण, हम स्थायी निर्माणों के सूचकांक का एक मास की अग्रता प्रदान करके युग्मित करने की चेष्टा करते हैं जिसके लिए परिकलनों को सकत सारणी 22.10 म है। इससे $r = +0.628$ प्राप्त होता है जो प्रथम प्राप्त मान की अपेक्षा अधिक है। अतः इस दिशा में हम इस निदर्श का आग्र अनुगमन करेंगे।

अब स्थायी निर्माणों के सूचकांक के लिए द्वा मास की अग्रता का यत्न करते हुए हम $r = +0.608$ प्राप्त करते हैं जो उस सूचकांक की एक मास की अग्रता के लिए गुणांक की अपेक्षा कम है। फिर हम सहसंबन्ध गुणांक को स्थायी निर्माणों के सूचकांक के मास तीन मास की अग्रता सहित परिकलित करते हैं और $r = +0.555$ प्राप्त करते हैं जो दो मास की अग्रता के लिए अभी अभी प्राप्त मान की अपेक्षा कम है। इस निदर्श के लिए r के प्रतिरिक्त मानों के परिकलन द्वारा जायद ही कोई उपसन्धि हो अतः हम परिणामों का सार निम्न प्रकार से प्रस्तुत करेंगे

अग्रता की श्रणियाँ	r का मान
अस्थायी निर्माणों का सूचकांक निम्न अग्रता ग्रहण करता है	
एक मास	+0.519
दो मास	+0.416
तीन मास	+0.328
तुल्यकालिक	+0.600
स्थायी निर्माणों का सूचकांक निम्न अग्रता ग्रहण करता है	
एक मास	+0.628
दो मास	+0.608
तीन मास	+0.555

उच्चतम सहसंबन्ध गुणांक उस समय पाया गया जब स्थायी निर्माणों के सूचकांक में एक मास की अग्रता थी। फिर भी वह सूचकांक अस्थायी निर्माणों के सूचकांक के लिए बहुत सन्तोषजनक पूर्वनिर्माण श्रणों के रूप में काम नहीं करेगा क्योंकि r का मान पर्याप्त निकट नमरूपता का व्यक्त नहीं करता।

दूसरी श्रणी के व्यवहार के परिचायक के रूप में उपादेय होने के लिए एक काल श्रणी का दूसरी में अग्रता ग्रहण करना सदा आवश्यक नहीं है। मेरीलैंड विश्वविद्यालय के व्यवसाय तथा आर्थिक शास्त्र विद्यालय की रिपोर्ट है कि वाल्टामोर बैंक ग्रुप मेरीलैंड बैंक ग्रुपों के साथ +0.9993 सहसंबन्धित है और मेरीलैंड बैंक ग्रुप सयुक्त राज्य में बैंक ग्रुपों के साथ +0.9853 सहसंबन्धित है। व्यूरो की टिप्पणी है कि वाल्टामोर श्रणी की दिशा में वतन या झुकाव से राज्य और राष्ट्र में झुकाव के संकेत की आशा की जा

सकती है।" इस सम्बन्ध का उपादेयता डग तथ्य में है कि बाल्टीमोर के लिए आर्किडे मेरीलैंड ग्रन्थवा संयुक्त राज्य के लिए आकड़ा की अपेक्षा अधिक गोप्यता से उपलब्ध हो सकये।

सारणी 22 10

फरवरी 1959 से दिसम्बर 1964 तक स्थायी निर्माणों के फडरल रिजर्व सूचकांक और अस्थायी निर्माणों के सूचकांक के मध्य सहसम्बन्ध निर्धारण स्थायी निर्माणों के सूचकांक में एक मास की अग्रता के साथ

(अक्टूबर 1961 तथा 1957 100 तथा उन तिथि के बाद 1957 1959=100 दोनों सूचकांकों का आधार है। दोनों सरकार कृतज्ञ उपनति और अनियमित गतिधों के लिए समजित किए गए हैं तथा प्रतिप्रतता रिचलनों के रूप में अभिव्यक्त किए गए हैं।)

वय तथा मास	स्थायी निर्माणों का सूचकांक	युग्म अंकन	अस्थायी निर्माणों का सूचकांक	X	Y	Y'
1959 फरवरी	+ 37	L →	07		1174	
मास	+ 57		+ 01	+ 032	3749	001
अप्रैल	+ 91	L →	+ 14	+ 798	8100	196
मई	+ 117		+ 23	+ 7070	13689	529
जून	+ 114		+ 26	+ 3042	12996	676
जुलाई	+ 67		+ 32	+ 3648	4489	1024
अगस्त	+ 10		+ 33	+ 2211	100	1089
सितम्बर	21		+ 25	+ 750	441	625
अक्टूबर	34		+ 13	273	1156	169
नवम्बर	14		+ 07	238	196	049
दिसम्बर	+ 45		+ 11	- 124	225	121
1964 जुलाई	+ 78		+ 18	- 396	784	324
अगस्त	+ 79		+ 20	+ 560	841	400
सितम्बर	+ 12		- 22	+ 638	144	484
अक्टूबर	- 02		+ 25	+ 310	004	625
नवम्बर	+ 18	L →	+ 27	- 052	324	676
दिसम्बर	+ 42		+ 29	+ 522		841
योग	- 29		23	+ 37604	160797	22307

अनुनिष्ठा रहित आकड़ फडरल रिजर्व बुलेटिन के विभिन्न बकों में।

$$r = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

$$= \frac{70(37604) - (-29)(23)}{\sqrt{[70(160797) - (-29)^2][70(22307 - 23)]}} = +0.628$$

4. किसी अन्य रंगा के लिए जो उस रंगा की अप्रगामी हो त्रिमक लिए पूर्वानुमान अभाव या मापन का दाहगए।

5. जब कोई रंगी रंगी मिल जाए जो नियमित रूप से पञ्च रंगा की पुरोगामी प्रतीत होता है तो श्रृंगिया को उपनि तथा अनियमित रतियों के लिए समजित करें और इन समजित श्रृंगिया के तत्वाविद्या द्वारा प्रश्रित अग्रता के मवान्तम दृश्य भाकनन के लिए r का मान परिक्लिन करें।

6. मापन में प्रकृत अग्रता का अग्रता महत्तर तथा लघुतर अग्रता के लिए r के मानों का परिक्लिन कर नाकि r उच्चतम मान तक पहुँचा जा सक। पिछले दिदेश में यह दा माप था।

7. यदि r का मान ऐसा करने के लिए पर्याप्त ऊँचा होता है तो इस प्रकार का आकलन समाकरण

$$Y = a + bY$$

प्रपचा मभवन एक अरेमिक समाकरण परिक्लिन किया जा सकता है। यहाँ Y पञ्च रंगा के लिए आकलित चरान मान है तथा Y अग्र रंगी का प्रथिन चर्रीय मान है। यदि मापन तथा k के पराभण द्वारा एक म अचिक अग्र रंगिया का पना चन तो अनकधा महामन्त्र (अध्याय 21) के समान एक पूर्वानुमानकारी समाकरण का प्रयाग किया जाएगा।

एक निदा मताहकार नेवा न मान का मल्य निवारण करने के लिए एक वष का अग्रता द्वारा एक स्वतन्त्र चर के साथ अनकधा महामन्त्र का प्रयाग किया है। इस विश्लेषण में आश्रित चर मान का औसत वार्षिक मूल्य है जबकि स्वतन्त्र चर है—वार्षिक नाभाश प्रति गजर वार्षिक आय प्रति शयन मान का पिछले वष का औसत नामिक मूल्य बाजा का हवा या विवाग और समय का एक माप। बाजा का हवा स्वयं अनकधा महामन्त्र की प्रक्रिया से प्राप्त होता है और आय नाभाश तथा समय पर आधारित माल के समुक्त मूल्य औसत तथा उस औसत के आकलनों के मध्य दायकालिक अन्तर का प्रतिनाध व क त है।

अधिकांश आर्थिक और व्यावसायिक आकलन जिस द घमूखता में प्राप्त होते हैं और एक मान से कम के आधार पर काल-श्रृंगी का अभाव एम तत्त्व है जो पूर्वानुमान की विधि के रूप में महामन्त्र का उपयोगिता को क्षाण कर त है। बहुत कुछ सम्भव है कि माप्ताहिक दैनिक अववा प्रति घण्टा के आकड एम मन्त्र का प्रकाश में लाय जा जात हा और कबल कुछ अतर्गमिया द्वारा उपयोग में लाय जात हा। मिडलतनाम्त्री का तर्क होता है कि सभा आर्थिक प्रक्रियाएँ परस्पर सम्बाधित होती हैं। यह तकपूरु प्रतीत नहीं होता कि हमारे चतुर्दिक व्याप्त कलित काय कारण मन्त्र व अपन विकाम में सदा एक मास या अधिक समय अवश्य लेंगे। अनक सम्बध ऐसे अ न्य हाय जो कुछ दिना कुछ घण्टा या लगभग तत्काल हल हो जात हा। यदि बाजा का यह पना चन कि अकस्मात् नाध के एक

नवीन प्रयोगिक प्रयोगों की घोषणा हुई है जो मूल्य-र में अपनी प्रतिक्रिया प्रकट करने में वह कुछ सप्ताह अथवा कुछ घण्टों तक भी नहीं रुकना। जैसे ही साप्ताहिक, दैनिक अथवा उससे भी कम समय के अंकित प्राप्त हों तो यह सम्भव है कि अत्यन्त उपादेय पश्च-अग्र सम्बन्ध प्राप्त किए जा सकें।

कुछ चेतावनियाँ — इस बात पर ध्यान गया होगा कि पिछले अनुभाग के शीर्षक में पूर्वानुमान के महायन्त्र के रूप में अग्र तथा पश्च के प्रयोग का संकेत किया गया है। विगत अनेक वर्षों में निरन्तर प्रश्रित अग्रगामी महसम्बन्ध आगामी मासों पर तब तक लागू नहीं होगा जब तक श्रेणीगत सम्बन्ध पूर्ववत् न बना रहे। यदि आधारभूत आधिक (अथवा अन्य) परिस्थितियाँ बदल जाती हैं, तो सम्बन्ध बदल सकते हैं। इस, या किसी भी अन्य प्रक्रिया द्वारा केवल विचाराधीन श्रेणी की सम्पूर्ण जानकारी के सिलसिले में तथा उन एवं सम्बन्धित श्रेणियों को प्रभावित करने वाली स्थितियों के पूर्वानुमान का प्रयत्न किया जाना चाहिए।

पूर्वानुमान में अग्र-पश्च महसम्बन्धों का प्रयोग भी अन्य आपत्तियों तथा दोषों के अधीन है। जिनमें से मुख्य हैं—

1 अध्याय 19 के संकेतानुसार, r का मान एक या कुछ चरम मानों से अनुचित रूप में प्रभावित हो सकता है। कुछ मासिकीविदों का तर्क यह भी है कि अग्रता की मात्रा के सम्बन्ध में अपनी दृश्य छाप अधिमान्य होती है।

2 तेजी के समय जो पश्चता विद्यमान हो, मन्दी के समय वह उससे भिन्न हो सकती है।

3 यदि अधिकतर परावर्तन बिन्दुओं पर केन्द्रित रहती है, जबकि r चक्र के सब पक्षों में अग्रता और पश्चता को एक-सा महत्त्व प्रदान करता है। केवल यह पूर्वानुमान कर सकता लाभदायक हो सकता है कि दिशा में परिवर्तन की आशा कब की जाए, भले ही परिवर्तन की मात्रा का पूर्वानुमान नहीं किया जा सकता।

4 बहुमध्यक अग्र-पश्च अनुमान के लिए r के परिकलन की प्रक्रिया अस्म-साध्य है।

5 काल-श्रेणी के लिए सम्बन्ध के माप के रूप में सहसम्बन्ध के गुणांक की आलोचनाओं के अनिश्चित महसम्बन्धित चिह्नों की प्रकृति की भी आलोचना की जा सकती है। इसके लिए यह तर्क दिया जा सकता है कि व्यक्ति वर्तमान की तुलना में भविष्य का पूर्वानुमान, किसी प्रसामान्य की अपेक्षा जिसका ठीक-ठीक आकलन प्रायः कठिन होता है, अधिक परिशुद्धता से कर सकता है।

अध्याय 26 में, यादृच्छिक प्रतिदर्शों से परिकलित सहसम्बन्ध गुणांकों की विश्वसनीयता पर ध्यान दिया जावेगा। अग्र-पश्च सम्बन्धों से जो गुणांक प्राप्त किए गए हैं, वे क्योंकि यादृच्छिक प्रतिदर्शों के लिए नहीं हैं, अतः अध्याय 26 की प्रक्रियाएँ अग्रगामी एवं पश्चगामी श्रेणियों के लिए सहसम्बन्ध गुणांकों पर लागू नहीं होगी।

आसंजित वक्र के द्वारा वारंवारता वंटन का चित्रण

वारंवारता वंटन प्रायः बहुत उड़ी जनसंख्या अथवा समष्टि में से लिए गए प्रतिदर्श को दर्शन करता है। प्रतिदर्श चाहे कुछ सौ अथवा कुछ वाडों मदों का ही हो, किंतु यह व्यापक समष्टि का ज़िम्मे से यह लिया गया है, यथोचित प्रतिनिधि हो सकता है। हमें एक प्रतिदर्श के अध्ययन से अपेक्षाकृत बड़े वर्ग का विचार धारण करना चाहिए, क्योंकि समष्टि की सभी मदों या व्यक्तियों को गणना करना प्रायः कभी सम्भव नहीं होता। अतः हम वारंवारता वंटन के वक्र के अनेक प्रकारों में से किसी एक को आसंजित कर सकते हैं ताकि सम्पूर्ण समष्टि के वक्र के प्रतीक हान वाले सामान्य रूप का निरूपण करने का प्रयत्न किया जा सके।

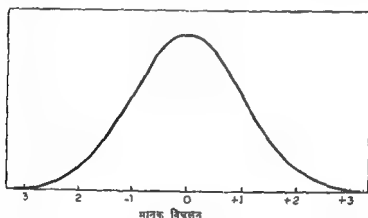
वारंवारता वंटन के वक्र के आसंजन में निम्नलिखित उद्देश्या में से कोई एक हो सकता है

(1) हमारी यह जानकारी की इच्छा हो सकती है कि कोई निर्दिष्ट वक्र वंटन के सामान्य रूप का चित्रण करता है अथवा नहीं। उदाहरणार्थ, हमारी यह सिद्ध करने की इच्छा हो सकती है कि एक ही वस्तु अथवा तथ्य के प्रावृत्त्यात्मक माप करते समय होने वाली आकस्मिक त्रुटियाँ का चित्रण प्रसामान्य वक्र द्वारा किया जा सकता है। चार्ट 23.1 एक प्रसामान्य वक्र है तथा चार्ट 23.2 ऐसे वक्र की आवृत्त्यात्मक मापों की श्रेणी में आसंजित करके प्रस्तुत करता है।

(2) एक ही जनसंख्या में बार-बार लिए गए प्रतिदर्शों से प्राप्त मानों को वक्र में आसंजित करना उपर्युक्त प्रक्रिया का कुछकुछ समान है। इसका एक उदाहरण इस पुस्तक के साथ पढ़ने के लिए अभिकल्पित 'बकबुक' के पंचम संस्करण में अध्यास 27 तथा 28 के रूप में सम्मिलित है। उन अध्यासों में, यादृच्छिक प्रतिदर्शों से परिकल्पित समांतर माध्यों के वारंवारता वंटन को प्रसामान्य वक्र में आसंजित किया गया है। समांतर माध्यों का प्रातिदश जहाँ समष्टि के समांतर माप के चतुर्दिक् एक प्रसामान्य वक्र निर्माण में प्रवृत्त होता है, वहाँ अन्य मास्थिकीय मान अन्य प्रकार के वक्रों का निर्माण कर सकते हैं। प्रतिदर्शों से परिकल्पित मानों के व्यवहार पर अध्यास 24, 25 तथा 26 में और अधिक विचार किया जाएगा।

— 1. एक० ई० आस्टेन तथा सिडनी क्लेन, बकबुक इन एप्लाइड जनरल स्टैटिस्टिक्स, पंचम संस्करण, प्रेंटिस हॉल, इन्क०, एंगलवुड क्लिफ्स, एन० जे० 1967।

(3) मदो के अनुपातो के सम्बन्ध में जिनकी कुछ मानों के ऊपर, नीचे या मध्य में पड़ने की आशा की जानी चाहिए सामान्य-नियम निर्धारण की इच्छा हो सकती है। उदाहरण के लिए, हम बिजली के बल्बों की जीवन अवधि के बारबारता वक्र में आसजित करने का मामला ले सकते हैं। इस प्रविधि से हम इस परिणाम तक पहुँचने के योग्य बन सकते हैं कि सामान्यतः 1,500 घण्टा या अधिक जलने के लिए (अथवा कितने ही निदिष्ट घण्टा से अधिक या कम) कितने अनुपात की आशा की जा सकती है। इसी प्रकार, चार्ट 23 5 तथा 23 6 में निदिष्ट आकड़ों के विषय में, हम मदो की सत्या निर्धारित कर सकते हैं, जिनकी किन्हीं दो X मानों के ऊपर, नीचे, या मध्य में पड़ने की सामान्य आशा की



चार्ट 23 1 प्रसामान्य वक्र ।

जाएगी। उसी प्रकार जीवन बीमावित्त, आयु द्वारा वर्गीकृत मौतों से सम्बन्धित आँकड़ों को श्रेणीबद्ध कर सकता है अथवा वक्र में आसजित कर सकता है और इस प्रकार आयु के प्रत्येक वर्ष में मरने वाले अथवा निदिष्ट आयुओं में जीवित रहने वाले व्यक्तियों की प्रत्याशित मरणा का निर्धारण कर सकता है।

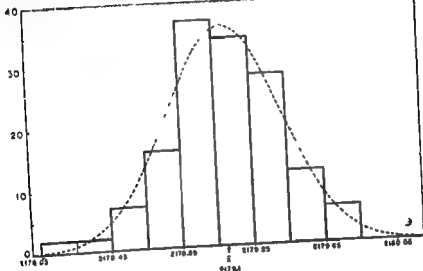
(4) कभी कभी निदिष्ट वक्र पर आसजित किए गए वक्र से, घनिष्ठ रूप से सबद्ध श्रेणी में मानों के सम्भाव्य वक्र की निर्धारित करना संभव है। उदाहरण के लिए, मनुष्यों के गलों के घंटों के मापों पर आसजित किया गया प्रसामान्य वक्र, प्रत्येक आकार के कालरो की, जिनकी आवश्यकता पड़ेगी सम्भाव्य सत्या का पता लगाने में सुविधा प्रदान करता है। ऐसा चार्ट 23 8 तथा सारणी 23 5 में किया गया है।

इस अध्याय में बारबारता वक्र आसजित करने के विषय के विस्तृत विवेचन का प्रयत्न नहीं किया जाएगा। हम केवल सममित वक्र पर विचार करेंगे जिसे प्रसामान्य वक्र कहते हैं, और फिर संक्षेप में द्विपद तथा मरलतर वैषम्य वक्रों में से दो पर विचार किया जाएगा।

प्रसामान्य वक्र

प्रसामान्य वक्र का विकास—प्रसामान्य वक्र (चार्ट 23.1 में प्रदर्शित) की संकल्पना मूलतः अब्राहम डी मावरे द्वारा विकसित तथा सन् 1733 में एक गणितीय निबन्ध² में व्याख्यात प्रतीत होती है। बाद में माव ने खगोलीय पिंडों के परिक्रमा-पथों की गणना में सम्मिलित

मापों की संख्या



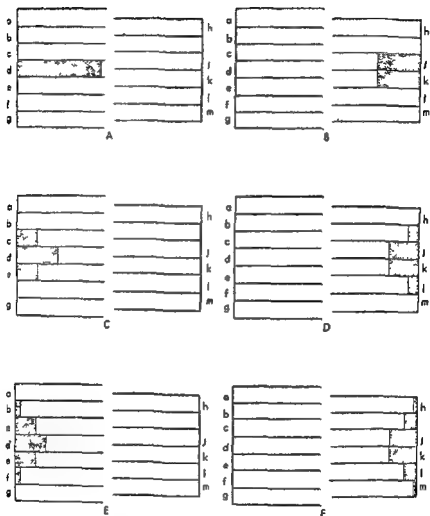
सम्पाई कुटो में

चार्ट 23.2 एक रेखा की सम्पाई के 144 मापों पर आसंजित प्रसामान्य वक्र। माप एल० डी० बेल्ज 'थोअरि आफ एरज' एंड लीस्ट स्क्वेयर्स, दि मैथेमैटिकल कम्पनी, न्यूयार्क, पृष्ठ 147 से लिए गए।

मापों में आकस्मिक त्रुटियों के सिद्धांत का वर्णन करने के लिए इस वक्र का प्रयोग किया। गौस के कार्य के कारण इस वक्र को कभी-कभी गौमियन वक्र कहा जाता है।

चार्ट 23.2 में एक रेखा के 144 मापों का एक स्तम्भ आरेख तथा इन मापों पर आसंजित त्रुटि का एक प्रसामान्य वक्र प्रदर्शित किया गया है। प्रसामान्य वक्र के सम्बन्ध में यह प्रेक्षित होता है कि (1) छोटी त्रुटियाँ, बड़ी त्रुटियों की अपेक्षा, अधिक घटुल होती हैं, (2) बहुत बड़ी त्रुटियाँ होना असंभावित होता है, तथा (3) समान नैक्यात्मक परिमाण की घनात्मक और ऋणात्मक त्रुटियाँ समान रूप से होनी संभव है। माप की त्रुटियों का

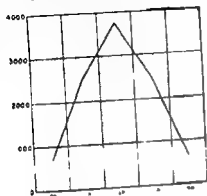
2 एप्रोक्सिमेशो एंड सुमास टरमिनोरम विनोमो $(a+b)^n$ इल सेरियम एक्स्पैसी, नवम्बर 12, 1733 में, जो मिसलेनिया एनेलिटिका, 1730 का द्वितीय संपूर्ण है। देखिए कार्ल पियर्सन, हिस्टोरिकल नोट ऑन दि ओरिजिन ऑफ दि नार्मल कर्व ऑफ एरज, बायोमेट्रिका, खण्ड 16 (1924), पृष्ठ 402-404, तथा, हेनरि एम० वाकर, स्टडीज इन दि हिस्ट्री ऑफ स्टैटिस्टिकल मॅथड, पृ० 13-17, 22-23, विलियम्स एंड विल्किन्स, बाल्टीमोर, 1929।



चोट 23.3 द्विपद ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$) क प्रसार को प्रदर्शित करने क लिए उपकरण ।

चित्रण करने के लिए प्रसामा य वक्र का व्यापक प्रयोग होने के कारण इसे कभी कभी वृटि का प्रसामा य वक्र कहा जाता है । तथापि यह शब्द भ्रामक है क्योंकि माप की वृटियाँ चाहे वे अनभिन्न वृटियाँ ही क्यों न हो सदा प्रसामा य वक्र का अनुसरण नहीं करती ।

सूत्र की व्याख्या—चार्ट 23 3 एक उपकरण को चित्रित करता है जो हमें प्रसामान्य वक्र के सूत्र को समझने में सहायता प्रदान करेगा। उपकरण में अनेक द्रोणिकाएँ हैं जो एक ओर से खुली हुई हैं और चार्ट 23 3 के खण्ड A में प्रदर्शित ढग से रखी हुई हैं।



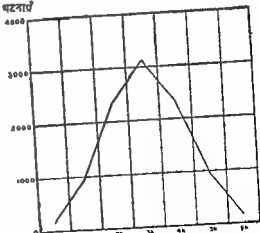
$$\frac{1}{16}t^4 + \frac{4}{16}ht^3 + \frac{6}{16}h^2t^2 + \frac{4}{16}h^3t + \frac{1}{16}h^4$$

चार्ट 23 4 A चार सिक्कों को 10,000 बार उछालने के प्रत्याशित परिणाम।

$\frac{1}{2}$ भाग j में गिरेगा, d में से रेत का $\frac{1}{2}$ भाग j में गिरेगा और $\frac{1}{2}$ भाग k में, तथा e से रेत का $\frac{1}{2}$ भाग k में जाएगा, और $\frac{1}{2}$ भाग l में, $\frac{3}{8}$ भाग j में, $\frac{3}{8}$ भाग k में और $\frac{1}{2}$ भाग l में होगा जो द्विपद $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^2$ के प्रसार का परिचायक है। चार्ट 23 3 के खण्ड E के अनुसार उपकरण को झुकाने से रेत का $\frac{1}{8}$ भाग b में, $\frac{1}{8}$ भाग c में, $\frac{1}{8}$ भाग d में, $\frac{1}{8}$ भाग e में और $\frac{1}{8}$ भाग f में पहुँचेगा, जो द्विपद $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^4$ के प्रसार का परिचायक है। एक बार फिर मशीन को झुकाने (चार्ट 23 3 का खण्ड F) के परिणामस्वरूप कुल रेत का $\frac{1}{32}$ भाग h में, $\frac{5}{32}$ भाग i में, $\frac{10}{32}$ भाग j में, $\frac{10}{32}$ भाग k में, $\frac{5}{32}$ भाग l में और $\frac{1}{32}$ भाग m में जाएगा, जो $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^5$ का प्रसार है।

द्रोणिका d रेत या उसी के समान किसी दानेदार पदार्थ से भरी हुई है। यदि उपकरण को इस प्रकार झुकाया जाए कि बायीं ओर का भाग ऊपर उठ जाए (चार्ट 23 3 का खण्ड B) तो द्रोणिका d में से $\frac{1}{2}$ रेत द्रोणिका j में और $\frac{1}{2}$ द्रोणिका k में गिरेगा। यह द्विपद $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ का परिचायक है। यदि फिर मशीन का दाहिना भाग उठा दिया जाए (चार्ट 23 3 का खण्ड C), तो रेत j में से $\frac{1}{2}$ द्रोणिका c में और $\frac{1}{2}$ द्रोणिका d में गिरेगा, जबकि द्रोणिका k में से रेत $\frac{1}{2}$ द्रोणिका d में और $\frac{1}{2}$ द्रोणिका e में गिरेगा। अब, हमारे पास कुल रेत का $\frac{1}{2}$ द्रोणिका c में, $\frac{1}{2}$ द्रोणिका d में और $\frac{1}{2}$ द्रोणिका e में है, जो द्विपद $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^2$ के प्रसार का परिचायक है। उपकरण को पुनः झुकाने पर, जैसा चार्ट 23 3 के खण्ड D में किया गया है, c से रेत का $\frac{1}{2}$ भाग i में और

घटवार्



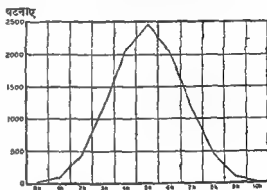
$$\frac{1}{32}t^6 + \frac{6}{32}ht^5 + \frac{15}{32}h^2t^4 + \frac{20}{32}h^3t^3 + \frac{15}{32}h^4t^2 + \frac{6}{32}h^5t + \frac{1}{32}h^6$$

चार्ट 23 4 B छः सिक्कों को 10,000 बार उछालने के प्रत्याशित परिणाम।

यदि हम द्विपद के प्रसार को बहुत दूर तक ले जाने का प्रयत्न करेंगे तो उपकरण बेकार या बेढगा सिद्ध होगा। इसी प्रकार के परिणाम हम सिक्को को उछाल कर प्राप्त कर सकते हैं—इस प्रविधि में किसी उपकरण निर्माण की भी आवश्यकता नहीं पड़ती। यह मान लिया जाता है कि हम सुडौल सिक्को को उछाल रहे हैं जो समान रूप से संतुलित हैं और जो कोर या किनारे के बल खड़े नहीं होंगे। ऐसे सिक्के से चित या पट उछालने के अवसर एक जैसे होंगे और $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}h$ द्वारा अभिव्यक्त किए जा सकते हैं।

यदि दो सिक्के एक साथ उछाले जाएँ तो हम दो पट (कोई चित या चेहरे नहीं), एक पट और एक चित या दो चित या चेहरे प्राप्त कर सकते हैं। इसके लिए कि कोई

चित प्रकट न हो, नीचे गिरने पर दोनों सिक्को का पट या बिना चेहरे वाला भाग ऊपर होना चाहिए। एक चित प्राप्त करने के लिए, एक सिक्के का पट या बिना चेहरे वाला भाग और दूसरे का चित या चेहरे वाला भाग दिखाई देना चाहिए, अथवा प्रथम सिक्के का चित भाग और दूसरे का पट भाग प्रकट होना चाहिए। दो चित केवल तभी प्रकट हो सकते हैं, जब दोनों सिक्को का चेहरा वाला भाग ऊपर हो। एक चित क्योंकि दो रूपों में उपस्थित हो सकता है, जबकि कोई भी चित केवल एक रूप में उपस्थित नहीं हो सकता, अतः इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि एक चित को उछालने की, कोई चित न उछालने की प्रवृत्ति दुगुनी अधिक सम्भावना है। इसी प्रकार दो चितों को उछालने का जितना अवसर है उससे दुगुना अधिक अवसर एक चित को उछालने का है। दो सिक्को को उछालने से उत्पन्न सम्भावनाओं को हम $(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}h)^2$ के द्वारा अभिव्यक्त कर सकते हैं, जिसमें घातांक 2 उछाले जाने वाले सिक्को की संख्या को इंगित करता है। इस द्विपद के प्रसार से



$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} t^{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} t^8 h + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} h^2 t^6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} h^3 t^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} h^4 t^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} h^5 t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} h^6$$

घाटं 23.4 C 10 सिक्को को 10,000 बार उछालने का प्रत्याशित परिणाम। प्रत्येक सम्मुख्य की सम्भावना द्विपद प्रसार द्वारा सकेतित है जो घाट 23.4 के प्रत्येक भाग के नीचे दिखाई गई है।

$$\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}th + \frac{1}{4}h^2$$

प्राप्त होता है। अतः यदि दो सुडौल सिक्के 1,200 बार उछाले जाएँ तो हम t^2 (कोई चित नहीं) की 300 बार, th (एक चित) की 600 बार, और h^2 (दो चित) की 300 बार प्राप्ति की आशा कर सकते हैं।

यदि तीन सिक्के उछाले जाएँ, तो व्यंजक होगा

$$(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}h)^3 = \frac{1}{8}t^3 + \frac{3}{8}t^2h + \frac{3}{8}th^2 + \frac{1}{8}h^3,$$

जो यह सकेत करता है कि यदि सिक्के 1,200 बार उछाले जाएँ तो 150 बार कोई चित प्राप्त नहीं होगा, एक चित 450 बार प्राप्त होगा, दो चित 450 बार, और तीन चित 150 बार प्राप्त होंगे।

चार सिक्कों को उछालने से प्रत्याशित परिणाम चार्ट 23.4 के खण्ड A में दिखाए गए हैं, जबकि 6 और 10 सिक्के उछालने से प्रत्याशित परिणाम क्रमशः खण्ड B तथा C में दिखाए गए हैं। य सभी वक्र सम्मिश्रित हैं, तथा ज्यों-ज्यों उछाले जाने वाले सिक्कों की संख्या बढ़ती जाती है, त्यों-त्यों वक्र निष्कोण होता जाता है। जब 10 सिक्के उछाले जाते हैं, तब ग्यारह बिन्दु अन्वलिखित करने पड़ते हैं (देखिए खण्ड C), किन्तु यदि 100 सिक्के उछाले जाते तो 101 बिन्दु अन्वलिखित करने पड़ते और वक्र प्रायः वंसा ही प्रतीत होगा जैसा चार्ट 23.1 में। जैसे ही N अनन्तता पर पहुँचता है तो $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^N$

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

सीमा तक पहुँच जाना है जो प्रसामान्य वन का व्यञ्जक है। मवेत निम्न प्रकार है,

Y_c = समान्तर माध्य से 1 दूरी पर एक कोटि की परिकल्पित ऊँचाई,

σ = जनसंख्या का मानक विचलन,

८ = जनमर्यादा का मान, $\sqrt{2\pi} = 2.5066$,
८ = अक्षर, ३।४।५९, $\sqrt{2\pi} = 2.5066$,

$\lambda =$ घनत्व, 3 14159, $\sqrt{2\pi} = 2.5066$,
 $\lambda =$ घनत्व, 2 71828, लघुगणको की नैपेरियन विधि का आधार, तथा

४ = समान्तर माध्य से चुना हुआ बिचलन ।

उपर्युक्त दो प्रश्नों को प्रतिस्थापित करके, हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$Y_c = \frac{1}{2.5066\sigma} 2.71828^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

प्रसामान्य वक्र को आसजित करना

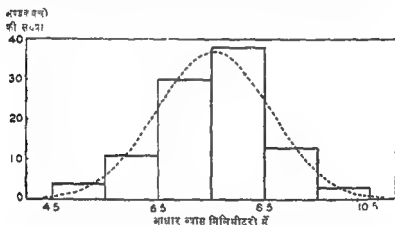
चाट 23 2 में एक प्रसामान्य वक्र एक रेखा के मापों की श्रेणी पर आसजित करके दिखाया गया था। यह दिखाई देता है कि वे आँकड़े उसी वस्तु के पुनरावृत्त माप थे। चाट 23 5 में हमारे पास भिन्न प्रकार के आँकड़े हैं, जो सजातीय समूह से अनेक व्यक्तियों के मापों के परिचायक हैं। उसी वस्तु के पुनरावृत्त मापों में सम्मिलित आकस्मिक घुटियाँ प्रायः प्रसामान्य वक्र का अनुसरण करती हैं। फिर भी, किसी विशेषता के विषय में अनेक विशिष्ट व्यक्तियों के माप ऐसे वक्र का अनुसरण कर भी सकते हैं और नहीं भी कर सकते। उदाहरण के लिए, वयस्क व्यक्तियों के एक सजातीय वर्ग को ऊँचाई के बटन के अनिवार्य रूप से प्रसामान्य होने की आशा की जा सकती थी, किन्तु उन्हीं व्यक्तियों के भार का बटन

3 द्विपद नौ एक अन्य मोमा पोषण बटन है जिस तक द्विपद पहुँचता है, यदि निम्नो में से कोई बहुत छोटी हो तथा N अन्तता पर पहुँचता हो। पोषण बटन को आसन्नित करने का वर्णन एक० ई० त्राँपसटन एलिमेटरी स्टेटिस्टिकस विद एप्लीकेशन्स इन मैथीमिजि एंड दि वायलाबिकल साइन्सिस, डाबर प्रकाशन, इन्का०, न्यूयार्क, 1959, पृष्ठ 41—49 में किया गया है।

स्पष्टतः दाहिनी ओर को झुकेगा। चार्ट 23.5 में जबकि घोघो के अण्डकवचो के आधार व्यास का आसजित प्रसामान्य वक्र द्वारा चित्रण किया जा सकता है, वहाँ यह बहुत कुछ संभव है कि उन्ही अंडो के भार, निश्चित वैषम्य को प्रकट करेंगे।

चार्ट 23.5 में आरोपित वक्र बंटन के उस रूप को और मकेल करता है जिसकी हम आशा करनी चाहिए यदि हमारे प्रतिदर्श बहुत बड़े थे, अथवा यदि हमने सम्पूर्ण जनसमुदाय को माप लिया था। इसका अभिप्राय यह है कि, यदि एक बड़े वर्ग का अध्ययन किया गया, तो हमें प्रतिदर्श में प्राप्त आधार-व्यास की अपेक्षा छोटे और बड़े दोनों आधार व्यास के साथ कुछ उदाहरण मिलेंगे।

भारोक्त योग्यता के आंकड़ों पर प्रसामान्य वक्र आसजित करना— सारणी 23.1 में दूरियों के बंटन को दिखाया गया है जहाँ तक हाई स्कूल की 303 नौसिखुमा लड़कियाँ आधार गेंद फेंक पाईं। ये आंकड़े उनके, जिनसे चार्ट 23.5 अंकित किया गया है, इस बात में नितांत समान है कि वे अनेक विभिन्न व्यक्तियों के माप हैं। यह देखा जा सकता है कि



चार्ट 23.5 समुद्री घोघे, साइफो कर्टिस, के 99 अण्डकवचो के आधार व्यासों पर आसजित प्रसामान्य वक्र। आधार व्यास के आंकड़े गुनर बॉरसन, स्टडीज़ ग्रान दि ऐगकंसूल्स एंड डिबेलएमेट ऑफ़ आर्कटिक मेरीन प्रोसोब्रान्स, पृष्ठ 7, मैटर्नैलर ओओपोनर्नर रजिमील अफ-कोमि-मिमीन फार विडसकावसिज एडसोलेस्वर आइ ग्रोनवैड से।

लड़कियों में से बहुत कम ने आधार गेंद का 4.5 फुट से कम दूर फेंका और बहुत कम ने 11.5 फुट या अधिक दूर फेंका। चार्ट 23.6 का स्तम्भ आरेख सारणी 23.1 के आंकड़ों को प्रदर्शित करता है।

प्रेक्षित वारंवारता बंटन पर एक प्रसामान्य वक्र आसजित करने के लिए हम समीकरण का पुनर्लेखन करने हैं

$$Y_e = \frac{N}{2.5066\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

जहाँ N प्रतिदर्श में प्रेक्षणों की संख्या है,

σ प्रतिदर्श बंटन का वर्ग अन्तरास है, तथा

s प्रतिदर्श का मानक विचलन है।

हम प्रेक्षित आँकड़ों के समुच्चय पर एक प्रसामान्य वक्र आसजित करते समय s की अपेक्षा, σ के एक आकलन, $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum r^2}{N-1}}$ का प्रयोग कर सकते हैं, जिसका वर्णन अगले अध्याय में किया जाएगा। फिर भी, हम सामान्यतः s को वरीयता प्रदान करते हैं, क्योंकि यह जनसमुदाय में प्रसार का आकलन होने की अपेक्षा प्रेक्षित आकार के प्रतिदर्शों के प्रसार को मापता है। इसमें आगे, प्रसामान्य वक्र के आसजन का औचित्य प्रमाणित करने के लिए, पर्याप्त बड़े N वाले वारवारता वक्रों के लिए s तथा $\hat{\sigma}$ में अन्तर इतना कम है कि इसका आसजन पर बहुत कम प्रभाव पड़ेगा। उदाहरण के लिए, सारणी 23.1 के आँकड़ों के लिए, $s = 20.95$ फुट तथा $\hat{\sigma} = 20.98$ फुट।

सारणी 23.1

सर्वो कक्षा की 303 छात्राओं द्वारा आधार गेंद फेंकने की दूरी

दूरी फुटों में	छात्राओं की संख्या
15 किन्तु 25 से कम	1
25 किन्तु 35 से कम	2
35 किन्तु 45 से कम	7
45 किन्तु 55 से कम	25
55 किन्तु 65 से कम	33
65 किन्तु 75 से कम	53
75 किन्तु 85 से कम	54
85 किन्तु 95 से कम	44
95 किन्तु 105 से कम	31
105 किन्तु 115 से कम	27
115 किन्तु 125 से कम	11
125 किन्तु 135 से कम	4
135 किन्तु 145 से कम	1
योग	303

आँकड़े स्पोर्ट्स इल्यूस्ट्रेटेड तथा हेलेन वेस्ट, दि प्रोबल स्कूल गरी, इंडियाना से। माप सन् 1935 में लिए गए।

सम्पूर्ण आसजन प्रक्रिया के दो पग हैं, प्रथम, आसजित वक्र की निश्चित रूपरेखा जानने के लिए अनेक कोटियों के मानों का निर्धारण, तथा, दूसरे, वक्र के अंशों के लिए, जो हमारे लिए महत्वपूर्ण हैं, सानुपातिक क्षेत्रों का परिकलन।

कोटियाँ—प्रसामान्य वक्र के सूत्र की ओर पुनः संकेत करके,

$$Y_s = \frac{N_i}{2.5066s} 2.71828^{\frac{-x^2}{2s^2}},$$

ऐसा प्रतीत होता है कि बटन पर प्रसामान्य वक्र आसजित करने के लिए हमें N , Δ , और s के मानों की आवश्यकता है। पिछले अध्यायों में वखित प्रविधि द्वारा परिकलित करके हम पाते हैं कि $\Delta = 80.63$ फुट तथा $s = 20.95$ फुट। क्योंकि 303 लड़कियाँ थी, $N = 303$ ।

माध्य पर निर्भित करने के लिए हम पहले कोटि का परिकलन करेंगे। इसे Y_0 नाम दिया गया है और वह आसजित वक्र की अधिकतम कोटि है। क्योंकि माध्य पर $x = 0$, हम

$$Y_0 = \frac{303 \times 10}{2 \times 5066 \times 20.95} 2.71828^{\frac{-0^2}{2(20.95)^2}}$$

प्राप्त करते हैं। उपयुक्त व्यंजक में 2.71828 का घातांक शून्य है। क्योंकि शून्य घात

तक बढ़ाने पर कोई समस्या एक हो जाती है $2.71828^{\frac{-0^2}{2(20.95)^2}} = 1$ अतः यह स्पष्ट है कि

माध्य पर कोटि निर्माण के लिए व्यंजक $e^{\frac{-x^2}{2s^2}}$ सदैव 1 के बराबर होता है तथा

$$Y_0 = \frac{N_1}{2 \times 5066s}$$

इसलिए

$$Y_0 = \frac{N_1}{2 \times 5066s} e^{\frac{-x^2}{2s^2}} = Y_0 2.71828^{\frac{-x^2}{2s^2}}$$

विचारानुगत समस्या के लिए,

$$Y_0 = \frac{303 \times 10}{2 \times 5066 \times 20.95} = 57.7$$

यथासंभव निष्काण वक्र का रेखांकन करने के योग्य बनने के लिए अब हमारी इच्छा Y_0 के दोनों ओर पर्याप्त अतिरिक्त कोटियों का निर्माण करने की है। यदि हम माध्य से 4.19 फुट की क्रमिक दूरियाँ चुनें तो हम माध्य से $\frac{4}{s}$ के अन्तर पर कोटियाँ निर्माण करेंगे। माध्य ($X = 84.82$ तथा 76.44 फुट) से कोटियों (क्योंकि वक्र सममित है) के प्रथम युग्म का निर्माण $x = \pm 4.19$ फुट पर होगा। निम्न व्यंजक का प्रयोग करते हुए,

$$Y_0 = 57.7 \times 2.71828^{\frac{-(4.19)^2}{2(20.95)^2}}$$

Y_0 मान का निर्धारण करने के लिए $2.71828^{\frac{-(4.19)^2}{2(20.95)^2}}$ का परिकलन करना आवश्यक नहीं

है बल्कि केवल परिशिष्ट घ को देख लेना पर्याप्त है। $\frac{x}{s}$ का उचित मान देखने पर, जो

इस उदाहरण में $\frac{4.19}{20.95} = 0.20$ है, हम पाते हैं कि

$$2.71828^{\frac{-(4.19)^2}{2(20.95)^2}} = 0.98020$$

तथा

$$Y_0 = 57.7 \times 0.98020 = 56.6$$

सारणी 232

नवी कक्षा की छात्रागो द्वारा आधार गेद फेंकने की दूरी के आकड़ों पर
आसजित प्रसामान्य वक्र की कोटियों का निर्धारण

($\lambda = 80.63$ फट, $s = 20.95$ फुट, $Y_0 = 57.7$)

X (फुटो म जहाँ कोटियाँ निर्मित करनी है)	x (फुटो म λ का से विचलन)	$\frac{x}{s}$	कोटि की सानपा- तिक ऊँचाई $2.71828 \frac{-x^2}{2s^2}$ (परिशिष्ट व)	काटि की ऊँचाई (स्तम्भ 4 $\times Y_0$)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
13.59	-67.04	3.20	0.00598	0.3
17.78	67.85	3.00	0.01111	0.6
21.97	-78.6	2.80	0.01984	1.1
26.16	-74.47	2.60	0.03405	2.0
30.35	-50.78	2.40	0.05614	3.2
34.54	-46.09	2.20	0.08892	5.1
38.73	-41.90	2.00	0.13534	7.8
42.92	-37.71	1.80	0.19790	11.4
47.11	-33.52	1.60	0.27804	16.0
51.30	-29.33	1.40	0.37531	21.7
55.49	-25.14	1.20	0.48675	28.1
59.68	-20.95	1.00	0.60653	35.0
63.87	-16.76	0.80	0.72615	41.9
68.06	-12.57	0.60	0.83527	48.2
72.25	-8.38	0.40	0.92312	53.3
76.44	-4.19	0.20	0.98020	56.6
80.63	0	0	1.00000	57.7
84.82	+4.19	0.20	0.98020	56.6
89.01	+8.38	0.40	0.92312	53.3
93.20	+12.57	0.60	0.83527	48.2
97.39	+16.76	0.80	0.72615	41.9
101.58	+20.95	1.00	0.60653	35.0
105.77	+25.14	1.20	0.48675	28.1
109.96	+29.33	1.40	0.37531	21.7
114.15	+33.52	1.60	0.27804	16.0
118.34	+37.71	1.80	0.19790	11.4
122.53	+41.90	2.00	0.13534	7.8
126.72	+46.09	2.20	0.08892	5.1
130.91	+50.28	2.40	0.05614	3.2
135.10	+54.47	2.60	0.03405	2.0
139.29	+58.66	2.80	0.01984	1.1
143.48	+62.85	3.00	0.01111	0.6
147.67	+67.04	3.20	0.00598	0.3

कोटियों के अगले युग्म के लिए, $r = \pm 8.38$ फुट ($X = 89.01$ फुट तथा 72.25 फुट) और

$$Y_c = 57.7 \times 2.71828^{\frac{-(8.38)^2}{2(20.95)^2}}$$

यहाँ $\frac{x}{s}$ का अनुपात है 0.40 और परिशिष्ट 8 की ओर संवत करने पर हम पाते हैं कि

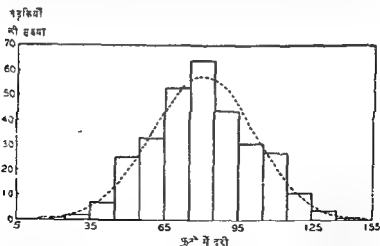
$$Y_c = 57.7 \times 0.92312 = 53.3$$

कोटियों की उँचाइयाँ निर्धारित करने की प्रक्रिया मारखी 23.2 जैसी मारखी के प्रयोग से बहुत शीघ्रतापूर्वक निपटाई जा सकती है। मारखी के उच्च और निम्न भागों में कोटियाँ समान हैं क्योंकि आसजित वक्र सममित है।

आसजित वक्र चार्ट 23.6 में दिखाया गया है। यह प्रतिदर्श के सामान्य रूप के अनुरूप है, किन्तु अनिश्चितताओं को दूर कर देता है और निर्दिष्ट करता है कि क्या आशा की जा सकती थी यदि नुल्य लड़कियों की बहुत बड़ी संख्या के कार्य को अधिक किया जा सकता। अब तक हमने जो कुछ किया है वह केवल आसजित वक्र का रूप प्रदान करता है और आसजन की उपयुक्तता के दृश्य प्रभाव को प्रकट करता है जो इस उदाहरण में अच्छा प्रतीत होता है।

ध्यान—अभी तक हमने यह कहने का काम हाथ में नहीं लिया है कि हार्ड स्कूल की नौमिन्ध्रा लड़कियों के कौन-से अनुपात से आधार गेंद फेंकने की आशा की जा सकती है

(1) किसी निर्दिष्ट फुटों की दूरी तक, या अधिक (2) किसी निर्दिष्ट फुटों की दूरी तक, या कम प्रयत्न (3) एक निर्दिष्ट मान के बराबर या अधिक दूरी तक किन्तु अन्य बड़े मान के



चार्ट 23.6 नवम कक्षा की लड़कियों द्वारा आधार गेंद फेंकने की दूरी के आकड़ों पर आसजित प्रसामान्य वक्र। आँकड़े सारणी 23.1 तथा 23.2 से।

बराबर या कम दूरी तक। हमने यह बताने का भी प्रयत्न नहीं किया कि वारवारता वक्र के विभिन्न वर्गों में से प्रत्येक में किस अनुपात में लड़कियों के आने की आशा की जा सकती

है। प्रत्याशित बारवारताएं आमजित वक्र को समाकलित करके ज्ञात की जाती हैं। फिर भी, प्रविधि अत्यन्त सरल हो जानी है, और समाकलन के किसी ज्ञान की आवश्यकता नहीं है, यदि हम प्रामाण्य वक्र के अन्तर्गत, परिशिष्ट ड के ममान, क्षेत्रों की सारणी का प्रयोग करें। यह परिशिष्ट वक्र के अन्तर्गत आनुपातिक क्षेत्र प्रदान करता है जो X से

किसी एक दिशा में (दोनों दिशाओं में नहीं) निर्दिष्ट $\frac{1}{s}$ दूरियों पर एक कोटि और X पर एक कोटि के मध्य में है। यह कथन परिशिष्ट ड के साथ दिखाए गए छोटे चार्ट द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। परिशिष्ट ड में प्रदर्शित अधिकतम आनुपातिक क्षेत्र 0.50 है, क्योंकि सम्पूर्ण वक्र के अन्तर्गत क्षेत्र 1.0 है।

उन लड़कियों का अनुपात जानने के लिए जिनसे आधार गंद 100 फुट या अधिक दूर फेंकने की आशा की जा सकती है पहले हम $X = 80.63$ फुट और $X = 100$ फुट के मानों में प्रत्याशित अनुपात को निर्धारित करते हैं और बाद में इस अनुपात को 0.50 में घटाते हैं। $X = 100$ फुट पर, $x = 100 - 80.63 = 19.37$ फुट, और क्योंकि $s = 20.95$,

$$\frac{x}{s} = \frac{19.37}{20.95} = 0.92$$

परिशिष्ट ड के सकेत से यह प्रतीत होता है कि क्षेत्र का 0.3212 भाग दो मानों के मध्य है, और इसलिए $0.50 - 0.3212 = 0.1788$ या क्षेत्र का लगभग 18 प्रतिशत, $X = 100$ फुट पर या उससे आगे है।

यदि हम यह जानना चाहें कि लड़कियों के कौनसे अनुपात से आधार गंद को 50 फुट या कम दूरी पर फेंकने की आशा की जा सकती है, तो प्रविधि उपर्युक्त के समानांतर होगी। पाठक को इसे स्वयं हल कर लेना चाहिए। उत्तर 7.2 प्रतिशत है।

विस्तृत दो अनुच्छेदों में अन्तर्गत व्यवकलनों का हम परिहार कर सकते हैं यदि हम परिशिष्ट च का उपयोग करें, जो प्रामाण्य वक्र के एक तारतम्य में क्षेत्रों को प्रदर्शित करता है। यह परिशिष्ट और परिशिष्ट छ जो क्षेत्रों को प्रामाण्य वक्र के दो तारतम्यों में प्रस्तुत करता है, अध्याय 24 के आंशिक वर्ण विषय के सम्बन्ध में विशेष उपादेय होंगे।

उन लड़कियों का अनुपात-निर्धारण करने के लिए जिनसे आधार गंद को 87 और 100 फुट के मध्य की दूरी तक फेंकने की आशा की जा सकती है, हम $X = 80.63$ फुट से $X = 87$ फुट तक वक्र के अन्तर्गत क्षेत्र का परिकलन करते हैं, और $X = 80.63$ फुट से 100 फुट तक क्षेत्र का, और बाद में इन दो आंकड़ों का अन्तर निकाल लेते हैं। प्रथम आनुपातिक क्षेत्र निम्न का प्रयोग करके प्राप्त होता है,

$$x = 6.37 \text{ फुट और}$$

$$\frac{x}{s} = \frac{6.37}{20.95} = 0.30.$$

नवी कक्षा की लंबाइयों द्वारा आधार गैर कक्षों की दूरी के लिए प्रत्येक λ में प्रत्यासित वारवारताओं का निर्धारण

($\lambda = 80.63$ फुट $s = 20.95$ फट)

फुटों में दूरी (1)	वर्गों की सीमाएँ		x माध्य से सीमा तक विवर्तन (4)	x (5)	माध्य और सीमा के मध्य क्षेत्र का अनुपात (परिक्लिष्ट ड) (6)	प्रत्येक वर्ग में क्षेत्र का अनुपात (7)	प्रत्येक वर्ग में प्रत्यासित वारवारताएँ $N = 3034$ (8)
	निम्नतर सीमाएँ (2)	उच्चतर सीमाएँ (3)					
5 से कम	5		75 (3)	3.61	0.5000	0.0001	0.2
5 किन्तु 15 से कम	15		65 (3)	3.13	0.4999	0.0008	0.9
15 किन्तु 25 से कम	25		55 (3)	2.66	0.4991	0.0030	3.2
25 किन्तु 35 से कम	35		45 (3)	6.18	0.4961	0.0107	9.1
35 किन्तु 45 से कम	45		35 (3)	1.70	0.4854	0.0300	20.2
45 किन्तु 55 से कम	55		25 (3)	1.22	0.4554	0.0666	35.0
55 किन्तु 65 से कम	65		15 (3)	0.75	0.3888	0.1154	50.6
65 किन्तु 75 से कम	75		5 (3)	0.27	0.2734	0.1670	57.4
75 किन्तु 85 से कम		85	5 (3)	0.21	0.1064	0.1896	52.0
85 किन्तु 95 से कम		95	4 (3)	0.69	0.0832	0.1717	37.0
95 किन्तु 105 से कम		105	14 (3)	1.16	0.2549	0.1221	22.0
105 किन्तु 115 से कम		115	24 (3)	1.64	0.3770	0.0725	10.2
115 किन्तु 125 से कम		125	34 (3)	2.12	0.4495	0.0335	3.7
125 किन्तु 135 से कम		135	44 (3)	2.60	0.4830	0.0123	1.1
135 किन्तु 145 से कम		145	54 (3)	3.07	0.4953	0.0036	0.3
145 किन्तु 155 से कम		155	64 (3)	3.55	0.4989	0.0009	0.1
155 और अधिक			74 (3)		0.4998	0.0002	303.0
योग					0.5000	1.0000	

* इस स्तम्भ में प्रत्येक वर्ग का क्षेत्रफल दिया गया है। तब यह क्षेत्रफल वारवारताओं के साथ 0.1 या 0.2 के भीतर मेल पाएँगे। यह सारणी 25.10 के x^2 परीक्षण करने में महत्वपूर्ण है।

परिशिष्ट ड प्रदर्शित करता है कि क्षेत्र का 0.1179 भाग $\bar{X} = 80.63$ फुट तथा $X = 87$ फुट के मध्य है। हम पहले ही जानते हैं कि क्षेत्र का 0.3212 भाग $\bar{X} = 80.63$ फुट तथा $X = 100$ फुट के मध्य है, इसलिए 87 फुट और 100 फुट के मध्य आनुपातिक क्षेत्र है

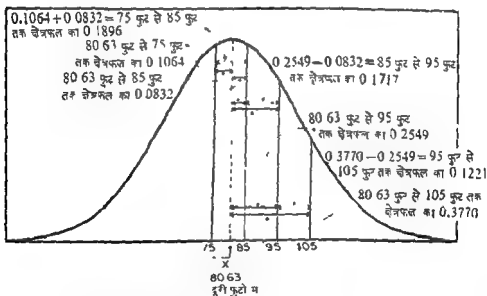
$$0.3212 - 0.1179 = 0.2033, \text{ अथवा लगभग } 20 \text{ प्रतिशत।}$$

सारणी 23.3 की सहायता से, वाग्वास्ता वक्र के प्रत्येक वर्ग में प्रत्याशित वाग्वास्ताएँ निम्न प्रकार प्राप्त की गई

1 स्तम्भ (1) में, मूल वक्र के वर्गों को अवित कीजिए, प्रत्येक मिरे पर एक या दो प्रतिशित वर्गों को छूट दते हुए, क्योंकि आमजित वक्र का परिसर प्रतिदर्श की अपेक्षा प्रायः बड़ा होता चाहिए। सैद्धांतिक रूप से आमजित वक्र दोनों दिशाओं में असंसीमित परिसर वाला है। जिस वर्ग में माध्य पड़ता है, उसमें दो स्थानों की गुंजायश रखिए।

2 स्तम्भ (2) में प्रत्येक वर्ग की निम्नतर सीमाओं को मान में माध्य और उस वर्ग की निम्नतर सीमा के नीचे लिखिए जिसमें माध्य सम्मिलित हो।

3 स्तम्भ (3) में, प्रत्येक वर्ग की उच्चतर सीमा को मान में माध्य और उस वर्ग की उच्चतर सीमा के ऊपर लिखिए जिसमें माध्य सम्मिलित हो।



चार्ट 23.7 सारणी 23.3 के स्तम्भ (6) तथा (7) में प्रविधि का लेखा-चित्रोप निरूपण।

4 हम पहले उस वर्ग का, जिसमें माध्य पड़ता हो, माध्य (80.63 फुट) और उच्चतर सीमा (85 फुट) के मध्य आनुपातिक क्षेत्र ज्ञात करेंगे। माध्य से उच्चतर सीमा का विचलन 4.37 फुट है; यह मान स्तम्भ (4) में अंकित है। क्योंकि $s = 20.95$ फुट,

$$\frac{x}{s} = \frac{4.37}{20.95} = 0.21$$

यह मान स्तम्भ (5) में अंकित है। अब, परिशिष्ट ड में 0.21 देखकर, हम पाते हैं कि क्षेत्र का 0.0832 भाग माध्य तथा 85 फुट के मध्य है। यह मान स्तम्भ (6) में अंकित है। चार्ट 23.7 में लेखाचित्रीय ढंग से प्रविधि को प्रदर्शित किया गया है।

5. अगला पग, माध्य के ऊपर प्रथम श्रेणी की उच्चतर सीमा तथा माध्य के मध्य आनुपातिक क्षेत्र के निर्धारण का है। यह सीमा 95 फुट है, $x = 14.37$ फुट तथा

$$\frac{x}{s} = \frac{14.37}{20.95} = 0.69$$

परिशिष्ट ड में 0.69 को देखने पर ज्ञात होता है कि क्षेत्र का 0.2549 भाग माध्य तथा 95 फुट के मध्य प्रत्याशित होगा। यह मान स्तम्भ (6) में अंकित है। यदि क्षेत्र का 0.2549 भाग 80.63 और 95 फुट के मध्य पाया जाए, जबकि क्षेत्र का 0.0832 भाग 80.63 और 85 फुट के मध्य आता है, तो $0.2549 - 0.0832 =$ क्षेत्र का 0.1717 भाग 85 फुट और 95 फुट के मध्य होगा। इस व्यवकलन का परिणाम स्तम्भ (7) में अंकित है, यह प्रविधि भी चार्ट 23.7 में लेखाचित्रीय ढंग से निरूपित है।

6. मान में माध्य के ऊपर प्रत्येक वर्ग के लिए पग 5 की प्रविधि की पुनरावृत्ति की गई है। प्रत्येक वर्ग के माध्य से उच्चतर सीमा तक आनुपातिक क्षेत्र ज्ञात किए गए हैं और फिर पिछले वर्ग के माध्य से उच्चतर सीमा तक अनुपातों का व्यवकलन किया गया है, जैसा सारणी में प्रदर्शित है।

7. सारणी के स्तम्भ (2) में प्रदर्शित माध्य और निम्नतर सीमाओं के मध्य आनुपातिक क्षेत्र बाद में निर्धारित किए गए हैं। क्योंकि ये क्षेत्र संचयी भी हैं, अतः क्रमिक व्यवकलन पुन आवश्यक हो जाता है।

8. अब हमने माध्य को सम्मिलित कर लेने वाले वर्ग के अतिरिक्त प्रत्येक वर्ग के लिए आनुपातिक क्षेत्रों को स्तम्भ (7) में अंकित कर लिया है। स्तम्भ (6) में हमने निर्धारण किया है कि क्षेत्र का 0.0832 भाग माध्य और 85 फुट के मध्य है, और क्षेत्र का 0.1064 भाग माध्य तथा 75 फुट के मध्य है। इन दो आंकड़ों के योग से 0.1896 की प्राप्ति होती है जो इस वर्ग में क्षेत्र का अनुपात है [देखिए स्तम्भ (7) और चार्ट 23.7]।

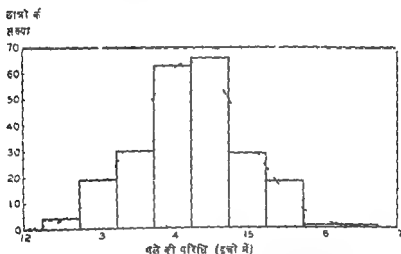
9. स्तम्भ (7) का योग 1.0000 होना चाहिए, क्योंकि माध्य से बटन के प्रत्येक छोर तक क्षेत्र का 0.5000 भाग है। प्रक्षिप्त और प्रत्याशित बारवारताओं में सगति देखने के लिए हम स्तम्भ (8) को सम्मिलित कर लेते हैं, जो प्रत्येक वर्ग के आनुपातिक क्षेत्र को 303 से गुणा करके प्राप्त होता है।

सारणी 23.3 के स्तम्भ (8) में प्रदर्शित प्रत्याशित बारवारताओं की सारणी 23.1 की प्रक्षिप्त बारवारताओं के साथ तुलना करने से आंकड़ों की सामान्य सगति प्रकट होती है, “85 किन्तु 95 फुट से कम” वर्ग के लिए अन्तर सर्वाधिक रहता है। प्रसामान्य वक्र की “आसजन की उत्तमता” की परीक्षा का अध्याय 25 में वर्णन किया जाएगा।

प्रसामान्य वक्र और गलपट्ट (कॉलर) के माप—प्रसामान्य वक्र का एक अन्य उपयोग प्रदर्शित करने के लिए, मान लीजिए कि एक गलपट्ट बनाने वाला कॉलर के लोगों के लिए एक विशेष रूप से अभिकल्पित गलपट्ट के उत्पादन पर विचार कर रहा है।

कॉलेज के लोग क्योंकि एक चुन हुए वम का प्रतिनिधित्व करते हैं, अतः यह वाञ्छित होगा कि उत्पादन तालिका को उनकी विशिष्ट आवश्यकता के अनुसार समझित कर लिया जाए। कॉलेज के लोगों के गना की परिधि के व्यापक आँकड़ उपलब्ध नहीं हैं, किन्तु सारणी 23.4 कॉलेज के 231 पुरुष छात्रों के गना के माप प्रदर्शित करती है। एक प्रसामान्य वक्र को आसजित करने के लिए हमें चाहिए $\bar{X} = 14.232$ इंच तथा $s = 0.719$ इंच। प्रक्षित आँकड़ा का स्तम्भ चित्र और आसजित वक्र चार्ट 23.8 में दिखाए गए हैं।

इस उदाहरण में हमारी समस्या 12.75 इंच किन्तु 13.25 इंच से कम, 13.25 इंच किन्तु 13.75 से कम इत्यादि परिधि वाले गना के कॉलेज के लोगों के प्रत्याशित अनुपात के निर्धारण की नहीं है बल्कि प्रत्येक साइज या आकार (आध आकारों द्वारा) के गलपट्टों की सहायता निर्धारण करने की है जो बनाए जाने हैं। अनुभव कहता



चार्ट 23.8 कॉलेज के 231 पुरुष छात्रों के गले की परिधियों पर आसजित प्रसामान्य वक्र। सारणी 23.4 के आँकड़ों पर आधारित।

है कि प्रोमित रूप से, गले की परिधि से लगभग 2 इंच बड़े गलपट्ट पहन जाते हैं। इसका अभिप्राय यह होगा कि 13.25 इंच औसत परिधि के गले वाले पुरुष 14 साइज या आकार के गलपट्ट पहनते और क्योंकि हम अब आकारों के सम्बन्ध में बात कर रहे हैं, अतः गले 13 से 13.5 इंच परिधि के परिसर में रहेंगे। सारणी 23.5 के प्रथम स्तम्भ में गलपट्टों के आकारों की सूची है जबकि दूसरे स्तम्भ में गना की समस्त परिधियाँ अंकित हैं। इन वर्गों के लिए ही हम सैद्धांतिक बारवारताएँ जानना चाहते हैं। जब स्तम्भों में यही किया गया है तथा प्रत्याशित बारवारताएँ ($N = 1000$) स्तम्भ (9) में प्रदर्शित का गई है। यदि हमारे मूल आँकड़ प्रतिनिधिक हैं, तो 1000 ग्राहकों में से लगभग 270 माँग करेंगे 15 साइज के कासर के लिए, 221 माँगेंगे 14½ साइज के कॉलरों को 213 माँगेंगे 15½ साइज के कॉलर आदि आदि। यह कहना रुचिकर होगा कि इस वर्ग के 1000 ग्राहकों में से केवल 8

सारणी 23 4

कॉलेज के 231 पुरुष छात्रों के गलों की परिधि

मध्यमान (इंचों में)	विद्यार्थियों की संख्या
12 5	4
13 0	19
13 5	30
14 0	63
14,5	66
15 0	29
15 5	18
16 0	1
16 5	1
योग	231

आँकड़ों का स्रोत गोपनीय ।

से हम यह आशा कर सकते हैं कि वे 13 या उससे छोटे साइज की माँग करेंगे और 1,000 में से केवल 7, 17 या उससे बड़ा साइज लेना चाहेंगे ।

प्रसामान्य वक्र की उपयुक्तता—जैसा पीछे संकेत किया जा चुका है, प्रसामान्य वक्र अनेक प्रकार के वक्रों में से केवल एक है जो बारवारता-वटन पर आसजित किया जा सकता है । किसी भी दशा में सब वटनों पर सामान्य प्रयोज्यता रखने के रूप में इस पर विचार नहीं किया जाना चाहिए । क्योंकि यह सत्य है, अतः यह बताने के लिए कि प्रसामान्य वक्र को कब आसजित किया जाए, अथवा आसजित करने पर, यह उपयुक्त है अथवा नहीं, कौनसा निर्देशक है ?

1 प्रतिदश वटन का आलेखित वक्र अथवा स्तम्भ-चित्र अत्यन्त अशोधित निर्देशक का कार्य करता है । यदि विशिष्ट वैषम्य विद्यमान है तो यह, अन्य अनियमितताओं के समान, स्पष्ट हो जाएगा ।

2 प्रतिदर्श आँकड़े संचित किए जा सकते हैं और सारणी 23 6 के समान प्रतिशत रूप में प्रस्तुत किए जा सकते हैं, ये मचथी प्रतिशतताएँ फिर, चार्ट 23 III के समान, अवगणित प्रयिकता-पत्र⁴ पर आलेखित की जा सकती हैं । यदि परिणामी वक्र लगभग एक सीधी रेखा हो तो हम आश्वस्त होकर एक प्रसामान्य वक्र को आसजित करने के लिए आगे बढ़ सकते हैं ।

4, ऊर्वाधर पैमाने को हम प्रकार अभिकल्पित किया जाता है कि प्रसामान्य वक्र का तोरण सीधी रेखा के समान प्रतीत होगा ।

सारणी 23.5
कॉलेज के मुख्य छात्रों के लिए गलपट्ट आकारों (मापों) के प्रत्याक्षित बटन का निर्धारण
($\bar{X} = 14.232$ इंच, $s = 0.719$ इंच)

गलपट्ट का माप (साइज)	बले की सगत परिधि (2)	बलों की सीमाएँ	2	$\frac{r}{s}$	माध्य और सीमा के मध्य क्षत्र का अनुपात (परिशिष्ट ड)	प्रत्यक्ष वर्ग म क्षत्र का अनुपात (8)	प्रत्याक्षित बारवारताएँ $N = 1,000$ (9)
(1)	(2)	निम्नतम सीमाएँ (3)	माध्य से सामान्य (5)	(6)	(7)	(8)	(9)
12½	11.5 से कम	11.5	2.732	3.80	0.5000	0.0001	0.1
13	11.5 किन्तु 12.0 से कम	12.0	2.232	3.10	0.4999	0.0009	0.9
13½	12.0 किन्तु 12.5 से कम	12.5	1.732	2.41	0.4990	0.0070	7.0
14	12.5 किन्तु 13.0 से कम	13.0	1.232	1.71	0.4920	0.0356	35.6
14½	13.0 किन्तु 13.5 से कम	13.5	0.732	1.02	0.4564	0.1103	110.3
15	13.5 किन्तु 14.0 से कम	14.0	0.232	0.32	0.3461	0.2206	220.6
15½	14.0 किन्तु 14.5 से कम	14.5	0.268	0.37	0.1255	0.2698	269.8
16	14.5 किन्तु 15.0 से कम	15.0	0.768	1.07	0.1443	0.2134	213.4
16½	15.0 किन्तु 15.5 से कम	15.5	1.268	1.76	0.3577	0.1031	103.1
17	15.5 किन्तु 16.0 से कम	16.0	1.768	2.46	0.4603	0.0323	32.3
17½	16.0 किन्तु 16.5 से कम	16.5	2.268	3.15	0.4931	0.0061	6.1
	16.5 किन्तु 17.0 से कम	17.0	2.768	3.85	0.4992	0.0007	0.7
	17.0 किन्तु या अधिक				0.4999	0.0001	0.1
योग					0.5000	1.0000	1,000.0

सारणी 23.6

नवी कक्षा की 303 छात्राओं द्वारा आधार गैद फेंकने की दूरी के सचयी बटन

फुटो में दूरी	छात्राओं की संख्या	योग का प्रतिशत
25 से कम	1	0.33
35 से कम	3	0.99
45 से कम	10	3.30
55 से कम	35	11.55
65 से कम	68	22.44
75 से कम	121	39.93
85 से कम	185	61.06
95 से कम	229	75.58
105 से कम	260	85.81
115 से कम	287	94.72
125 से कम	298	98.35
135 से कम	302	99.67
145 से कम	303	100.00

सारणी 23.1 के सचयी जंकटे।

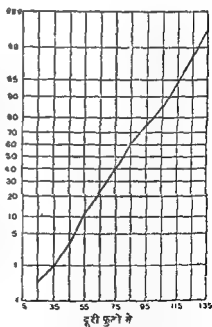
3 β_1 तथा β_2 के मानों को परिकलित किया जा सकता है, जैसा अध्याय 10 में वर्णित है तथा उन विधियों से जो अध्याय 26 में प्रस्तुत की गई हैं, हम यह जान सकते हैं कि क्या β_1 शून्य से सार्थक रूप में भिन्न है और क्या β_2 में 1.0 से भिन्नता सार्थक है। हाई स्कूल की नौसिलुआ छात्राओं द्वारा आधार गैद के प्रक्षेपों के लिए, $\beta_1 = 0.0104$ तथा $\beta_2 = 2.7724$ । इन मानों में से कोई भी एक प्रसामान्य वक्र के मान से सार्थक रूप में भिन्न नहीं है।

4 वक्र आसजित करने और विभिन्न वर्गों के लिए प्रत्यागित बारवारताओं को निर्धारित कर लेने के बाद "आसजन की उत्तमता" की परीक्षा की जा सकती है। यह परीक्षा अध्याय 25 में वर्णित की गई है और निर्देश किया गया है कि छात्राओं द्वारा आधार गैद प्रक्षेपों के आंकड़ों पर प्रसामान्य वक्र का आसजन सन्ताप प्रद है।

द्विपद

पहले दिखाया जा चुका है कि सिक्के उछाल कर सममित द्विपद $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^n$ के प्रसार का प्रायोगिक रूप से सन्निकटन हो सकता है। उसी प्रकार एक असममित द्विपद का प्रायोगिक रूप में प्रसार किया जा सकता है।

सचयियों का प्रतिशत



चार्ट 23.9 असममित द्विपद प्रायिकता-पत्र पर प्रदर्शित, नवी कक्षा की 303 छात्राओं द्वारा आधार गैद प्रक्षेपों की दूरी का सचयी बटन। सारणी 23.6 के आंकड़ों पर आधारित।

विषमिit द्विपदों की प्रायोगिक मंरचना—हम पहले एक ऐसे पासे का विचार करे जिसकी चार दिशाएँ काली रंगी हुई हैं। अगर हम इस पासे को उछालें तो यह स्पष्ट है कि श्वेत दिशा ऊपर आने की संभावना $(\frac{1}{2})$ 3 में से 1 या $\frac{1}{3}$ है, जब कि काली दिशा ऊपर आने की संभावना $(\frac{2}{3})$ 3 में से 2 या $\frac{2}{3}$ है। श्वेत दिशा की उपस्थिति के निर्देश के लिए A (जिम्हा कोई आंकिक मान नहीं है) और श्वेत दिशा की अनुपस्थिति अर्थात् काली दिशा की उपस्थिति के निर्देश के लिए B (इसका भी कोई आंकिक मान नहीं है) का प्रयोग करन हुए, हम निम्ति का इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं

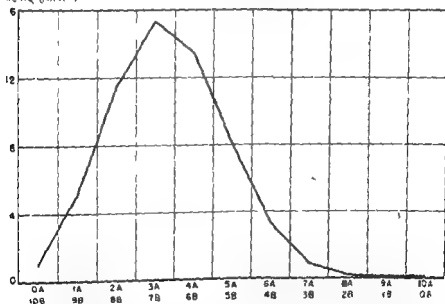
$$-B + \frac{1}{3}A \text{ अथवा } \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}A,$$

जो निर्देश करता है कि, यदि पामा (यह मानते हुए कि पासो नितान्न सत्मित है) 1500 बार उछाला जाए, तो हमें काली दिशा 1,000 बार और श्वेत दिशा 500 बार प्रकट होने की प्राप्ता करनी चाहिए।

यदि अब हम दो पासो (प्रत्येक चार काली दिशा वाली) को उछालें तो या तो कोई श्वेत दिशा प्रकट न होगी (दोनों काली दिशाएँ प्रकट होगी), या एक श्वेत दिशा (एक श्वेत दिशा और एक काली दिशा) या दो श्वेत दिशाएँ प्रकट होगी। व्यञ्जक है

$$(\frac{2}{3}B + \frac{1}{3}A)^2 = \frac{4}{9}B^2 + \frac{4}{9}BA + \frac{1}{9}A^2.$$

मटनाएँ हजारी में



चार्ट 23.10 10 पासो के 59,049 प्रयोगों का प्रत्याक्षित परिणाम, प्रत्येक पासे की चार दिशाएँ काली और दो श्वेत हैं। प्रत्याक्षित उपस्थितियाँ इस व्यञ्जक द्वारा दी गई हैं

$$\begin{aligned}
 & (\frac{2}{3}B + \frac{1}{3}A)^{10} \\
 &= \frac{1,024}{59,049}B^{10} + \frac{5,120}{59,049}AB^9 + \frac{11,520}{59,049}A^2B^8 + \frac{15,360}{59,049}A^3B^7 + \frac{13,440}{59,049}A^4B^6 \\
 &+ \frac{8,064}{59,049}A^5B^5 + \frac{3,360}{59,049}A^6B^4 + \frac{960}{59,049}A^7B^3 + \frac{180}{59,049}A^8B^2 \\
 &+ \frac{20}{59,049}A^9B + \frac{1}{59,049}A^{10}.
 \end{aligned}$$

अतः, यदि 1,800 प्रक्षेप किए जाएं तो हमें 800 बार किसी श्वेत दिशा की प्राप्ति की आशा नहीं करनी चाहिए, एक श्वेत दिशा की प्राप्ति की 800 बार आशा करनी चाहिए और दो श्वेत दिशाओं की 200 बार।

यदि ऐसे तीन पासे उछाले जाएं तो व्यञ्जक होगा

$$\left(\frac{2}{3}B + \frac{1}{3}A\right)^3 = \frac{8}{27}B^3 + \frac{4}{9}B^2A + \frac{4}{9}BA^2 + \frac{1}{27}A^3$$

यह दिखाई देगा कि द्विपद अपने विपमित प्रकृति दिखाना आरम्भ कर रहा है। यह तब अधिक स्पष्ट रूप से दिखाई देगा यदि हम प्रत्येक चार काली दिशा वाले 10 पासों के प्रक्षेपण का विचार करें। व्यञ्जक होगा $\left(\frac{3}{4}B + \frac{1}{4}A\right)^{10}$, जो चार्ट 23.10 में लेयाचिनोय चीन से दिखाया गया है। इस तथ्य के परिणामस्वरूप कि - तथा -अमान है, वक्र निश्चित रूप से विपमित है।



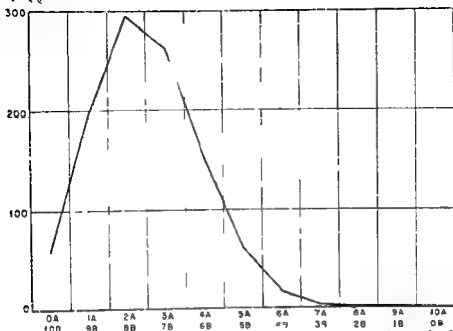
यदि : एक बड़ी भिन्न है और π छोटी, तो वैपम्य और भी अधिक या बड़ा होगा। उदाहरण के लिए हम चार दिशा वाले सूचीस्थम्भीय (पिरैमिडीय) पर विचार करें जिसकी एक दिशा श्वेत और तीन काली हो। प्रक्षेप में प्राप्त "नीचे" की दिशा पर विचार करना आवश्यक होगा। एक पासे के प्रक्षेपण पर व्यञ्जक है $\frac{3}{4}B + \frac{1}{4}A$

एक चार दिशा वाला पासा, जिसकी प्रत्येक दिशा समबाहु त्रिभुज है।

यदि इन चार दिशा वाले पासों में से 10 का प्रक्षेपण हो तो उनका व्यवहार $\left(\frac{3}{4}B + \frac{1}{4}A\right)^{10}$ द्वारा निदिष्ट होगा। इस द्विपद का प्रसार चार्ट 23.11 में दिखाया गया है जो स्पष्ट ही चार्ट 23.10 के वक्र से अधिक विपमित है।

एक द्विपद को आसजित करना—एक द्विपद के व्यञ्जक से यह स्पष्ट है कि यह आँकड़ों को पृथक् करने के लिए आसजित करने के लिए अत्यधिक उपादेय उपकरण है। प्रेक्षित आँकड़ों की श्रेणी पर एक द्विपद को आसजित करने के लिए निम्नलिखित तीन सोपान आवश्यक हैं (1) π का उचित मान निर्धारित करना, जो हमें π भी प्रदान करता है, क्योंकि $\pi = 1 - \pi$ । π का साइज वक्र की विपमता की मात्रा निर्धारित करता है। यदि $\pi = 0.50$ हो तो $\pi = 0.50$ और वक्र सममित होगा। 0.50 से π किमी भी दिशा में जितनी ही दूर हटाई जाएगी, उतनी ही विपमता अधिक होगी। यदि $\pi < 0.50$ हो तो वक्र घनात्मक रूप से विपमित होगा, यदि $\pi > 0.50$ हो तो यह शृण्वात्मक रूप से विपमित होगा। जब समष्टि के मान (π तथा τ) ज्ञात न हों अथवा जब उनके सम्बन्ध में उचित अभिकल्पना त की जा सके, तब हमारे पास इसके अतिरिक्त कोई विकल्प नहीं रहता कि प्रतिदर्श से निर्धारित अनुपातों का प्रयोग किया जाए। इन्हें हम P तथा q कहते हैं। (2) द्विपद $(\tau + \pi)^N$ अथवा $(q + p)^N$ का प्रसार करें जहाँ N —श्रेणियों की संख्या—एक, क्योंकि प्रसारित द्विपद में $N+1$ पद हैं। N प्रतिदर्श में मदों की संख्या भी है। (3) प्रसारित द्विपदों की भिन्नों में से प्रत्येक को, प्रतिदर्शों की संख्या k से गुणा करें।

घटनाएँ हज़ारों में



घाट 23 11 चार दिशा वाले 10 पासो के, जिनमे से प्रत्येक की तीन काली और एक इवेत दिशा है 1,048,576 प्रक्षेपों के प्रत्याशित परिणाम । प्रत्याशित घटनाएँ इस व्यंजक द्वारा दी गई हैं ।

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{3}{4}B + \frac{1}{4}A\right)^{10} = & \frac{59,049}{1,048,576} B^{10} + \frac{196,830}{1,048,576} AB^9 + \frac{295,245}{1,048,576} A^2B^8 \\
 & + \frac{262,440}{1,048,576} A^3B^7 + \frac{153,090}{1,048,576} A^4B^6 + \frac{61,236}{1,048,576} A^5B^5 + \frac{17,010}{1,048,576} A^6B^4 \\
 & + \frac{3,240}{1,048,576} A^7B^3 + \frac{405}{1,048,576} A^8B^2 + \frac{30}{1,048,576} A^9B + \frac{1}{1,048,576} A^{10}
 \end{aligned}$$

सारणी 23 7

पाँच की पशु-बिछाली में उत्पन्न नरसुघरो की संख्या

नर सुघरो की संख्या	नर सुघरो की निर्दिष्ट संख्या वाली पशु बिछालियों की संख्या
0	2
1	20
2	41
3	35
4	14
5	4
योग	116

आकृति ए० एस० पाक्स, "स्टैटिस्टिकल थिंकिंग-रेखो एंड रिलेटिव फ़िजीकल । दि फ़ीसबेगीज ऑफ़ सैन्स नैम्बरेजिन्ग इन पिज लिटल , बायोमेट्रिका, खण्ड 15, पृष्ठ 373—381 से । पाक्स $p=0.4876$ का प्रयोग नरके जंसा 4 से 12 सुघरो की बिछालियों के लिए निर्धारित है, उसी धर्मी पर एक द्विपद आसजित करता है ।

सारणी 23.8

नीचे की बिछलियों से उत्पन्न नर सुप्रो की संख्या के बटन पर आसजित किया गया द्विपद $\lambda(q+p)$,
 $(\lambda = 116, q = 0.5121, p = 0.4879, N = 5)$

नर सुप्रो की संख्या (p की बात)	रजक लघु	लघु λ	लघु C	q की निदिष्ट व्यक्ति या बात का लघु (5)	p की निदिष्ट व्यक्ति या बात का लघु (6)	योग का Σ [(3)] + [(4)] + [(5)] + [(6)] (7)	प्रत्यागित बार-बारताएँ $\lambda = 116$ [(7) का प्रति लघु] (8)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
0	$k. Co. q^0. p^0 = (116) (1) (0.5121)^0 (0.4879)^0$	2 064458	...	48 546775 - 50	...	0 611233	41
1	$k. C_1. q^1. p^1 = (116) (5) (0.5121)^1 (0.4879)^1$	2 064458	0 698970	38 837420 - 40	9 688331 - 10	1 289179	195
2	$k. C_2. q^2. p^2 = (116) (10) (0.5121)^2 (0.4879)^2$	2 064458	1 000000	29 128065 - 30	19 376662 - 20	1 569185	371
3	$k. C_3. q^3. p^3 = (116) (10) (0.5121)^3 (0.4879)^3$	2 064458	1 000000	19 418710 - 20	29 064993 - 30	1 548161	353
4	$k. C_4. q^4. p^4 = (116) (5) (0.5121)^4 (0.4879)^4$	2 064458	0 698970	9 709355 - 10	38 753324 - 40	1 226107	168
5	$k. C_5. q^5. p^5 = (116) (1) (0.5121)^5 (0.4879)^5$	2 064458	48 441655 - 50	0 506113	32
योग	1160

* Co, C_1 , आदि द्विपद गुणांक हैं, द्विपद प्रसार के प्रत्येक पद के लिए गुणांक ।

$$Co = 1, C_1 = N, C_2 = \frac{N(N-1)}{1.2}, C_3 = \frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}, \text{ आदि ।}$$

सारणी 23.7, पाँच सुझरो वाली बिछालियो मे उपस्थित नर सुझरो की सख्या के बटन को प्रदर्शित करती है। आँकड़े ऐसी 116 बिछालियो के हैं, अतः $N=5$ तथा $k=116$ सब मिलाकर $5 \times 116 = 580$ सुझर और सुझरियाँ हैं और $(0 \times 2) + (1 \times 20) + (2 \times 41) + (3 \times 35) + (4 \times 14) + (5 \times 4) = 283$ नर सुझर हैं। अतः नर सुझरो का अनुपात p है

$$\frac{283}{580} = 0.4879$$

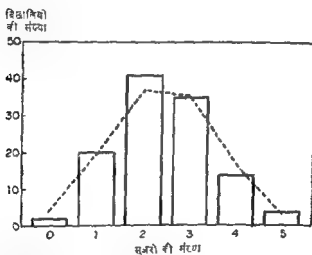
तथा $q=0.5121$.

जैसा ऊपर मकेन किया जा चुका है, आमजित करने का कार्य $k(q+p)^N$ के प्रसार से सम्पन्न हो जाता है। V के स्थान पर 5 को प्रतिस्थापित करने से, किन्तु अन्य सकेत-चिह्नों का वन 7 रख कर हम प्राप्न करते हैं

$$k(q+p)^5 = k(q + 5qp + 10q^2p + 10q^3p^2 + 5q^4p + p^5)$$

जहाँ p की घात 5 वा बिछालिया म उत्पन्न सुझरो की सख्या को निर्दिष्ट करती है।

द्विपद का आमजित वरन म प्रयोग किया जाने वाला आकिक व्यञ्जक है $(0.5121 + 0.4879)^5$, और क्योंकि $k=116$ अतः हमें $116(0.5121 + 0.4879)^5$ का प्रसार करना चाहिए। यह



चार्ट 23.12 पाँच की बिछालियो मे उत्पन्न सुझरो की सख्या के बटन पर आमजित द्विपद। आतः सारणी 23.7 और 23.8 से।

$$116[(0.5121)^5 + 5(0.5121)^4(0.4879) + 10(0.5121)^3(0.4879)^2 + 10(0.5121)^2(0.4879)^3 + 5(0.5121)(0.4879)^4 + (0.4879)^5]$$

हो जाता है। जसा सारणी 23.8 म दिखाया गया है, नधुगणको की महापता से परिकलन अत्यन्त सुगमतापूर्वक किए जा सकते हैं। यद्यपि इस समस्या के लिए परिकलन यन्त्र के प्रयोग

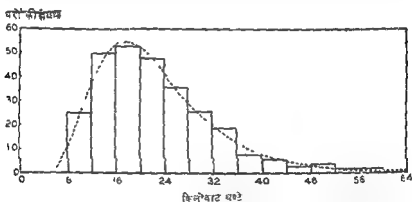
द्वारा घाते प्राप्त की जा सकती है और गुणन किये जा सकते हैं, तथापि जब द्विपद को पर्याप्त मात्रा में उन्नत किया जाए तब लघुगुणको का प्रयोग आवश्यक हो जाता है।

चार्ट 23 12 प्रेक्षित और प्रत्याशित बारबारताओं को प्रदर्शित करता है। प्रेक्षित आँकड़े पृथक्कृत दंडिकाओं की सहायता से प्रस्तुत किए गए हैं जिससे श्रेणी की असतत प्रकृति सूचित की जा सके। "आसजन की उत्तमता" की परीक्षा, जैसी अध्याय 25 में वर्णित की गई है, प्रेक्षित और प्रत्याशित बारबारताओं में पर्याप्त समष्टि को निर्दिष्ट करती है।

यह अभिकल्पित नहीं किया जाना चाहिए कि अभी व्याख्यात विधि से सभी असतत श्रेणियों को आसजित किया जा सकता है। कुछ आँकड़े अन्य बटनों से अच्छी प्रकार चित्रित किए जा सकते हैं, उदाहरण के लिए पोयसन बटन, जिसके आसजन की विधि लेखकों में से एक ने अन्यत्र वर्णित की है।⁵

विषममित वक्र

जिन द्विपदों पर अभी-अभी विचार-विमर्श किया गया है, वे असतत आँकड़ों पर आसजन के लिए उपयुक्त हैं किन्तु सतत आँकड़ों के साथ प्रयोग करने के लिए वे पर्याप्त परिशुद्ध नहीं हैं। आसजित द्विपद में X -अक्ष के निर्दिष्ट बिन्दुओं पर खड़ी की गई कोटियों की श्रेणी होती है (देखिए चार्ट 23 12)। यदि इस प्रविधि को सतत आँकड़ों (या असतत आँकड़ों जहाँ X -एकाइयाँ वर्ग-अन्तराल की अपेक्षा छोटी हों) के बटन पर लागू किया जाये तो हम एक निष्कोण वक्र के अन्तर्गत क्षेत्र-निर्धारण की अपेक्षा प्रत्येक वर्ग के मध्य-मान पर एक कोटि खड़ी कर रहे होंगे। स्पष्ट ही, वर्गों का संख्या जितनी ही अधिक होगी,



चार्ट 23 13 एक पूर्वी नगर में मध्यम श्रेणी के 282 घरों में प्रत्येक मास उपयोग में लाई गई बिजली के किलोवाट घंटों पर आसजित लघुगुणकीय प्रसामान्य वक्र। सारणी 23 9 के आंकड़ों पर आधारित।

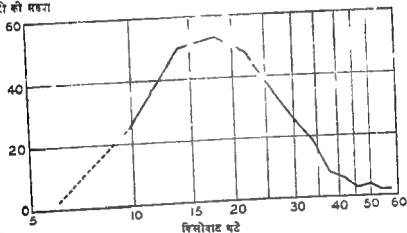
दोनों प्रविधियों में अन्तर उतना ही कम होगा।

बारबारता बटनों पर आसजित किए जा सकने वाले बहुत अधिक प्रकार के विषममित वक्र हैं। इस ग्रंथ का उद्देश्य इस विषय पर बड़ा-चढ़ा कर विचार करना नहीं है, वरन्

दो सरलतर प्रकार के वक्रों को आमजित करने से सम्बद्ध प्रविधि को संक्षेप में प्रस्तुत करना मान है।⁶

लघुगुणकीय प्रसामान्य वक्र—कुछ वक्र जो दाहिनी ओर को झुके हुए ह, अपने X मानों के लघुगुणको र सम्बन्ध में आमजित करने पर अथवा विकल्प रूप से, लघुगुणकीय X -वैमाने वाले वक्रांकित वागज पर आमजित करने से, सममित हो जाते हैं। चार्ट 23 13 का स्तम्भ-चित्र सारणी 23 9 के आंकड़ा पर आधारित एक पूर्वी नगर में 282 मध्यम श्रेणी के घरों द्वारा मासिक पर्व की गई बिजली को प्रदर्शित करता है। यह स्पष्ट है कि श्रेणी निश्चित रूप से धनात्मक दिशा में झुकी हुई है। चार्ट 23 14 में ये आंकड़े पुन

घरों की संख्या



चार्ट 23 14 एक पूर्वी नगर में 282 मध्यम श्रेणी के घरों में उपयोग में लाई गई बिजली के किलोवाट घंटे। लघुगुणकीय X वैमान। आंकड़ा सारणी 23 9 के। बारवारताएँ वक्रों के लघुगुणकीय मध्यमानों पर आलेखित हैं।

आलेखित किए गए हैं किन्तु लघुगुणकीय X -वैमानों को लेकर जब वक्र $X=6$ किलोवाट घंटों पर (सारणी में प्रदर्शित प्रथम वर्ग के ठीक नीचे) क्षैतिज अक्ष तक बढ़ा दिया जाता है, तो लघुगुणकीय X मानों के सम्बन्ध में श्रेणी की सन्निकट सममित प्रकृति स्पष्ट हो जाती है। इसका और अधिक निर्देश चार्ट 23 15 में किया गया है, जो लघुगुणकीय प्रायिकता पत्र पर आलेखित सचयी प्रतिशतता बारवारताओं को प्रस्तुत करता है।

लघुगुणकीय प्रसामान्य वक्र को आमजित करना—लघुगुणकीय प्रसामान्य वक्र को आमजित करने की प्रविधि अनिवार्यतः प्रसामान्य वक्र आमजित करने के समान है, केवल इस बात को छोड़ कर कि हम समानतर माध्य \bar{X} और X मानों के लघुगुणको के मानक विचलन $s_{\log X}$ का प्रयोग करते हैं। \bar{X} और $s_{\log X}$ मानों का परिवर्तन वर्ग सीमाओं के लघुगुणको के मध्यमानों का उपयोग करते हुए, कर सकते हैं। आदर्श रूप में वर्गों का चयन

6 अधिक विस्तृत विवरण के लिए दक्षिण डब्ल्यू. पी. ए. ऐन्डरसन, फ्रीडमैन कन्वर्ज एंड कोरिलेशन (चतुर्थ संस्करण, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लंदन, 1953)।

सारणी 239

एक पूर्वो नगर के मध्यम थोली
के घरों में प्रतिमास उपभुक्त
बिजली के किलोवाट घंटे ।

किलोवाट घट (मध्य-मान)	घरों की संख्या
10	25
14	50
18	53
22	48
26	36
30	26
34	19
38	8
42	6
46	3
50	4
54	2
58	2
योग	282

आकृष्ट विद्युत परीक्षण प्रयोगशाला, न्यूयार्क नगर
में । नगर का नाम अनुरोध पर रोक लिया गया ।

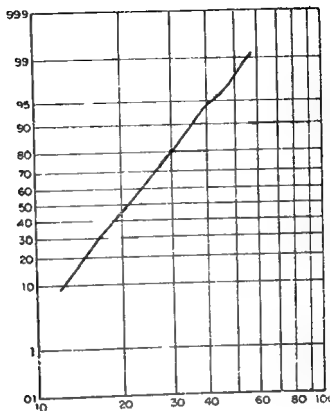
इस प्रकार करना चाहिए कि लघुगणकीय दृष्टि से वर्ग-अन्तराल समान हो ताकि इस प्रकार लघुगणकीय मध्य-मानों को एक दूसरे से समान दूरी पर रखा जा सके । प्रायः हम अक-गणितीय रूप से समान वर्ग अन्तराल वाले तत्काल निर्मित बारवारता वक्रों से काम लेते हैं और ऐसे वक्रों से Δ लघु और δ लघु का प्रत्यक्ष परिकलन श्रमसाध्य है । इन लघुगणकीय मानों का परिकलन करने की असुविधा को चतुर्थका पर आधारित सूत्रों का प्रयोग करके विलुप्त कर दिया गया है, ये ऐसे आकड़े हैं जो सहज ही परिकलित हो जाते हैं । इसके अतिरिक्त इस प्रविधि के कुछ लाभ हैं । जब तक आकड़े अत्यधिक सतत न हों, इस विधि से अनियमित चरम मूलों के बाधक प्रभाव से बचा जाता है । व्यञ्जक नीचे दिए गए हैं ।

$$\Delta \text{ लघु} = \frac{\text{लघु } Q_1 + \text{लघु } Q_3 + 1.2554 \text{ लघु } Q_2}{3.2554}$$

यह तीन चतुर्थका की भांति होता है, भार इन मानों पर रचित प्रसामान्य-वक्र कोटिया की ऊँचाइयों के अनुपात में हैं ।

$$\delta \text{ लघु} = 0.7413 (\text{लघु } Q_3 - \text{लघु } Q_1).$$

घरो का प्रतिशत



चित्र 23.15

घाट 23.15 एक पूर्वी नगर में 282 मध्यम श्रेणी के घरों में प्रति मास उपभुक्त बिजली के किलोवाट घण्टे। लघुगणकीय प्रायिकता पत्र पर अंकित। सारणी 23.9 के आंकड़ों पर आधारित।

यह व्यञ्जक इस तथ्य के आधार पर विकास करता है कि एक प्रसामान्य वक्र में 50 प्रतिशत मद माधिका (या माध्य) के $\pm Q$ के भीतर सम्मिलित है तथा 50 प्रतिशत मद माध्य के $\pm 0.674s$ के भीतर भी सम्मिलित हैं। अतः यह स्पष्ट है कि

$$s = \frac{1}{0.6745} Q = 1.4825 Q$$

क्योंकि

$$\frac{Q_3 - Q_1}{2} = Q$$

परिणामस्वरूप

$$Q_3 - Q_1 = 2Q, \text{ तथा } s = 0.7413 (Q_3 - Q_1)$$

बिजली के उपभोग के आँकड़ों के लिए, $Q_1 = 15,640$ किलोवाट घंटे, Q_3 (माधिका) $= 21,083$ किलोवाट घंटे, तथा $Q_2 = 27,944$ किलोवाट घंटे।

$$\begin{aligned}
 \Delta \text{ त्रय} &= \frac{\text{त्रय } 15\ 6400 + \text{त्रय } 27\ 9444 + 1\ 7554 \text{ त्रय } 21\ 0833}{3\ 2554} \\
 &= \frac{1\ 194237 + 1\ 446795 + 1\ 2554(1\ 323939)}{3\ 2554} \\
 &= \frac{4\ 302605}{3\ 2554} = 1\ 321682 \\
 \text{ऽतए} &= 0\ 7413(\text{त्रय } 27\ 9444 - \text{त्रय } 15\ 6400) \\
 &= 0\ 7413(1\ 446295 - 1\ 194237) \\
 &= 0\ 7413(0\ 252058) \\
 &= 0\ 186851
 \end{aligned}$$

इन दो मानों का प्रयोग करके प्रत्येक वक्र में प्रत्याशित बारवारताएँ प्रसामान्य वक्र के लिए पहले वर्णित विधि के बिनाकुन समानान्तर ढग से निर्धारित की जा सकती हैं। पहले के समान परिशिष्ट ६ का प्रयोग हुआ है और प्रविधि सारणी 23 10 में प्रस्तुत की गई है।

कोटियों के परिकलन के लिए व्यञ्जक है⁷

$$Y = \frac{0.4343N_i}{2.5066 Y_{\text{सत्रय}}} \quad 2.71828^{\frac{-X \text{ त्रय}}{2s^2 \text{ त्रय}}}$$

जो परिकलन के प्रयोजन से इस प्रकार सरल किया जा सकता है

$$Y = \frac{0.17326N_i}{X_{\text{ऽतए}}} \quad 2.71828^{\frac{-X^2 \text{ त्रय}}{2s^2 \text{ त्रय}}}$$

X X प्रक्ष पर उम बिंदु का अकर्मणित्व मान है जिस पर कोटि खड़ी करनी है।

$$2.71828^{\frac{-X \text{ त्रय}}{2s^2 \text{ त्रय}}} \text{ के मान परिशिष्ट ६ से प्राप्त किए गए हैं और } \frac{X \text{ त्रय}}{s^2 \text{ त्रय}} \text{ मान निम्न}$$

7 स्मरण कीजिए कि प्रसामान्य वक्र के लिए व्यञ्जक

$$Y = \frac{N_i}{2.5066s} \quad 2.71828^{\frac{-X^2}{2s^2}}$$

है। अणुगणकीय प्रसामान्य वक्र को आसन्नित करने के लिए व्यञ्जक का प्रयोग इस रूप में नहीं किया जा सकता क्योंकि s लघुगणकी ($s_{\text{त्रय}}$) के पदों में है जबकि वक्र अन्तराल s अकर्मणित्व रूप से बराबर है।

अतः हम s को समजन गणक $\frac{\text{त्रय } 0.4343}{X}$ अथवा $\frac{0.4343}{X}$ में गुणा करते हैं ताकि इस लघुगणकीय सतिपूर्ति की जा सके कि अन्तराल रेखाकर्मणित्व रूप में बराबर नहीं है। इस प्रकार हमारे पास है

$$Y_c = \frac{0.4343}{X} \quad \frac{N_i}{2.5066s_{\text{त्रय}}} \quad 2.71828^{\frac{-X^2 \text{ त्रय}}{2s^2 \text{ त्रय}}}$$

सारणी 23.10
 उपमुक्त विजली के प्रति मास उपयुक्त विजली के किलोवाट घण्टों के आंकड़ों पर आसंजित तथ्यएकीय एक पूर्वी नगर से 282 मध्यम श्रेणी के घरो में प्रति मास उपयुक्त विजली के किलोवाट घण्टों के आंकड़ों पर आसंजित तथ्यएकीय प्रसामान्य वक्र के लिए प्रत्याशित वारवारताओं का निर्धारण
 $(\bar{X} \text{ तथ्य} = 1321.82; s^2 \text{ तथ्य} = 0.186851)$

उपमुक्त विजली के किलोवाट घण्टे	वर्गों की संख्या या तथ्यगणन		संचयी आनुपूर्ति वारवारताएँ (परसिण्ट ड)	आनुपूर्ति वारवारताएँ (7)	प्रत्याशित वारवारताएँ $N=282$ (8)
(1)	निम्नतर सीमाएँ (2)	उच्चतर सीमाएँ (3)	(4)	(5)	(6)
4 से कम					
4 किन्तु 8 से कम	0 02060		0 719622	3 85	0 5000
8 किन्तु 12 से कम	0 903090		0 418592	2 24	0 4999
12 किन्तु 16 से कम	1 079181		0 242501	1 30	0 4872
16 किन्तु 20 से कम	1 204120		0 117562	0 63	0 4032
20 किन्तु 24 से कम	1 301030		0 020652	0 11	0 2327
24 किन्तु 28 से कम		1.380211	0 058529	0 31	0 1438
28 किन्तु 32 से कम		1 447158	0 125476	0 67	0 1217
32 किन्तु 36 से कम		1 505150	0 183468	0 98	0 2486
36 किन्तु 40 से कम		1 556303	0 234621	1 26	0 3365
40 किन्तु 44 से कम		1 602060	0 280378	1 50	0 3962
44 किन्तु 48 से कम		1 643453	0 321771	1 72	0 4332
48 किन्तु 52 से कम		1 681241	0 359559	1 92	0 4573
52 किन्तु 56 से कम		1 716003	0 394321	2.11	0 4726
56 किन्तु 60 से कम		1 748188	0 426506	2.28	0 4826
60 किन्तु 64 से कम		1 778151	0 456469	2.44	0 4887
64 किन्तु 68 से कम		1 806180	0 484498	2.59	0 4927
68 या अधिक		1.832509	0 510827	2.73	0 4952
योग	0 4968
					0 5000
					1 0000
					281.9

द्वारा प्रस्तुत किए गए हैं

$$\frac{\sum x^2}{\sum x} = \frac{\sum x(X - \bar{X})}{\sum x}$$

कोटियों के निर्धारण के लिए प्रविधि प्रसामान्य वक्र के लिए प्रयुक्त प्रविधि के समानांतर है जो सारणी 23.2 में प्रदर्शित की गई थी। आसजित वक्र चार्ट 23.13 में निर्दिष्ट है और उस वक्र तथा स्तम्भ-चित्र में सगति स्पष्ट है।

डेवीज ने विपमता का एक लघुगुणकीय गुणांक प्रस्तावित किया है

$$Sk_{लघु} = \frac{\text{लघु } Q_1 + \text{लघु } Q_3 - 2 \text{ लघु } Q_2}{\text{लघु } Q_3 - \text{लघु } Q_1}$$

और नकते किया है कि उस श्रेणी को, जो 0.15 से कम (प्रचवा कदाचित् 0.20 भी) गुणांक प्रपित करती है, प्रायोगिक या प्रतारिभ रूप में लघुगुणकीय दृष्टि से प्रसामान्य माना जा सकता है। फिर भी, यदि कोई विपमित वटन सहज रूप से लघुगुणकीय नहीं है तो कभी-कभी X मानों को तब तक स्थानान्तरित करके इसे समजित किया जा सकता है जब तक वाञ्छित विपमता प्राप्त न हो जाए आसजित करने के बाद X मानों को पुनः स्थानान्तरित कर दिया जाता है। यह सशोधन c निम्न व्यजक से प्राप्त होता है

$$c = \frac{Q_3^2 - Q_1 Q_3}{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}$$

इस मान का योग वर्ग सीमाओं तथा चतुर्थको के साथ कर दिया जाता है। इसके बाद $\sum \text{लघु}$ तथा $\sum \text{लघु}$ परिकलित किए जाते हैं। आसजन प्रक्रिया सारणी 23.10 के समान चलती है, किन्तु स्थानान्तरित वर्ग-सीमाओं का प्रयोग किया जाता है। प्रत्याशित बारबारताओं को जान लेने के बाद वर्ग-सीमाओं को पुनः उनके मूल मानों पर स्थानान्तरित कर दिया जाता है। यह स्पष्ट है कि इस विधि से लघुगुणकीय प्रसामान्य वक्र की उपादेयता बढ़ जाती है।

विपमता के समंजन के माथ प्रसामान्य वक्र को आसजित करना—प्रसामान्य वक्र के लिए निर्दिष्ट पिछले सूत्रों ने हमें \bar{X} , s तथा N के ज्ञान से सममित वक्र को आसजित करने की योग्यता प्रदान की। विपमित वक्र को आसजित करने की एक विधि पर हमने अभी-अभी विचार किया है। एक अन्य प्रविधि में जो कुछ विपमित वटनों के लिए उपयोगी है, विपमता के माप $\alpha_3 = \sqrt{\beta_1}$ का प्रयोग भी सम्मिलित है और इस प्रकार एक प्रसामान्य वक्र के आसजन में सशोधन किया गया है। इसे कभी-कभी द्वितीय सन्निकटन वक्र कहा जाता है। समीकरण⁸ है

$$Y_c = \frac{Nt}{2.5066s} 2.71828^{\frac{-x^2}{2s^2}} - \left\{ \frac{Nt}{2.5066s} 2.71828^{\frac{-x^2}{2s^2}} \left[\frac{\alpha_3}{2} \left(\frac{x}{s} - \frac{x^3}{3s^3} \right) \right] \right\}.$$

8 व्यजक में ग्राम चार्लियर श्रेणी के प्रथम दो पद सम्मिलित हैं। अधिक वर्णन के लिए देखिए—डब्ल्यू. ए. य्यूहार्ट, यथा उपरिनिर्दिष्ट, पृष्ठ 84—94।

सारणी 23 11

रसकाष्ठ की गहराई के लिए λ , s तथा α_2 का परिकलन

गहराई इन्च में (मध्य-मान)	f	d	fd	$f(d)^2$	$f(d)^3$
10	2	-7	-14	98	-686
13	29	-6	-174	1,044	-6,264
16	62	5	-310	1,550	-7,750
19	106	-4	-424	1,696	-6,784
22	153	-3	-459	1,377	-4,131
25	186	2	-372	744	-1,488
28	193	-1	-193	193	-193
31	158	0	0	0	0
34	151	1	151	151	151
37	123	2	246	492	984
40	82	3	246	738	2,214
43	48	4	192	768	3,072
46	27	5	135	675	3,375
49	14	6	84	504	3,024
52	5	7	35	245	1,715
55	1	8	8	64	512
योग	1 370		-849	10,339	-12,249

जॉर्ज डब्ल्यू. एं. ब्यूहट इंक्रोनॉमिक वुडरोल ऑफ क्वालिटी ऑफ मैनसैचर्ड प्रोडक्ट
डा० वान नार्स्ट्रट कम्पनी प्रिन्टिंग एन० जे०, 1931 पृष्ठ 77 से। डी० वान नार्स्ट्रट एं० इन्को० के
सौजन्य से।

$$v_1 = \frac{\Sigma fd}{N} = -0.619708$$

$$v_2 = \frac{\Sigma f(d)^2}{N} = 7.546715$$

$$v_3 = \frac{\Sigma f(d)^3}{N} = -8.940876$$

$$\bar{\lambda} = \lambda_a + \frac{\Sigma f d'}{N} = 3.1 - [(0.619708)(0.3)],$$

$$= 2.9141 \text{ इन्च।}$$

नयाँ संपद के समोधन को लागू नहीं किया गया, बल्कि हम पाते हैं

$$\tau_2 = v_2 - v_1^2 = 7.162677$$

$$\tau_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3 = 4.613422.$$

$$s = 1/\sqrt{\tau_2} = 0.8029 \text{ इन्च}$$

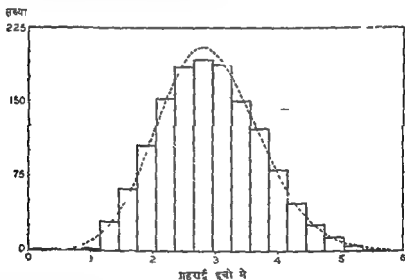
$$\alpha_2 = \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{\tau_3}{\tau_2^3}}, \text{ अथवा } \frac{\tau_3}{\sqrt{\tau_2^3}} = +0.2407,$$

ऋण-चिह्न से पहले याने वाला व्यञ्जक प्रसामान्य वक्र के लिए है, जबकि धनकोष्ठको में व्यञ्जक वैषम्य के लिए सशोधन का प्रतीक है। प्रत्याजित वारम्बारताओं को निर्धारित करने के लिए, उपर्युक्त समीकरण का समाकलन कर लेना चाहिए। सारणियों के प्रयोग से यह कार्य सम्पन्न किया जाता है। इसका प्रयोग करने के लिए, हम लिखते हैं

$$\int_0^x f(x) dx = F_1\left(\frac{x}{s}\right) - \alpha_2 F_2\left(\frac{x}{s}\right),$$

जहाँ $F_1\left(\frac{x}{s}\right)$ प्रसामान्य वक्र के क्षेत्रों का प्रतीक है (परिशिष्ट ७ में निर्दिष्ट) और $\alpha_2 F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ वैषम्य के लिए सशोधन का प्रतीक है। $F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ के मान परिशिष्ट ८ से प्राप्त किए गए हैं और फिर α_2 से गुणा किए गए हैं।

इस विधि के निदर्शन के लिए हम सारणी 23.11 के आंकड़ों का प्रयोग करते हैं, जो लेखाचित्रीय विधि से चार्ट 23 16 में दिखाए गए हैं। दूसरे सन्निकटन वक्र के लिए



चार्ट 23 16 रसकाष्ठ की गहराई पर आसजित द्वितीय सन्निकटन वक्र। सारणी 23 11 के आंकड़ों पर आधारित।

आसजन प्रविधि^१ सारणी 23 12 में दिखाई गई है। N , \bar{X} , s तथा α_2 के मानों को प्राप्त कर लेने के उपरान्त (सारणी 23 11), निम्न सोपान होयें :

9 दूसरी बार के परिकलन से वर्गों का सशोधन लागू नहीं किया गया, आंशिक रूप से तो इसलिए कि चार्ट 23 16 में बाईं ओर उच्च सम्पर्क विद्यमान नहीं है। इसके अतिरिक्त श्रृंखला निर्देश करता है (उपरिनिर्दिष्ट, पृष्ठ 78) कि सशोधित मानक विचलन से (0 798211) अवर्गित आंकड़ों के (0 802555) मानक विचलन से असशोधित मानक विचलन (0 802895) को अपेक्षा अधिक अन्तर है। जब बटन के दाहिने मिरों पर उच्च सम्पर्क अवर्गमान नहीं होता, तब किन्हीं क्षण का अविसर्वाधान अनिवार्य नहीं होता। यह इसलिए उत्पन्न होता है क्योंकि सशोधन अवर्गमान वर्गों के लिए दूरस्थ सीमा तक छूट देते हैं।

सारणी 23.12

द्वितीय सर्वांकन वक्त्र द्वारा रसकाष्ठ की गहराई के सांकेतिक के लिए प्रत्याशित चारवारताओं का निर्धारण

($\lambda = 2.9141$ एच, $\sigma = 0.8029$ एच, $\alpha_2 = +0.2407$)

इस में गहराई (मघा-मान) (1)	जो की सीमाएं निम्नतर उच्चतर सीमाएं सीमाएं (2) (3)	x (4)	$\frac{\lambda}{\sigma}$ (5)	$F_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ (6)	$F_2\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ (7)	$\alpha_2 F_2\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ (8)	$F_2\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \alpha_2 F_2\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ (स्तर 6-स्तर 8) (9)	प्रत्याशित चारवारताएं N=1,370 (11)
4	0.25	2.6641	3.318	0.4995	-0.0692	-0.0167	0.5162	2
7	0.55	2.3641	2.944	0.4984	-0.0732	-0.0176	0.5160	9
10	0.85	2.0641	2.571	0.4949	-0.0802	-0.0193	0.5142	25
13	1.15	1.7641	2.197	0.4860	-0.0893	-0.0215	0.5075	55
16	1.45	1.4641	1.824	0.4659	-0.0958	-0.0231	0.4890	99
19	1.75	1.1641	1.450	0.4265	-0.0921	-0.0222	0.4487	148
22	2.05	0.8641	1.076	0.3590	-0.0724	-0.0174	0.3764	188
25	2.35	0.5641	0.703	0.2590	-0.0402	-0.0097	0.2687	205
28	2.65	0.2641	0.329	0.1289	-0.0103	-0.0025	0.1314	192
31	2.95	0.0359	0.045	0.0179	0.0002	0.0039	0.0179	159
34	3.25	0.3359	0.418	0.1621	0.0162	0.0116	0.1582	117
37	3.55	0.6359	0.792	0.2858	0.0484	0.0189	0.2742	77
40	3.85	1.9359	1.666	0.782	0.0787	0.0227	0.3593	46
43	4.15	1.2359	1.539	0.4381	0.0943	0.0228	0.4154	25
46	4.45	1.5359	1.913	0.4721	0.0949	0.0210	0.4493	13
49	4.75	1.8359	2.287	0.4889	0.0871	0.0188	0.4679	6
52	5.05	2.1359	2.660	0.4961	0.0782	0.0173	0.4773	2
55	5.35	2.4359	3.034	0.4988	0.0720	0.0165	0.4815	1
58	5.65	2.7359	3.408	0.4997	0.0686	0.0162	0.4832	
61	5.95	3.0359	3.781	0.4999	0.0672	0.0161	0.4837	
64	6.25	3.3359	4.155*	5000	0.0667*	0.0160	0.4839	
	6.55	3.6359	4.528*	0.5000	0.0666*	0.0160	0.4840	

* वरिष्ठतम व में निर्दिष्ट वरिष्ठतम के आगे $F_2\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ के मानों के लिए निम्न व्यवहार का प्रयोग कीजिए $F_2\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{1}{15.036} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{x}{\sigma} \right)^2 \right]^{15.036} \right\}$

2.71828 $\frac{2.71828}{2.71828}$ के मान प्रयोग वक्त्र की नोटियां की सारणी (परिचिह्न च) से सुप्रामाण्यक पठे जा सकते हैं, यद्यपि काल्पनिक, टेबल्स फॉर स्टैटिस्टीशियन्स एंड वायो-मीट्रीशियन्स, पृष्ठ 2-8, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लंडन, 1914 की अतिवर्तिनित सारणी से। वाद वालों सारणी में प्रदत्तित σ के मान 2.5066 के गुणा करत पर 2.71828 $\frac{2.71828}{2.71828}$ पदान करते हैं।

1. स्तम्भ (1) से (6) तक में प्रविष्टियाँ भरिए, जैसा प्रसामान्य वक्र प्राप्तजित करते समय किया गया था।

2. परिशिष्ट च देखिए तथा स्तम्भ (7) में $F_x\left(\frac{x}{s}\right)$ मानों को स्तम्भ (5) के प्रत्येक $\frac{x}{s}$ मान में संयुक्त करके भरिए। इस स्तम्भ में ऋणात्मक चिह्न स्तम्भ (2) की वर्ग-सीमाओं के साथ संयुक्त प्रतिशतताओं के लिए अंकित किए जाते हैं।

3. स्तम्भ (8) में, स्तम्भ (7) के प्रत्येक मान को α_s से गुणा कीजिए। चिह्न निर्दिष्ट हैं।

4. स्तम्भ (9) को प्रस्तुत करने के लिए, स्तम्भ (8) के मान बीजगणित की विधि से स्तम्भ (6) के मानों से घटा दिए जाते हैं।

5. स्तम्भ (9) की सचयी आनुपातिक वारंवारताएँ स्तम्भ (10) में प्रसचयी बना दी जाती हैं, जैसा प्रसामान्य वक्र के लिए किया गया था। परिणामस्वरूप, $N=10000$ के लिए द्वितीय सन्निकटन के आधार पर प्रत्याशित वारंवारताओं को प्रशित करने वाले प्राकड़ों की श्रेणी प्राप्त हुई। इस वक्र की एक कमी यह है कि यह कभी-कभी एक छोर पर ऋणात्मक वारंवारताओं को प्रस्तुत कर सकता है, अथवा, यदि हम इन ऋणात्मक वारंवारताओं को प्रस्तुत करने के लिए आसजन को बहुत दूर तक नहीं ले जाते, तो योग 1.0000 से थोड़ा-सा बढ़ सकता है। इस उदाहरण में स्तम्भ (10) का योग 1.0002 है।

6. स्तम्भ (11) में प्रत्याशित वारंवारताओं को वर्गों में मथानुपात बाँटा गया है ताकि प्रतिदर्श के लिए योग N के बराबर हो।

सांख्यिकीय सार्थकता I : समांतर माध्य

इस अध्याय में नया आगामी दो अध्यायों में हम प्रतिदर्शों से परिकल्पित सांख्यिकीय मापों के व्यवहार का अध्ययन करेंगे। यह एक महत्वपूर्ण विषय है क्योंकि सांख्यिकीय कार्यकर्ता का तगभग मदद ही उस आंकड़ों से आना पड़ता है जो प्रतिदर्श होते हैं समष्टि नहीं। सामान्यतः यह सम्भव नहीं होता कि समष्टि में सभी मदों पर विचार किया जाए। उदाहरणार्थ संयुक्त राज्य अमेरिका में सभी वयस्क पुरुषों की ऊँचाई के आंकड़े प्राप्त करने का प्रयत्न पूर्णरूपेण अव्यावहारिक होगा। यदि हम प्रकार के आंकड़ों की आवश्यकता हो तो यदि उपयुक्त प्रतिदर्श का अध्ययन किया जाए तो बहुत कम समय तथा धन लक्ष्य होगा। इसके अतिरिक्त उपयुक्त प्रतिनिधि प्रतिदर्श के अध्ययन द्वारा सन्तोषजनक परिणामों की आशा की जा सकती है—जिनकी विश्वसनीयता ठीक ठीक व्यक्त की जा सकती है। तथापि इस पुस्तक में हम केवल यादृच्छिक प्रतिदर्शों पर विचार कर सकते हैं।¹

प्रतिदर्श समांतर माध्य कैसे वितरित किये जाते हैं

समान आकार गुण तथा मेक वाले तथा समान प्रकार की गाड़ियों में तथा सड़क की समान अवस्थाओं में प्रयुक्त हजारों मोटर टायरों में से प्रत्येक के द्वारा चल गए मील के आंकड़े, 15 200 मील का समांतर माध्य (Δ_0) और 1,248 मील का मानक विचलन (σ) दिखाते हैं। यदि हम 25 टायरों के यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन करें, तो हम यादृच्छिक प्रतिदर्श के समांतर माध्य के 15 200 मील के सामान्यतः निकट होने की आशा करेंगे। 25 मदों का दूसरा यादृच्छिक प्रतिदर्श पहले के समान ठीक वैसा ही समांतर माध्य प्रदान नहीं करेगा, लेकिन यह भी 15 200 के सामान्यतः निकट होना चाहिए। हमारा प्रथम सम्बन्ध यादृच्छिक प्रतिदर्शों के समांतर माध्य के व्यवहार से है। क्योंकि हम केवल यादृच्छिक प्रतिदर्शों का अध्ययन करेंगे और क्योंकि हम गुणोत्तर, हरात्मक, अथवा अन्य माध्यों पर विचार नहीं करेंगे, अतः हम यादृच्छिक प्रतिदर्श के समांतर माध्य का उल्लेख करने के लिए केवल प्रतिदर्श माध्य कहेंगे।

प्रतिदर्श माध्यों का समांतर माध्य—यदि अभी-अभी वसित टायरों की समष्टि से प्रत्येक में 25 टायरों के हिसाब से अनेक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिए जाएँ तो कुछ प्रतिदर्श माध्य 15 200 मील से बढ जाएँगे और कुछ 15,200 मील से कम रह जाएँगे। एक अथवा बहुत ही कम ठीक 15 200 मील हो सकते हैं। प्रतिदर्श माध्यों के समांतर माध्य की प्रवृत्ति Δ_0 के समान होने की होती है।

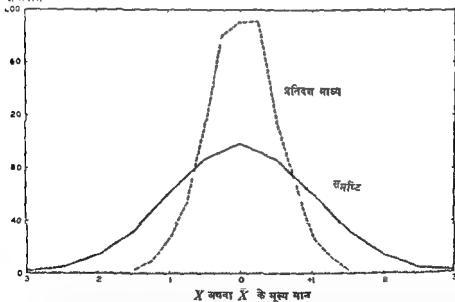
1. यादृच्छिक प्रतिदर्श की परिभाषा पृष्ठ 23 पर की गई थी।

एक अधिक निश्चित उदाहरण पर विचार करें 'वाल्टर ए० शूट्टाट' ने 998 मर्दों की समष्टि का निर्माण किया, जिसमें -30 से 30 तक के घनात्मक तथा ऋणात्मक मूल्यों का परिसर था, और $\bar{X}_0 = 0$ था। इस बिन्दु पर यह महत्वपूर्ण नहीं है कि समष्टि प्रामाण्य के इतना निकट थी जितना सम्भव था। इस समष्टि से शूट्टाट ने 1,000 प्रतिदर्श ($k = 1,000$) लिए जिनमें से प्रत्येक में 4 मर्द ($N = 4$) थे। 1,000 प्रतिदर्श माध्यों का समांतर माध्य 0.014 था। यदि अधिक सत्या में प्रतिदर्श माध्य लिये गये होते तो यह विश्वास करना तकसगत है कि प्रतिदर्श माध्यों का समांतर माध्य शून्य के अधिक निकट होता, क्योंकि यह दिखाया जा सकता है कि यदि समष्टि में N आकार के सभी सम्भव प्रतिदर्श (k) लिए जाएं तो प्रतिदर्श माध्यों का समांतर माध्य समष्टि माध्य के बराबर होगा।² अर्थात्,

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k}{k} = \bar{X}_0$$

प्रतिदर्श माध्यों का वैपम्य—यदि प्रतिदर्श माध्य ऐसी समष्टि में है जिसमें वैपम्य नहीं है तो प्रतिदर्श माध्यों का वितरण विपमित नहीं होगा। यदि समष्टि विपमित है तो

बारबारताएँ
प्रति 0.25 वर्ग
अंतराल



चाट 24.1 शूट्टाट की 998 मर्दों की प्रामाण्य समष्टि और प्रतिदर्शों के लिए जिनका $N = 4$ है, 1,000 प्रतिदर्श माध्यों का बटन। वय अंतराल समष्टि के लिए 0.50 और प्रतिदर्श माध्यों के लिए 0.25 है। डब्ल्यू. ए० शूट्टाट की ईकनामिक कंट्रोल ग्रॉफ क्वालिटी ग्रॉफ मैन्यूफैक्चरिंग प्रोडक्ट दी० वान नार्स्ट्रैंड कम्पनी प्रिन्स्टन एन० ज०, 1931 पृष्ठ 167, 441—445 और 454—463 पर आधारित।

2 वाल्टर ए० शूट्टाट, उपरिनिर्दिष्ट पुस्तक पृष्ठ 167 442—445, और 454—463

3 दक्षिण परिशिष्ट घ परिच्छेद 24.1

प्रतिदर्श माध्यों का वितरण कम वैषम्य दिखायेगा वैषम्य प्रतिदर्श के आकार से विपरीत दिशा में सम्बंधित सम्बन्ध के अनुसार होगा, निम्न

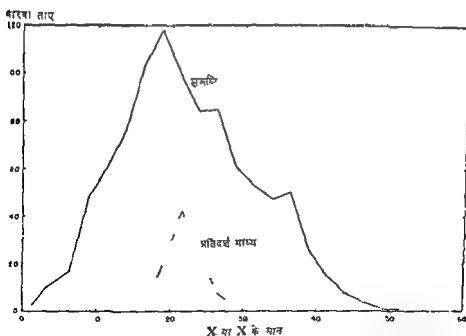
$$\beta_{1T} = \frac{\beta_{1F}}{N}$$

जोड़ा की 998 मदा की समष्टि में $\beta_{1F} = 0$ था। 1 000 प्रतिदर्श माध्यों का वटन समष्टि के साथ चार्ट 24 1 में दिखाया गया है। यह देखा जा सकता है कि प्रतिदर्श माध्यों का वटन लगभग समष्टि में। जोड़ा ने 1 000 प्रतिदर्श माध्यों के लिए β_{1T} के मूल्य का परिकलन नहीं किया लेकिन 0.25 के बग अन्तराल में बारबारता वटन के लिए, जो कि चार्ट 24 1 में दिखाया गया है $\beta_{1T} = 0.0027$ पाया गया है।

चार्ट 24 2 में प्रत्येक 10 मदा वाले 100 प्रतिदर्शों के समांतर माध्यों के वटन और विषम समष्टि के वटन को जिसमें प्रतिदर्श लिये गए थे, प्रदर्शित किया गया है। समष्टि के लिए $\beta_{1F} = 0.096$ यदि $N = 10$ के सभी सम्भव प्रतिदर्श लिये गए होते तो प्रतिदर्श माध्यों का वैषम्य होता

$$\beta_{1T} = \frac{\beta_{1F}}{N} = \frac{0.096}{10} = 0.0096$$

100 प्रतिदर्शों के लिए $\beta_{1T} = 0.003$ यह स्पष्ट है कि प्रतिदर्श माध्यों का वैषम्य समष्टि के वैषम्य से बहुत कम है।



साट 24 2 972 मदों की विषम समष्टि और प्रतिदर्शों के लिए जिनका $N = 10$ है 100 प्रतिदर्श माध्यों का वटन। समष्टि 972 अधिकों की साप्ताहिक मजदूरी से बनी है। दोनों वक्रों के लिए बग-अन्तराल 2.50 वाला है।

शेल्हार्ट⁴ ने ऐसी समष्टि से प्रतिदर्श लिये हैं जो कि चार्ट 24.2 में दिखाई गई समष्टि की अपेक्षा बहुत अधिक विपश्मि है। उसकी ममकोण त्रिभुजाकार समष्टि और 1 000 प्रतिदर्श माध्यों ($N=4$) के बटन चार्ट 24.3 में दिखाये गये हैं। ममकोण त्रिभुजाकार समष्टि का वैषम्य $\beta_{1g}=0.320$ के द्वारा प्रकट किया गया है। 4 के प्रतिदर्शों के लिए, हम वैषम्य के लगभग निम्न होने की आशा करेंगे।

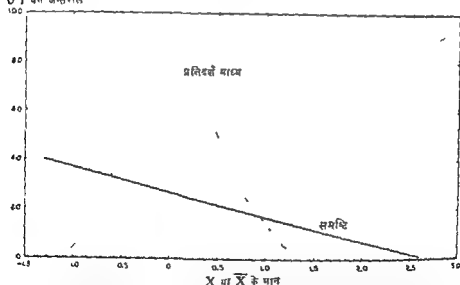
$$\beta_{1\bar{x}} = \frac{\beta_{1g}}{N} = \frac{0.320}{4} = 0.080$$

1,000 प्रतिदर्श माध्यों के बटन के लिए वैषम्य का परिकलन 0.062 हुआ है। जबकि $\beta_{1\bar{x}}$ का यह मान उनसे अधिक है जो अन्य प्रतिदर्शों के दो समुच्चयों के लिए अभी प्राप्त हुए थे, यह याद रखना चाहिए, कि प्रथम, समष्टि की अपेक्षा वैषम्य बहुत कम है और द्वितीय, इसके समान विपश्मित समष्टियाँ प्रायः प्राप्त नहीं होती।

प्रतिदर्श माध्यों की ककुदता - प्रतिदर्श माध्यों के बटन की ककुदता के 3.0 (प्रसामान्य बटन के लिए मूल्य) के निकट होने की अपेक्षा की जा सकती है अपेक्षाकृत उम समष्टि की ककुदता के जिससे प्रतिदर्श लिये गये थे। सम्बन्ध है

$$\beta_{2\bar{x}} - 3 = \frac{\beta_{2g} - 3}{N}, \text{ अथवा } \beta_{2\bar{x}} = \frac{\beta_{2g} - 3}{N} + 3$$

कारणरताप प्रति
0.1 वर्ग अंतराल



चार्ट 24.3 शेल्हार्ट की 820 बटों वाली ममकोण त्रिभुजाकार समष्टि का, और $N=4$ वाले प्रतिदर्शों के लिए 1,000 प्रतिदर्श माध्यों का बटन। समष्टि के लिए वर्ग-अंतराल 0.1 और प्रतिदर्श माध्यों के लिए 0.2 थे। बाँकड़ों के उदयम के लिए पाद-टिप्पणी 4 देखिए।

4. समष्टि के बाँकड़े टिप्पणी 2 में उल्लिखित पुस्तक के पृष्ठ 183 के लिए गए हैं। प्रतिदर्श माध्यों के बाँकड़े डा० वाल्टर ए० शेल्हार्ट से परामर्श द्वारा प्राप्त किए गए थे। सब विषयों तथा ककुदता मानों का (उन मानों को छोड़कर जो प्रसामान्य समष्टि के लिए थे) परिकलन शेल्हार्ट द्वारा किया गया था।

शेड्डाट की प्रत्यामा य समष्टि के लिए β_{12} का मूल्य 30 था और प्रतिदश माध्यों के बटन की (चाट 24.1) ≈ 30 होने की प्राप्ति होगी। शेड्डाट के 1000 प्रतिदश माध्यों के लिए $\beta_{12} = 30$ था।

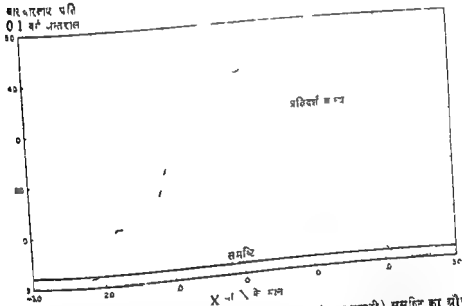
शेड्डाट ने आयताकार समष्टि का जो निर्माण किया जा चाट 24.4A में दिखाई गई है जो अत्यधिक चपट था ≈ 30 का जिनमें 39।80 इस समष्टि से उमने 1000 प्रतिदश माध्यों ($N=4$) का प्रत्यक्ष किया जिनका बटन भी चाट 24.4A में दिया गया है। यह बटन ऐसा प्रतीत होता था कि प्रत्यक्ष माध्य बनती हो। इन प्रतिदश माध्यों की ककुदता अपेक्षित है

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{180}{4} + 3 = 70$$

1,000 प्रतिदश माध्यों के लिए

शेड्डाट ने मुद्रांकन समष्टि में विचलन को किशोर तक श्रद्धा ड ज० काना न प्र प्रवार की 100 मर की समष्टि के निर्माण किया जा कि चाट 24.4B में

बारवारण पर
01 बर अंतराल



चाट 24.4A शेड्डाट की 122 मरदोवाली आयताकार (चपट ककुदरी) समष्टि का और $N=4$ बाल प्रतिदशों के लिए 1000 प्रतिदश माध्यों का बटन। समष्टि के लिए बग अंतराल 0.1 और प्रतिदश माध्यों के लिए 0.3 था। आकटा क उदगम के लिए पाद टिप्पणी 4 देखिए।

दिखाई गई है। इस समष्टि में काना ने 400 प्रतिदश माध्य ($V=5$) प्राप्त किये जिनका बटन भी चाट 24.4B में प्रकट हुआ है। समष्टि की ककुदता $\beta_{12}=7.927$ थी। प्रत्यक्ष पांच मरदो के प्रतिदशों का चुनाव करन पर

$$\beta_{2X} = \frac{\beta_{2Y}-3}{N} + 3 = \frac{7927-3}{5} + 3 = 3985$$

प्राप्त करने की अपेक्षा की जा सकती है। केवल 400 प्रतिदर्श लिए गये थे, लेकिन प्रतिदर्शों के इस वर्ग के लिए पाया गया कि $\beta_{2Y}=4190$, यह मूल्य β_{2Y} के मूल्य की अपेक्षा 30 के अधिक निकट है।

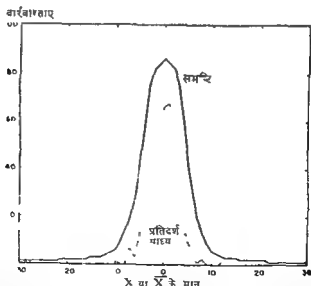
प्रतिदर्श माध्य और प्रसामान्य वक्र— जो कुछ कहा गया है उससे स्पष्ट है कि प्रतिदर्श माध्यों का वटन प्रसामान्य है जब उन माध्यों का परिकलन प्रसामान्य समष्टि के यादृच्छिक प्रतिदर्शों से किया गया है। यदि समष्टि विषम है तो उस समष्टि से लिए प्रतिदर्श माध्यों में विद्यमान वैषम्य बहुत कम होगा, क्योंकि वैषम्य प्रतिदर्श के आकार से प्रतिलोम विधि में सम्बन्धित है जैसा कि

$$\beta_{1Y} = \frac{\beta_{1Y}}{N}$$

के द्वारा प्रकट हुआ है। यदि समष्टि तुल्य-ककुदी अथवा चपट-ककुदी है तो उस समष्टि में लिये गये प्रतिदर्श माध्यों का वटन मध्य-ककुदी के अधिक निकट होगा, जैसा कि

$$\beta_{2X} = \frac{\beta_{2Y}-3}{N} + 3$$

के द्वारा दिखाया गया है।

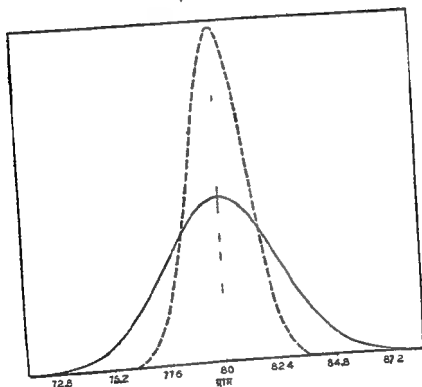


चार्ट 24 4B काना की 1,000 मरी वाली तुल्य-ककुदी समष्टि का और $N=5$ वाले प्रतिदर्शों के लिए 400 प्रतिदर्श माध्यों का वटन। दोनों श्रेणियों के लिए वग अन्तराल 10 थे। पुस्तक में दिये ककुदी मानों का परिकलन दोनों श्रेणियों के लिए अवर्गित आकड़ों से किया गया था। आकड़ संकेतक ज० काना में।

इन दो सम्बन्धों के परिणामस्वरूप सांख्यिकीविद प्रतिष्ठा माध्यों को सामान्य वितरित मानते हैं यदि यह विश्वास करने के लिए कारण न हो कि जिस समष्टि से वे लिए गए हैं वह प्रसामान्य में पर्याप्त भिन्न है।

प्रतिदश माध्यों का विक्षपण पूर्व अंकित चारों चार्टों में किसी पर दृष्टि डालने से पता चलेगा कि प्रतिदश माध्यों का विक्षपण उस समष्टि के विक्षपण की अपेक्षा बहुत कम है जिसे वे प्रतिदश माध्य प्राप्त थे सम्बन्ध है

$$\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{V}}$$



चार्ट 24 = $V=25$ के लिए प्रतिदश समांतर माध्यों का बंटन जब $\bar{X}_0 = 80$ ग्राम और $\sigma = 12$ ग्राम (ठोस वक्र) और जब $\bar{X}_0 = 80$ ग्राम और $\sigma = 6$ ग्राम (छिन्न वक्र)।

चार्ट 24 के समष्टि आकृतों के लिए हमारे पास $\sigma = 1.0070$ और $N = 4$ है। परिणामतः

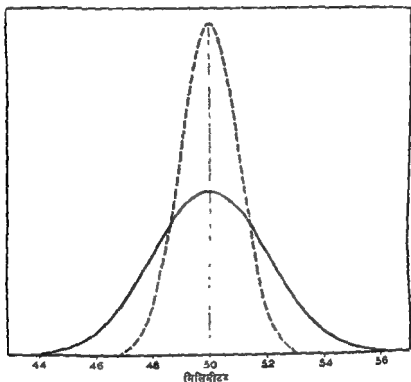
$$\sigma_x = \frac{1.0072}{\sqrt{4}} = 0.5035$$

6 देखिए परिशिष्ट 3 पर नोट 14.7 ध्यान दें जैसे कि प्रमाण में दिखाया गया है। उपर पयोग किया गया व्यंजक सही नहीं है जब तक कि N के सम्बन्ध में समष्टि बड़ी नहीं है।

1,000 प्रतिदर्श माध्यों के लिए, मानक विचलन का परिकलन निम्न व्यंजक के प्रयोग द्वारा किया जा सकता है

$$\sqrt{\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_g)^2 + (\bar{X}_2 - \bar{X}_g)^2 + \dots + (\bar{X}_{1,000} - \bar{X}_g)^2}{1,000}}$$

प्रतिदर्श माध्यों के बारबारता-वटन के लिए मानक विचलन का मूल्य चार्ट, 24.1 में, 0.503 दिखाया गया है, जो 0.5035 के मूल्य के बहुत निकट है, जो तब प्राप्त होता यदि हम $N=4$ के सभी संभव प्रतिदर्शों पर विचार कर पाते।



चार्ट 24.6 $\bar{X}_g = 50$ मिमी और $\sigma = 8$ मिमी के लिए प्रतिदर्श समतल माध्यों का वटन, जब $N=16$ (ठोस वक्र) और जब $N=64$ (खंडित वक्र)।

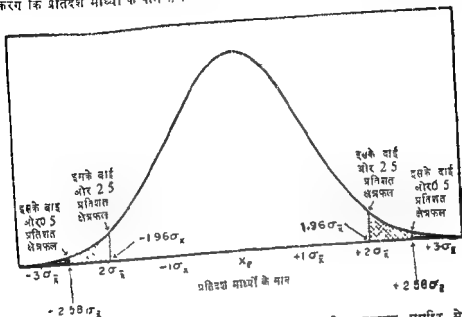
व्यंजक

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

से यह स्पष्ट है कि (1) जितना अधिक समष्टि का विश्लेषण होगा, उतना समष्टि में लिए गये प्रतिदर्श माध्यों का विश्लेषण भी उतना ही अधिक होगा, और (2) जितना ही प्रतिदर्शों का आकार बड़ा होगा उसी मात्रा में प्रतिदर्श माध्यों का विश्लेषण कम होगा। व बिन्दु चार्ट 24.5 में प्रदर्शित है, जो σ के दो भिन्न मूल्यों के लिए प्रतिदर्श माध्यों के वटन दिखाते हैं जब N बदला नहीं गया है, और चार्ट 24.6 में, जो एक ही समष्टि से दो प्रतिदर्श आकारों के लिए प्रतिदर्श माध्यों के वटनों को दिखाता है।

जब X_p और σ ज्ञात हो तो \bar{x} और s_p के बीच अन्तर की साधकता

X और s_p के बीच अन्तर जो साधक नहीं है टायग की मील दूरी के ग्राफों पर विचार कीजिए, जिसका उल्लेख पहले हुआ है जिसके लिए $s_p = 15200$ मील और $\sigma = 1,248$ मील। यदि 100 टायगों के यादृच्छिक प्रतिदर्श लिए जाने हों तो हम अपेक्षा करेंगे कि प्रतिदर्श माध्यों के पाम है।



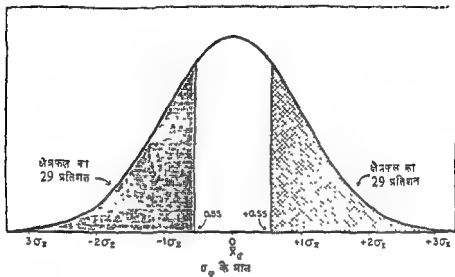
चाट 24.7 0.05 और 0.01 स्तरों को दिखाने वाली, प्रसामान्य समष्टि से, प्रतिदर्श समान्तर माध्यों का प्रत्याशित बटन।

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{1,248}{\sqrt{100}} = 124.8 \text{ मील।}$$

परिणामतः, प्रतिदर्श माध्यों का चाट 24.7 के अनुसार बटन होगा। इस चाट में विशेष ध्यान $\pm 1.96\sigma_{\bar{x}}$ और $\pm 2.58\sigma_{\bar{x}}$ के विचलनों की ओर दिया गया है। जैसा कि चाट में देखा जा सकता है, $\pm 1.96\sigma_{\bar{x}}$ वक्र के 5 प्रतिशत क्षेत्रफल को सिरे के दो भागों में काट देता है, जबकि $\pm 2.58\sigma_{\bar{x}}$ वक्र के 1 प्रतिशत क्षेत्रफल को सिरे के दो भागों में काटता है। ये प्रतिशतताएँ प्रसामान्य वक्र के क्षेत्रफल की मारणी (परिशिष्ट ड) में जिसका प्रयोग हमने गत अध्याय में किया, अथवा अधिक तत्परता से, परिशिष्ट ज में, जो प्रसामान्य वक्र के दो सिरे के भागों में क्षेत्रफल को दिखाता है, प्राप्त की जा सकती हैं। चाट 24.7 में दिखाये गये दो विचलन वे हैं जो प्रसामान्य वक्र के लिए 0.05 स्तर और 0.01 स्तर प्रकट करते हैं। उदाहरणार्थ 0.001, 0.005, 0.02 तथा 0.025, का भी प्रयोग होता है।

100 मलों का एक प्रतिदर्श में, एक कथित यादृच्छिक प्रतिदर्श और जो कल्पित रूप में गत अनुच्छेद में उल्लिखित समष्टि से लिया गया $\bar{X} = 15,769$ मील पाया गया। हम यह पता लगाना चाहते हैं कि क्या यह विश्वास करना तर्कसंगत होगा कि यह प्रतिदर्श माध्य

उस समष्टि में जिसमें $X_0 = 15,200$ मील और $\sigma = 1,248$ मील है, यादृच्छिक प्रतिदर्श का नमूना माध्य है। X और \bar{X}_0 के बीच का अन्तर 69 मील है। प्रसामान्य वक्र का उल्लेख करने में यथुक्त होने के लिए हम इस अन्तर को σ_x के रूप में प्रकट करते हैं जो कि पहले ही 124.8 मील निश्चित किया गया है। इसलिए,



चार्ट 24.8 प्रतिदर्श माध्यों का प्रत्याशित वजन और प्रतिदर्श माध्यों की प्राप्ति के अवसर जो $\pm 0.55\sigma_x$ अथवा अधिक के द्वारा X_0 से भिन्न हैं।

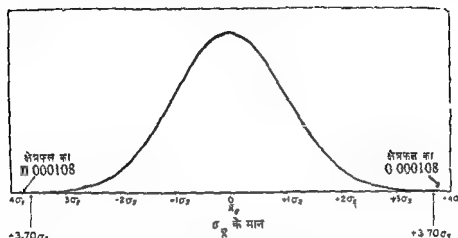
$$\frac{x}{\sigma} = \frac{\bar{X} - \bar{X}_0}{\sigma_x} = \frac{15,269 - 15,200}{124.8} = \frac{69}{124.8} = 0.55$$

चार्ट 24.8 के सकेत में, हम प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल (फॉस रेखित भाग) को देख सकते हैं जो $\pm 0.55\sigma_x$ के विचलन द्वारा कटा हुआ है। परिशिष्ट छ से, जो प्रसामान्य वक्र के एक सिरे के क्षेत्रफल को प्रकट करता है, यह फॉस रेखित भाग 29 प्रतिशत क्षेत्रफल को वक्र के अन्तर्गत सम्मिलित करते हुए पाया जाता है। क्योंकि हम जानते हैं कि प्रतिदर्श माध्य \bar{X}_0 से बढ़ते भी हैं और घटते भी हैं, अतः हम $-0.55\sigma_x$ के द्वारा कटे हुए प्रसामान्य वक्र के पिछले भाग पर भी विचार करते हैं जो चार्ट 24.8 में बिन्दुचित्रित भाग है। यह पिछला भाग भी वक्र के अन्तर्गत 29 प्रतिशत क्षेत्रफल को सम्मिलित करता है और दोनों पिछले भाग मिलकर 58 प्रतिशत ($P=0.58$) क्षेत्रफल को वक्र के अन्तर्गत सम्मिलित करते हैं। इससे हम यह निष्कर्ष निवाले हैं कि क्योंकि यादृच्छिक प्रतिदर्श ग्रहण करने की क्रिया से $\pm 0.55\sigma_x$ का अन्तर प्रायः प्रकट हो सकता है, अतः यह विचार करने के लिए पर्याप्त आधार नहीं है कि प्रतिदर्श माध्य विचाराधीन समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य नहीं था।

उपरोक्त विवेचन इस परिकल्पना पर आधारित है कि प्रतिदर्श माध्य उस समष्टि से, जिसके $X_0 = 15,200$ मील और $\sigma = 1,248$ मील हैं, यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य है। इस परिकल्पना का उल्लेख “निराकरणीय परिकल्पना” के नाम से होता है क्योंकि

बायी ओर के पिछले तिर के क्षेत्रफल को विचार में लेंगे।⁷

P का मान और सार्थकता—हमने अभी दो अन्तरों पर विचार किया है जिनमें से एक "सार्थक" और दूसरा "सार्थक नहीं" घोषित किया गया।



चार्ट 24.9 प्रतिदर्श माध्यों का प्रत्याशित बंटन और $\pm 3.70\sigma$ प्रथम अधिक के द्वारा \bar{X}_0 से भिन्न प्रतिदर्श माध्यों की प्राप्ति के अवसर।

एक बार P निर्धारित हो जाने पर, ऐसे निष्कर्षों को प्रकट करने के लिए, जो स्पष्ट है, वे उदाहरण जान बूझकर चुने गये थे। अन्तर के सार्थक घोषित होने के लिए P का मूल्य कितना कम होना चाहिये? इस प्रश्न का उत्तर देना सरल नहीं है, क्योंकि उत्तर मुख्य रूप से विचाराधीन तथ्य की प्रकृति पर और गलत होने के परिणामों पर निर्भर है।

$\bar{X} = 14,738$ मील वाले प्रतिदर्श के लिए, हमने P को 0.000216 पाया और निराकरणयोग्य परिकल्पना को अविश्वसनीय माना। वास्तव में, यह सम्भव है कि परिकल्पना सत्य रही हो और हमारा निष्कर्ष गलत, क्योंकि यादृच्छिक प्रतिदर्श हमें लाभ में ठीक 216 बार 3.70σ के बराबर अथवा इससे बड़ा विचलन प्रदर्शित करेंगे।

प्रथम प्रकार की त्रुटियाँ—जब निराकरणयोग्य परिकल्पना वास्तव में सत्य हो और विचाराधीन अन्तर को सार्थक नहीं घोषित किया गया हो (अर्थात् परिकल्पना लक्षित न हो) तो परिणाम सही है। जब निराकरणयोग्य परिकल्पना वास्तव में सत्य है, लेकिन जब सम्निहित अन्तर सार्थक घोषित किया गया हो (अर्थात्, परिकल्पना अविश्वसनीय है) तो हम कहते हैं कि "प्रथम प्रकार की त्रुटि" की गई है। यदि हम $P = 0.05$ को अपनी सार्थकता की कमौटी बनायें, और $P \leq 0.05$ वाले सब अन्तरों को सार्थक घोषित करें, तो हम लम्बी अवधि में 20 में से प्रथम प्रकार की ठीक 1 त्रुटि करेंगे, यदि हम $P = 0.01$ को अपनी सार्थकता की कमौटी बनायें, और $P \leq 0.01$ वाले सब अन्तरों को सार्थक घोषित करें तो हम लम्बी अवधि में 100 में से प्रथम प्रकार की 1 त्रुटि करेंगे। यह स्पष्ट होना

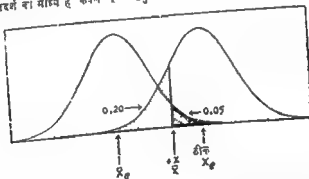
7 ऐसी भी परिस्थितियाँ हैं जिनमें हम असमान क्षेत्रफल वाले दो पिछले भागों के साथ दो पिछले तिरों वाला परीक्षण करने की इच्छा कर सकते हैं। परिकल्पना परीक्षण के अविकल उन्नत विवरण के लिए देखिए केंडल तथा स्टुबर्ट, तथा उपरिनिर्दिष्ट अध्याय 22 तथा 23।

चाहिये कि कमीटी के रूप में प्रयुक्त P का मूल्य जितना कम होगा प्रथम प्रकार की त्रुटियाँ भी उतनी ही कम होंगी। दुभाग्य से, प्रथम प्रकार की त्रुटियों के अनुपात को कम करने से आगामी अनुच्छेद में वर्णित पक्षों की त्रुटि बढ़ जाती है।

द्वितीय प्रकार की त्रुटियाँ—जब निराकरणयोग्य परिकल्पना वास्तव में असत्य हो और जब विचाराधीन अन्तर माध्यक धारित किया गया हो तो परिणाम सही होगा। जब निराकरणयोग्य परिकल्पना वास्तव में गलत हो, लेकिन जब परीक्षाधीन अन्तर सार्थक नहीं घोषित किया गया हो तो हम कहते हैं कि 'द्वितीय प्रकार की त्रुटि' की गई है। यदि हम $P = 0.05$ कमीटी का प्रयोग करें तो हम नहीं कह सकते कि कितनी बार द्वितीय प्रकार की त्रुटियाँ घटित होंगी, क्योंकि हम नहीं जान सकते कि परिकल्पना कितनी गलत हो सकती है। अन्तर्ग्रन्थ समष्टि में प्रतिदर्श (अथवा बहुत से प्रतिदर्श) अयादृच्छिक हों सकते हैं, अथवा अन्तर्ग्रन्थ के अन्तर्ग्रन्थ समष्टि में प्रतिदर्श यादृच्छिक अथवा अयादृच्छिक हो सकते हैं। इस अवस्था में हम केवल इतना ही कह सकते हैं कि यदि हम $P = 0.05$ का कमीटी के रूप में प्रयोग करें तो $P = 0.01$ की कमीटी के प्रयोग की अपेक्षा द्वितीय प्रकार की कम त्रुटियाँ होने की सम्भावना होगी।⁸

कसाटी का चयन—आवृत्तिक उद्देश्यों के लिए, जिस प्रकार की त्रुटि को दूर रखना हो उसके प्रकार में ऐसी सम्भाव्यता को चुनना चाहिये जोकि सार्थकता की कमीटी

8 यदि हम वैकल्पिक परिकल्पना स्थापित करें तो हम द्वितीय प्रकार की त्रुटियों के घटित होने की सम्भावना घटाने में सक्षम हो सकते हैं। मूल्य आरेख में दाईं ओर का वक्र परिकल्पना के इस परीक्षण को व्यक्त करता है (0.0 दाईं ओर के पिछले भाग में कमीटी के रूप में प्रयोग करेंगे) कि \bar{X} , \bar{X}_0 माध्य वाली समष्टि से, यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य है केवल $1 - P_0$ के घनात्मक मान परिकल्पना की सन्दिग्ध बनाते हैं।



\bar{X} का कोई भी मान जो $-\infty$ और $+\infty$ के मध्य पड़ता है, हमें परिकल्पना स्वीकार करने में कारण बनेगा। यदि \bar{X}_0 वा सही मूल्य यही है जो कि दाहिने वक्र के मध्य में दिखाया गया है, तो द्वितीय प्रकार की त्रुटि की सम्भाव्यता अत्यन्त-छोटी द्वारा व्यक्त होती है, जोकि लगभग 0.20 है। दूसरी वैकल्पिक परिकल्पना भी स्थापित की जा सकती है। ध्यान दें कि यदि सही \bar{X}_0 दाईं ओर अधिक हो, तो द्वितीय प्रकार की त्रुटियों की सम्भाव्यता घट जाती है, यदि सही \bar{X}_0 दाईं ओर अधिक हो तो द्वितीय प्रकार की त्रुटि की सम्भावना बढ़ जाती है। चार्ट से यह भी स्पष्ट हो जाता है कि यदि काला क्षेत्र (प्रथम प्रकार की त्रुटियों की सम्भाव्यता को व्यक्त करता है यदि \bar{X}_0 दाईं ओर सही माध्य हो) घट जाता है तो द्वितीय प्रकार की त्रुटियों की सम्भाव्यता (यदि सही \bar{X}_0 ठीक वैसा है जैसा कि चार्ट पर चिह्नित है) बढ़ जाती है, यदि काला क्षेत्र बढ़ जाता है तो अल्प-क्षेत्र घट जाता है।

का काम दे मके। यदि प्रथम प्रकार की त्रुटियाँ जितनी सम्भव हो सके उतनी कम हों तो P बहुत छोटा होना चाहिए। यदि द्वितीय प्रकार की त्रुटियाँ थोड़ी हों तो P बड़ा होना चाहिये। निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें -

एक कृषि प्रयोग केन्द्र ने एक ऐसी नई सूखी घास की फसल को विकसित किया है जो कि वर्तमान फसलों, जैसे नसुनघास, नैम्पिडेजा, तिपतिया इत्यादि, घासों से श्रेष्ठतर मानी गई है। नई फसल को उगाने के लिये कृषक द्वारा बीज बोने तथा फसल काटने के लिये विशेष मशीनों में भारी पूँजी लगाई जानी चाहिए। वर्तमान फसलों से नई फसल की तुलना करने में यदि प्रथम प्रकार की त्रुटि की गई हो तो नई घास लगाने वाले कृषकों को बहुत अधिक व्यय करना पड़ेगा परन्तु वे पशुओं को खिलाये जाने वाले पहले घास से नए घास को बेहतर नहीं पाएँगे। परिणामतः कृषकों को भारी नुकसान सहन करना पड़ा होगा। यदि द्वितीय प्रकार की त्रुटि की गई हो तो नई घास, यद्यपि बेहतर है, किन्तु कोई नहीं जाएगी और जबकि कृषक उन लाभों को प्राप्त करने में असफल रहेंगे जोकि परिणाम-स्वरूप उन्हें प्राप्त हुए होते, किन्तु उन्हें कोई यथार्थ हानि न उठानी पड़ती। इस प्रकार की परिस्थिति में प्रेक्षित अन्तर के सार्थक होने की घोषणा करने के लिये P को बहुत छोटा अर्थात् 0.01 या 0.001 होना चाहिये।

एक वर्ष समुक्त राज्य माछ तथा औपध प्रशासन ने एक सामायनिक विनिर्माण प्रतिष्ठान के विरुद्ध इस बात का आरोप लगाते हुए कार्रवाई की कि उसके द्वारा बेचा गया डिजिटैलिस अर्धशक्ति का है। कठिनाई इस बात में निहित थी कि यदि इस डिजिटैलिस का प्रयोग करने वाले व्यक्ति, जो इसके अभ्यस्त हो चुके हैं, बदल कर पूर्णशक्ति वाले डिजिटैलिस का प्रयोग करें तो उनको भयानक परिणाम भुगटने पड़ सकते हैं। इस प्रकार की औपधि के विषय में, यह महत्त्वपूर्ण है कि दैनन्दिन उत्पादन को मानक (समष्टि) के अनुरूप रखा जाए। जैसे प्रत्येक समुदाय के परीक्षण किये जाते हैं, यह आवश्यक है कि कोई भी समुदाय समष्टि से बहुत अधिक शक्तिशाली या दुर्बल नहीं होने देना चाहिये। यदि किसी समुदाय का परीक्षण करने में प्रथम प्रकार की त्रुटि हो जाए (अर्थात् यदि समुदाय को समष्टि में सार्थक रूप में भिन्न कहा गया है जबकि वह वास्तव में भिन्न नहीं है), तो परिणाम यह होगा कि समुदाय रद्द कर दिया जाएगा या उसकी पुनः प्रक्रिया होगी। इसके विपरीत, यदि द्वितीय प्रकार की त्रुटि हो जाती तो हम कहेंगे कि समुदाय समष्टि से सार्थक रूप में भिन्न नहीं है, जबकि यथार्थ अन्तर वास्तव में उपस्थित है और औपधि का प्रयोग करने वाले मनुष्यों को गम्भीर हानि यहाँ तक कि मृत्यु भी हो सकती है। इस प्रकार की स्थिति में, प्रथम प्रकार की त्रुटियों की अपेक्षा द्वितीय प्रकार की त्रुटियों को दूर करना स्पष्टतया अधिक महत्त्वपूर्ण है और इसलिए P , पर्याप्त बड़ा, अर्थात् 0.10 या अधिमानतः, और बड़ा होना चाहिये।

बहुत में ऐसे अवसर होंगे जब यह नहीं कहा जा सकता कि प्रथम प्रकार की त्रुटियाँ अधिक गम्भीर हैं या द्वितीय प्रकार की। इस प्रकार की अवस्था उस समय आती है जब पुरुष रसोइयो और पुरुष प्लेट धोने वालों के प्रतिभा स्तरों के माध्य के अन्तर का परीक्षण किया जा रहा है। यहाँ पर $P = 0.05$ को कमीटी के रूप में प्रयोग करके अन्वेषक सन्तुष्ट हो सकता है।

पूर्व वर्णन से यह स्पष्ट हो जाना चाहिये कि सभी परीक्षणों के लिये P के उसी मान को कमीटी के रूप में प्रयुक्त नहीं किया जाना चाहिये। उचित स्तर परिस्थितियों पर निर्भर करेगा। P का मूल्य दिए बिना, जिसे वर्तमान परिणामों से पर्याप्त औचित्य के साथ निर्धारित किया जा सकता है और अन्तर्वर्जन की आवश्यकता विरल ही होती है, यह सामान्यतया पढ़ा जा सकता है और अन्तर्वर्जन की आवश्यकता विरल ही होती है, यह कदापि नहीं कहना चाहिए कि परिणाम सार्थक है या सार्थक नहीं है। विकल्प में यह कहा जा सकता है "0.01 (या अन्य) स्तर पर सार्थक"। कभी-कभी अन्वेषक यह कहता है "0.05 (या अन्य) स्तर पर सार्थक परन्तु 0.02 (या अन्य) स्तर पर सार्थक नहीं"। P का मान बताने में पाठक का सार्थकता के सम्बन्ध में अपना निजी निष्कर्ष निकालने की अनुमति मिल जाती है।

एक अन्य महत्वपूर्ण बात है समस्या का हल प्रारम्भ करने से पूर्व प्रयुक्त की जाने वाली सार्थकता की कमीटी के सम्बन्ध में निर्णय की वांछनीयता। इससे यह सम्भाव्यता दूर हो जाती है कि प्राप्ति किया गया P का मान कमीटी तय करने पर प्रभाव डाले। यह विशेषतया उस समय घटन हास्यजनक है जब सार्थक या असार्थक अन्तर की "प्राप्ति की जाए।"

प्राधिकृत तथा दैनिक घटनाएँ—पाठक यह अनुभव कर सकता है कि सार्थकता से सम्बन्धित तथा सम्भाव्यताओं पर आधारित परिणामों में संचयन का एक नया आधार निहित है जिसका उससे पहले सामना नहीं हुआ। यह इस दृष्टि से सत्य हो सकता है कि हम गणितीय सम्बन्धों के कुछ अत्यन्त प्रारम्भिक विचारों का प्रयोग कर रहे हैं। तथापि किसी प्रकार की सम्भाव्यता पर निर्णयों को आधारित करना प्रत्येक व्यक्ति के जीवन में दैनिक घटना रही है। परीक्षा के लिये अध्ययन करने वाला विद्यार्थी पाठ्यक्रम के उन भागों पर विचार करता है जिन पर कि अध्यापक द्वारा प्रश्न पूछने की सम्भावना हो तथा जिन भागों के परीक्षा में आने की सम्भावना न हो। जैसे ही वह पुनर्विचार करता है तो सम्भाव्यता का यह अशोध्य व्यक्तिपरक प्रकार उसके लिये पदप्रदर्शन का काम करता है। बेमदाल के शिक्षक को सम्भावनाओं पर विचार कर लेना चाहिए (अथवा "प्रतिशतताओं की गिनती करनी चाहिए," जैसा आकाशवाणी आलोचक कहते हैं), पूर्व इसके कि वह रणनीति का आदेश दे या पूर्व इसके कि वह 0.290 पर बल्ला लगाने वाले बायें हाथ वाले नियमित बल्लेबाज के स्थान पर बायें हाथ से फेंकने वाले का सामना करने के लिये 0.240 पर बल्ला लगाने वाले बायें हाथ वाले बल्लेबाज को खड़ा करता है। इससे पूर्व कि कोई व्यक्ति अपने अधिकारी के पास वेतन वृद्धि के लिये जाता है वह सामान्यतया यह सोचता है कि क्या आज, कल या कोई अन्य दिन अधिक मांगलिक होगा। और अधिक बड़े स्तर पर, श्रमिक सघों की वर्ष के अधिकतम मंदा की महीनों में या मंदी के दिनों में मजदूरी में वृद्धि मांगने की सम्भावना नहीं होती। इसी प्रकार, जिस समय व्यापार में मंदी हो, उस समय सुविधाओं की दूरी में वृद्धि मांगना उचित नहीं।

प्रतिदर्श का आकार—कभी-कभी कोई व्यक्ति उस प्रतिदर्श के आकार को जानने की इच्छा कर सकता है जो उसे विश्वास की निर्दिष्ट मात्रा प्रदान करे कि प्रतिदर्श माध्य निर्दिष्ट सीमाओं के बीच ही रहेंगे। टायर मील के आंकड़ों के लिये, जबकि $\sigma = 15,200$ मील तथा $\sigma = 1,248$ मील, तो 100 में 98 प्रतिदर्शों के लिये, किम प्रतिदर्श आकार का

परिणाम यह होगा कि प्रतिदश माध्य ± 200 मील के भीतर रहे। परिचित तथा निर्दिष्ट मूल्यों को तथा $\frac{\lambda}{\sigma}$ के मूल्य को (परिशिष्ट ज से या परिशिष्ट झ की अन्तिम पंक्ति से) जो कि दो मिरो को अलग अलग कर देता है और जिसमें कि प्रसामान्य वक्र का दो प्रतिशत भाग सम्मिलित है व्यंजक

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{\lambda - \lambda_g}{\sigma}$$

में प्रतिस्थापित करने से ऊपर प्राप्त किया जाता है। क्योंकि $\frac{x}{\sigma}$ मान 2 326 है, अतः हम प्राप्त करते हैं

$$2\ 326 = \frac{200}{\sqrt{\lambda}}$$

$$200\sqrt{N} = (2\ 326)(1\ 248) = 2,902\ 8$$

$$\sqrt{N} = 14.5$$

$$N = 210$$

N तथा λ_g के मध्य अन्तर की साधकता जब σ ज्ञात न हो

पूवगामी विवरण में केवल उस प्रविधि का वर्णन किया गया है जो उस समय लागू होना है जब λ_g तथा σ ज्ञात हो। समष्टि मूल्यों का प्राप्त होना बहुत अधिक असमान्य है। यह स्पष्ट हो जायगा यदि हम उन अत्यधिक महत्वपूर्ण अवस्थाओं की गणना करें जिनके अन्तर्गत समष्टि मूल्य ज्ञात हो सकें। वे हैं

(1) पूर्ण जनगणना की गई हो सकती है। इस प्रकार संयुक्त राज्य की अभिनव जनगणना से, उन सभी व्यक्तियों की आयु के लिए जिनकी गणना हुई थी λ तथा σ का परिकलन किया जा सकता था (ध्यान दीजिये कि पृष्ठ 20—21 पर वर्णित पूर्णजन प्रवृत्ति इन आयु-श्रेणियों की प्रथमा किसी अन्य की परिशुद्धता को प्रभावित करेगी, जो शुद्ध प्रतिवेदित जन-तिथियां पर आधारित नहीं है।)

(2) विस्तृत अनुभव के परिणामस्वरूप समष्टि मूल्यों को जाना जा सकता है। यह उस प्रकार की स्थिति है जिसका टायर मीलान्कन श्रेणियों के द्वारा वर्णन किया गया है।

(3) गुण नियन्त्रण में मानक का काम करने के लिये “नियन्त्रण समष्टि” की स्थापना पूर्व वर्णन के अधिक समान है। यहां पर सावधानीपूर्वक नियन्त्रित परिस्थितियों में बहुत सी इकाइयों का निर्माण किया जाता है और इन इकाइयों से परिकलित सांख्यिकीय मूल्यों को समष्टि श्रेणियों के रूप में ग्रहण किया जाता है। तब दैनन्दिन उत्पादन श्रेणियों की तुलना समष्टि श्रेणियों से की जाती है।

(4) समष्टि मूल्य ज्ञात हो सकते हैं या उनकी परिकल्पना या सिद्धान्त के आधार पर कल्पना की जा सकती है। जब माध्यों की अपेक्षा अनुपातों का वर्णन किया जा रहा है उस समय प्रायः ऐसे मामलों का सामना करना पड़ता है। ऐसे परीक्षण में जिसमें यह ज्ञात करना हो कि चाय पीने वाले चीनी के द्वारा भीठी की गई या मैत्रीन के द्वारा भीठी की गई चाय में अन्तर कर सकते हैं, प्रत्येक भीठा करने वाले तत्व के लिये समष्टि अनुपात की पूर्वधारणा 0.50 की जा सकती है। काफी के चार प्रकारों के प्राथमिकता परीक्षण में प्रत्येक प्रकार के लिये समष्टि अनुपात 0.25 लिया जाएगा।

सारणी 24 1

0 104 इंच व्यास वाली सरत खोची गई ताम्बे की तार
के 10 प्रतिदशों की टूटने की शक्ति

प्रतिदश	टूटने की शक्ति पाउंड में	X^2
1	575	334,084
2	572	327,184
3	570	324,900
4	568	322,624
5	572	327,184
6	570	324,900
7	570	324,900
8	572	327,184
9	566	355,216
10	584	341,056
या. ग	5,752	3,309,232

खनिज पदार्थों के परीक्षण के लिये अमरीकी मस्था, सरिरेन्दन दू 1933 ए० एम० टी० एम० मैन्गुस जान ट्रीजेन्टेसन ऑफ डेटा "मथिमेन्ट ए—प्रिजेंटिंग प्लस एण्ड माइनस लिमिट्स ऑफ अक्सरेंट्री ऑफ दैन आन्डरस्ट एन्ड पृष्ठ 1, खनिज परीक्षणों के लिए अमरीकी मस्था की कार्यवाहिया फ्रण्ड 35, भाग एक, फिलेडेलफिया से पुनर्मुद्रित।

$$\bar{X} = \frac{5752}{10} = 575.2 \text{ पाउंड}।$$

$$s = \sqrt{\frac{3,309,232}{9} - \frac{(5752)^2}{109}}$$

$$= \sqrt{7573} = 8.70 \text{ पाउंड}।$$

\bar{X} तथा \bar{X}_0 में अन्तर जो सार्थक नहीं है—जैसाकि सारणी 24 1 में दिखाया गया है, सस्ती से खोची गई ताम्र तार के 10 टुकड़ों की तोड़ने की शक्ति के परीक्षण किये गये हैं। दस मूल्यों का समान्तर माध्य 575.2 पाउंड है। अपनी 0.01 कसौटी के साथ, भाइये हम इस परिकल्पना का परीक्षण करे कि $\bar{X} = 575.2$ पाउंड, $\bar{X}_0 = 577.0$ पाउंड वाली समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य है। अब हमें σ का पता नहीं है और क्योंकि हमारे पास σ नहीं है तो हमें अवश्यमेव प्रतिदर्श के आँकड़ों में σ का आकलन करना चाहिये। इस आकलन को निम्न व्यंजक¹¹ से प्राप्त किया जाता है

11 s के लिये आधारभूत व्यंजक की परिशिष्ट घ, परिच्छेद 24.3 में विकसित किया गया है। जिस प्रकार परिशिष्ट घ, परिच्छेद 10 2 में दिया गया है, उसी प्रकार की प्रविधि द्वारा इस आधारभूत व्यंजक से वर्गित तथा अवर्गित आँकड़ों के लिए प्रयत्न प्राप्त किए जाते हैं।

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{\sum x^2}{N-1}}, \\ &= \sqrt{\frac{\sum X^2}{N-1} - \frac{(\sum X)^2}{N(N-1)}} \quad \text{अवर्गीकृत आंकड़ों के लिए,} \\ &= \sqrt{\frac{\sum f(d')^2}{N-1} - \frac{\sum f(d')^2}{N(N-1)}} \quad \text{वर्गीकृत आंकड़ों के लिए।}\end{aligned}$$

$\hat{\sigma}^2$ को σ^2 का “नतिहीन” आकलन कहा जाता है, क्योंकि¹²

$$\frac{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \dots + \hat{\sigma}_K^2}{K} = \sigma^2,$$

s^2 , σ^2 का नतिहीन आकलन नहीं है, क्योंकि

$$\frac{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_K^2}{K} < \sigma^2.$$

अब जब कि हमारा पाम $\hat{\sigma}$ है, हम इस स्थिति में हैं कि σ_X का आकलन कर सकें। यह है¹³

$$\hat{\sigma}_X = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}$$

ताम्र तार के टूटने की शक्ति के आंकड़ों के लिये, $\hat{\sigma}$ का परिकलन सारणी : 4। के नीचे दिखाया गया है, तथा

$$\hat{\sigma}_X = \frac{8.70}{\sqrt{10}} = 2.75 \text{ पाउंड।}$$

अब हम सार्थकता अनुपात का परिकलन कर सकते हैं।

$$\frac{\bar{X} - \bar{X}_0}{\hat{\sigma}_X}$$

यह सार्थकता अनुपात पहले प्रयोग किये गये अनुपातों से भिन्न है क्योंकि हर σ_X का आकलन है। इस प्रतिस्थापन के कारण, हम इस स्थिति में नहीं हैं कि प्रसामान्य वक्र का संकेत दें, परन्तु हमें अवश्यमेव t बटन का प्रयोग करना चाहिये, जो यद्यपि सममित है तथापि प्रसामान्य वक्र की अपेक्षा अधिक विस्तृत रूप से विक्षेपित है। इसे चार्ट 24.10 में

12. देखिये परिशिष्ट घ, परिच्छेद 24.3।

13. यदि s प्रतिदर्श के लिये ज्ञात है तो इसे

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} s$$

के प्रयोग द्वारा $\hat{\sigma}$ में रूपान्तरित किया जा सकता है। तथापि हम प्रकार के रूपान्तरण की आवश्यकता नहीं है क्योंकि हम

$$\hat{\sigma}_X = \frac{s}{\sqrt{N-1}}$$

लिख सकते हैं। यह बिल्कुल स्पष्ट हो जाना चाहिये कि ज्यों-ज्यों N में वृद्धि होती है त्यों-त्यों s तथा $\hat{\sigma}$ व सन्धानमक अन्तर की महत्ता नगण्य रह जाते हैं। फिर भी, σ के आकलन के तौर पर s का प्रयोग में लाना गलत है।

देखा जा सकता है। t बटन का प्रसार विद्यमान "स्वतन्त्रता के अंशों" (n) की सख्या पर निर्भर करता है, $n = 1$ के लिये विशेषण अधिकतम है और जब n में वृद्धि होती है तो यह कम होता है। जैसे ही n अनन्त पर पहुँचता है तो t बटन सीमा के रूप में प्रामाण्य बटन पर पहुँच जाता है। चार्ट 24 10 पर दृष्टि डालने से यह प्रवृत्ति स्पष्ट है। अकेले प्रतिदर्श माध्य वाले सार्थकता परीक्षणों के लिये, जिस प्रकार का विचाराधीन है, $n = N - 1$, क्योंकि हमने $\hat{\sigma}$ का परिकलन करने के लिये N मानों के विचलनों का उनका अपने माध्य के विरुद्ध प्रयोग किया। अन्य शब्दों में, हमने N नहीं अपितु $N - 1$ स्वतन्त्र विचलनों का प्रयोग किया।

ताम्र-तार की टूटने की शक्ति के आँकड़ों के लिये,

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}_g}{\hat{\sigma}_X} = \frac{575.2 - 577.0}{2.75} = \frac{1.8}{2.75} = 0.65$$

$n = N - 1 = 10 - 1 = 9$ तथा $t = 0.65$ के लिये परिशिष्ट भ के सदृश द्वारा P के मूल्य का अभिनिश्चय किया जाता है। यह परिशिष्ट सारणी प्रामाण्य वक्र की पूर्वगामी सारणी में कुछ भिन्न है। दोनों सारणियों में सम्बन्धित बटनों के दो निरो में क्षेत्रों को दिखाया गया है, परन्तु परिशिष्ट ज, $\frac{X}{\sigma}$ के जुड़े हुए मूल्यों के लिए P के मूल्यों को दर्शाता

है, जबकि परिशिष्ट भ n तथा P के विशिष्ट मूल्यों के लिये t के मूल्यों को दर्शाता है। परिशिष्ट भ में यह देखा जाता है कि $0.50 < P < 0.60$, तथा हम यह परिणाम निकालते हैं कि \bar{X} तथा \bar{Y}_g के बीच कोई सार्थक अन्तर नहीं है। चार्ट 24 11, जिसमें स्वतन्त्रता के 9 अंशों के लिए t बटन को दिखाया गया है, उस बात की व्याख्या करता है जो की गई है।

\bar{X} तथा \bar{Y}_g में अन्तर जो सार्थक है—नामन सी० विले¹⁴ एक प्रतिदर्श के लिये $N = 16$, $\bar{X} = 9,959$ पाउंड, तथा $s = 248$ पाउंड दर्शाते हुए, तीन-इंच मनीला रस्सी की शक्ति के परीक्षणों के आँकड़ों प्रस्तुत करते हैं। 0.01 स्तर का कसौटी के रूप में प्रयोग करने हुए हम इस परिकल्पना का परीक्षण करेंगे कि $\bar{X} = 9,959$ पाउंड, $\bar{Y}_g = 10,148$ पाउंड वाली समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य है। $\hat{\sigma}_X$ को प्राप्त करने के लिये, हम पादांक 13 में प्रस्तुत व्यंजक का प्रयोग करते हैं

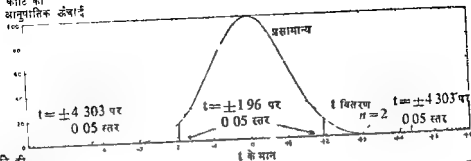
$$\hat{\sigma}_X = \frac{s}{\sqrt{N-1}} = \frac{248}{\sqrt{15}} = \frac{248}{3.873} = 64.03.$$

तब हम परिकलन करते हैं

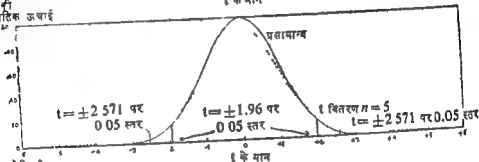
$$\begin{aligned} t &= \frac{\bar{X} - \bar{Y}_g}{\hat{\sigma}_X} = \frac{9,959 - 10,148}{64.03} \\ &= \frac{189}{64.03} = 2.95 \end{aligned}$$

14 एन० सी० विले द्वारा लिखित स्टैटिस्टिकल मैथड्स ऐज ऐन एंड इन रिवाइजिंग स्पेसिफिकेशन में प्रतिदर्श आँकड़े हैं, यंत्रों के परीक्षण के लिये अमरीकी सस्था की इकनालोमीसी डेटा के समय पड़े गये पत्र का पुनर्मुद्रण।

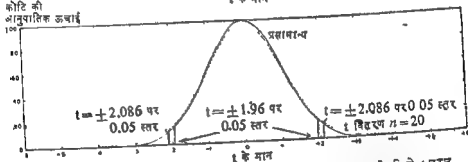
कोटि की
आनुपातिक ऊँचाई



कोटि की
आनुपातिक ऊँचाई



कोटि की
आनुपातिक ऊँचाई



घाटें 24 10 प्रसामान्य बटन के साथ $n=2$, $n=5$, तथा $n=20$ के लिये t बटन की तुलना। ऊपर प्रदर्शित t के मूल्य प्रसामान्य वक्र के लिये $\frac{x}{\sigma}$ मूल्य हैं। t बटन की कोटियों को निम्न व्यंजक में लिया गया है

$$Y = \sqrt{\frac{2 \left(\frac{n-1}{2} \right)!}{n \left(\frac{n-2}{2} \right)! \left(1 + \frac{t^2}{n} \right)^{\frac{n+1}{2}}}}$$

यह अधिकतम कोटि प्रदान करता है जो 10 पर पहुँच जाती है ज्यों ही n बन्दूक को पहुँचता है और इस प्रकार प्रसामान्य वक्र के लिये व्यंजक

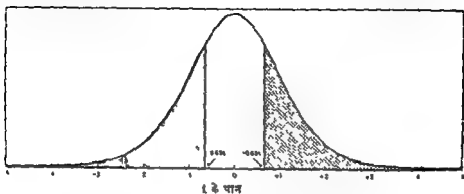
$$Y_0 = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

से तुलना योग्य है।

के परिकलन को उदाहरण से स्पष्ट किया जा

सकता है। यदि $n=11$, तो अब 5 है, जबकि हर 4.5 है 4.5 के मूल्य को $4.5 \times 3.5 \times 2.5 \times 1.5 + 0.5 \sqrt{\pi}$ के द्वारा दिया गया है।

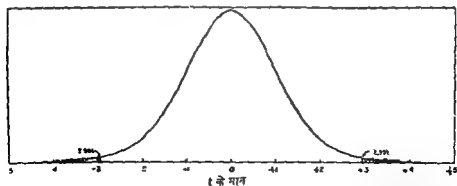
परिशिष्ट ३ की त सारणी से यह प्रतीत होता है कि P लगभग ठीक 0.0 है, और हम परिवर्तना को अस्वीकार कर ले। पूर्व वर्णित धारणा को लेखाचित्रीय ढंग से चार्ट 24 12 में दिखाया गया है। ध्यान दें, कि यदि हम परिशिष्ट 3 की प्रसामान्य सारणी का



चार्ट 24 11 $n=9$ के लिये t बटन, $t = \pm 0.65$ अधिक प्राप्त करने की सम्भाव्यता को दिखाते हुए। वक्र के नीचे 0.50 तथा 0.60 के बीच अन्तर दो सिरों में है।

प्रयोग करते तो सम्भाव्यता अमात्मक रूप से कम, लगभग 0.003 रहती। यदि प्रतिदर्श बड़ा होता तो दो सम्भाव्यताओं के मध्य अन्तर काफी कम होता। जैसा कि चार्ट 24 10 में और परिशिष्ट 3 में देखा जा सकता है t बटन लगभग $n=20$ पर प्रसामान्य बटन के समिकट आता हुआ दिखाई देता है। जब $n \geq 30$, तो कुछ सांख्यिकीविद स्वभावतः प्रसामान्य सारणी का संकेत देते हैं, परन्तु यह इस कारण से ऐसा दिखाई देता है कि कुछ समय के लिये प्राप्य t सारणियों में $n=30$, तथा $n=\infty$ के बीच t के कोई मूल्य नहीं दिए। परिशिष्ट 3 में $n=30, 40, 60, 120$ तथा ∞ के लिये t मानों की सूची दी गई है। जहाँ t को 0 के आकलन के रूप में प्रयुक्त किया गया है उन सब अवस्थाओं में t सारणी का प्रयोग करना सर्वोत्तम है।

Δ_p की विश्वास्यता सीमाएँ—अभी-अभी दिए उदाहरण में यह परिणाम निकाला गया था कि प्रतिदर्श माध्य $\Delta_p = 10.148$ पाउंड वाली समष्टि से प्रतिदर्श माध्य



चार्ट 24 12 $n=15$ के लिये t बटन, जिसमें $t = \pm 2.95$ या अधिक प्राप्त करने की सम्भाव्यता को दिखाया गया है। वक्र के नीचे अन्तर का लगभग अंश 0.01 दो सिरों में है।

प्रतिदर्श का माध्य नहीं था। प्रतिदर्श मात्र के ज्ञान से, उन सीमाओं के बारे में क्या कहा जा सकता है जिनके भीतर \bar{X}_g के उत्पन्न होने की आशा की जा सकती है। \bar{X}_g के लिये हमें दो मूल्यों की आवश्यकता है, जिन्हें हम X_{g1} तथा X_{g2} कहेंगे और जो \bar{X} से क्रमशः कम तथा अधिक होंगे। ये \bar{X}_g की “विश्वास्यता सीमाएँ” हैं। पहला पय इस बात का निर्णय करने में निहित है कि हम विश्वास्यता सीमाओं के अपने वचन के गन्त होने के लिए कितनी बार तैयार हैं। कल्पना कीजिये कि हम स्वयं को 100 में से 5 से अधिक बार गलत नहीं होने देते। उस अवस्था में हमें 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं की आवश्यकता है। निम्न का निर्धारण करने से ये सीमाएँ प्राप्त की जाती हैं

(1) X_{g1} के मूल्य की स्थिति इस प्रकार से है कि X_{g1} के गिर्द प्रतिदर्श माध्यों के बटन के सिरे के ऊपरी $2\frac{1}{2}$ प्रतिशत को \bar{X} काट देता है, तथा

(2) X_{g2} के मूल्य की स्थिति इस प्रकार से है कि X_{g2} के गिर्द प्रतिदर्श माध्यों के बटन के निम्न $2\frac{1}{2}$ प्रतिशत सिरे को \bar{X} काट देता है।

इन दोनों मूल्यों को निम्नलिखित व्यंजक से प्राप्त किया जा सकता है, जिसमें हम पूर्व परिकल्पित \bar{X} तथा $\sigma_{\bar{X}}$ के मूल्यों तथा उचित विश्वास्यता सीमाओं के लिए t मूल्य का प्रतिस्थापन करते हैं

$$X = \bar{X}_g \pm t \sigma_{\bar{X}}.$$

क्योंकि हमें 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं की आवश्यकता है और क्योंकि $n=15$, अतः t का मूल्य (परिमिट ४ से) 2.131 है। तब हमारे पास है

$$9,959 = \bar{X}_g \pm (2.131)(64.03)$$

$$\bar{X}_g = 9,959 \pm 136.4,$$

$$= 9,822.6 \text{ तथा } 10,095.4 \text{ पाउंड।}$$

पूर्वर्धारित प्रविधि का चार्ट 24.13 में निदर्शन किया गया है।

हमें पूर्ण विश्वास नहीं है कि समष्टि माध्य अभी-अभी प्रस्तुत सीमाओं के बीच पड़ता है, परन्तु हमें 95 प्रतिशत विश्वास है कि ऐसा होता है। दूसरे शब्दों में, यदि 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं के बहुत से निर्धारण किये जाएँ तो हम उन सीमाओं में 100 में से 95 बार समष्टि मूल्य को सम्मिलित करने की तथा 100 में से 5 बार समष्टि मूल्य को बहिष्कृत करने की आशा कर सकते हैं। रोमर पी० डोयले ने प्रसामान्य समष्टि से शेल्हार्ट के 1,000 प्रतिदर्शों में से प्रत्येक के लिये \bar{X}_g की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं का परिकलन किया है। प्रत्येक प्रतिदर्श के लिये \bar{X} , σ , तथा $n=3$ का प्रयोग करके उसने विश्वास्यता सीमाओं के 1,000 युग्मों को ज्ञान किया और प्रत्येक युग्म पर यह ध्यान दिया, कि उन्होंने $\bar{X}_g = 0$ को सम्मिलित किया अथवा नहीं। उसकी विश्वास्यता सीमाएँ 951 उदाहरणों में ठीक थी और 49 में गलत थी।

जबकि पूर्वगामी निदर्श में 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ प्राप्त की गईं, किन्तु प्रतिदर्श से प्राप्त \bar{X} तथा $\sigma_{\bar{X}}$ के मूल्यों के साथ उचित t मूल्य का प्रतिस्थापन मात्र करके किन्हीं भी वांछित सीमाओं का परिकलन किया जा सकता है। इस प्रकार की सीमाएँ जैसे कि 99.9, 99.8, 99, 98, 96, 95 तथा 90 प्रायः प्रयोग की जाती हैं। 90 प्रतिशत से कम विश्वास प्रस्तुत करने वाली विश्वास्यता सीमाओं की प्रायः आवश्यकता नहीं होती, क्योंकि ये विश्वास के ऊँचे स्तर की अभिव्यक्ति नहीं करती।

अनुपातों के लिये विश्वास्यता सीमाओं का निर्धारण, प्रतिदर्श प्रमरणों (s^2 अथवा $\hat{\sigma}^2$) तथा सहसम्बन्ध गुणांको का वर्णन आगामी दो अध्यायों में किया जायेगा। इन मापों के लिये तथा समांतर माध्यों के लिये सांख्यिकीय कार्यकर्ता को विचाराधीन माप के लिये अधिकतम और न्यूनतम संभव मूल्यों पर ध्यानपूर्वक विचार करना चाहिये। कई बार स्वयं चर का स्वभाव सीमाएँ स्थापित कर देता है, जिसके परे मूल्य नहीं जा सकते, और जिसे परिगणित विश्वास्यता सीमाओं की अपेक्षा अप्रगण्यता प्राप्त होनी चाहिये।

\bar{X}_g की विश्वास्यता सीमाओं का निर्धारण करने के लिये व्यञ्जक

$$\bar{X} = \bar{X}_g \pm t\hat{\sigma}_x,$$

की अपेक्षा

$$\bar{X}_g = \bar{X} \pm t\hat{\sigma}_x,$$

लिखा गया था जिसने वही परिणाम प्रदान किये होते। ऐसा करने का उद्देश्य यह था कि इस बात पर बल डाला जाये कि प्रतिदर्श माध्यों का \bar{X}_g के गिर्द बंटन होता है। चार्ट 24 13 भी इसे स्पष्ट करने का प्रयास करता है। \bar{X} के गिर्द समष्टि माध्यों के बंटन जैसी कोई वस्तु नहीं है।

पूर्वगामी 7 पृष्ठों में प्रस्तुत सभी निदर्शों में $\hat{\sigma}_x$ तथा t बंटन निहित हैं। इस बात पर बल डालना अच्छा हो सकता है कि t के मूल्य में विचरण, $\hat{\sigma}$ के प्रतिदर्श विचरणों तथा \bar{X} के प्रतिदर्श विचरणों के कारण होते हैं। t का अधिक मूल्य (और इसलिए P का कम मूल्य) इस कारण से हो सकता है कि \bar{X} में \bar{X}_g से बहुत है, भिन्नता या क्योंकि $\hat{\sigma}$ छोटा है σ से या दोनों। t का कम मूल्य (और इसलिए P का अधिक मूल्य) इसलिए हो सकता है कि क्योंकि \bar{X} \bar{X}_g के बिल्कुल सन्निकट पहुँचता है, या क्योंकि $\hat{\sigma}$ अधिक है σ से, या दोनों। जब σ ज्ञात हो तो एकमात्र विद्यमान प्रतिदर्श विचरण वे हैं जो \bar{X} के हैं।

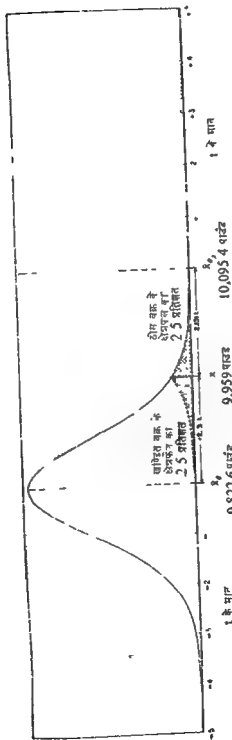
दो प्रतिदर्श माध्यों के बीच अन्तर की साधकता

स्वतंत्र प्रतिदर्श—किसी निश्चित स्थान पर पुरातात्विक खुदाई से 16 निम्न प्रथम चर्वणुदन्त प्राप्त किये गये।¹⁵ हम 16 दाँतों में से प्रत्येक का माप नहीं जानते परन्तु हम यह जानते हैं कि $\bar{X}_1 = 13.57$ मिमी और $s_1 = 0.72$ मिमी। निकट के स्थान से $\bar{X}_2 = 13.06$ तथा $s_2 = 0.62$ मिमी के साथ 9 निम्न प्रथम चर्वणुदन्त लिये गये थे। $P = 0.05$ की कसौटी का प्रयोग करते हुए, क्या निम्न प्रथम चर्वणुदन्तों के इन दो नमूहों की माध्य लम्बाई में साधक अन्तर है? इस परीक्षण के लिये हम निराकरणयोग्य परिकल्पना स्थापित करते हैं कि X_1 से सम्बन्धित दो प्रतिदर्श माध्य उसी समष्टि से हैं, और हम इस परिकल्पना का परीक्षण t की सभाव्यता का निर्धारण करके करते हैं, जहाँ t दो प्रतिदर्श माध्यों के बीच अन्तर की मानक त्रुटि के घाकलन के साथ $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ का अनुपात है।

यदि दो प्रतिदर्श स्वतंत्र हैं, तो जैसाकि परिशिष्ट घ, परिच्छेद 24 4, में दिखाया गया है, दो प्रतिदर्श माध्यों $\sigma_{\bar{X}_1} - \bar{X}_2$ के बीच अन्तर की मानक त्रुटि को

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2},$$

¹⁵ कोलम्बिया विश्वविद्यालय में प्रो० एनन पियर्सन द्वारा दिये गये एक व्याख्यान "जीकडो पर आधारित।



चार्ट 24.13 तीन इध मनीला रस्सी, $\mu=15$ की क्षति के लिये \bar{X}_0 की 95 प्रतिशत विववास सीमाएँ ।

के द्वारा प्राप्त किया जाता है। अस्वतन्त्र प्रतिदर्शों पर इस अध्याय में बाद में विचार किया जायेगा। अभी प्रस्तुत व्यंजक को इस प्रकार लिखा जा सकता है¹⁶

$$\sigma_{1-1}^2 = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N_1} + \frac{\sigma^2}{N_2}} = \sigma \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}.$$

हम अपनी समस्या के लिये इस सूत्र का प्रयोग नहीं कर सकते, क्योंकि हम σ का मूल्य नहीं जानते। (यदि हम σ को जानते तो हम X'_0 को भी लगभग निश्चित रूप से जान लेते क्योंकि σ को X'_0 के गिरे परिकल्पित किया जाता है। यदि हम X'_0 को जानते तो दो प्रतिदर्श माध्यों को एक दूसरे के साथ तुलना करने की अपेक्षा X'_0 के साथ X'_1 और X'_2 की तुलना करना अधिक अर्थपूर्ण होता।) परिणामतः, दो प्रतिदर्शों द्वारा दो गई मूल्या से हम σ के मूल्य का आकलन करते हैं। यह आकलन¹⁷ है

$$\hat{\sigma}_{1+2} = \sqrt{\frac{\sum x_1^2 + \sum x_2^2}{N_1 - 1 + N_2 - 1}}.$$

जब प्रत्येक प्रतिदर्श के अलग-अलग प्रेक्षण प्राप्त हैं, जैसा कि प्रायः होता है, तो हम अवर्गीकृत आंकड़ों के लिये

$$\sum x^2 = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

का परिकलन कर सकते हैं अथवा वर्गीकृत आंकड़ों के लिये परिकलन कर सकते हैं

$$\sum x^2 = 1 \left[\sum f_i (d_i')^2 - \frac{(\sum f_i d_i')^2}{N} \right]$$

16. यह कल्पना कर ली जाती है कि दो प्रतिदर्श σ^2 प्रसरण में समरूपित उसी समष्टि के हैं। यह कल्पना हमारी समस्या के लिये तर्कहीन नहीं है, क्योंकि अध्याय 26 में वर्णित F परीक्षण यह स्पष्ट करता है कि $\hat{\sigma}_1^2$ और $\hat{\sigma}_2^2$ के बीच सांख्यिक अंतर नहीं है। जब दो प्रतिदर्शों की अवयव प्रसरण को समष्टियों से समझा जाता है और जब $N_1 = N_2$, या $N_1 \approx N_2$ और दोनों बड़े हैं तो

$$\hat{\sigma}_{1-1}^2 = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{N_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{N_2}}.$$

का प्रयोग करके सन्निकट परीक्षण किया जा सकता है।

17 $\hat{\sigma}_{1+2}^2$ पृथक् प्रतिदर्शों के लिए या $\hat{\sigma}^2$ मानों की भारित औसत है। परिच्छेद घ, परिच्छेद 24.5 देखिए। परिच्छेद 24.6 में दिखाया गया है कि जब $N_1 \approx N_2$ तो

$$\hat{\sigma}_{1+2} \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{N_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{N_2}}$$

जब दो से अधिक प्रतिदर्श हों तो σ^2 का आकलन

$$\frac{\sum x_1^2 + \sum x_2^2 + \sum x_3^2 + \dots}{N_1 - 1 + N_2 - 1 + N_3 - 1 + \dots}$$

के द्वारा दिया जाता है। प्रसरण विश्लेषण के वर्णन के साथ हम इन व्यंजकों का प्रयोग अध्याय 26 में करेंगे।

विचाराधीन समस्या के लिए, हमारे पास पृथक्-पृथक् प्रेक्षण नहीं हैं, किन्तु s_1 तथा s_2 अवश्य हैं। क्योंकि

$$s_1 = \sqrt{\frac{\sum x_1^2}{N_1}} \quad \text{तथा} \quad s_2 = \sqrt{\frac{\sum x_2^2}{N_2}}.$$

$$\sum x_1^2 = N_1 s_1^2 \quad \text{तथा} \quad \sum x_2^2 = N_2 s_2^2.$$

अतः हम परिकलन करते हैं

$$\sum x_1^2 = 16(0.72)^2 = 8.29,$$

$$\sum x_2^2 = 9(0.62)^2 = 3.46.$$

तब σ का आकलित मूल्य प्राप्त किया जाता है

$$\hat{\sigma}_{1+2} = \sqrt{\frac{8.29 + 3.46}{16 - 1 + 9 - 1}} = 0.715.$$

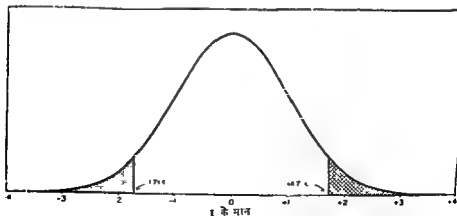
दो माध्यों के बीच अन्तर की आकलित मानक त्रुटि का अब परिकलन किया जा सकता है :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} &= \hat{\sigma}_{1+2} \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}, \\ &= 0.715 \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{9}} = 0.291. \end{aligned}$$

अन्त में हम वांछित सार्थकता अनुपात प्राप्त कर सकेंगे हैं,

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{13.57 - 13.06}{0.298} = \frac{0.51}{0.298} = 1.71.$$

प्रॉकडो के प्रथम समुच्चय से हमारे पास है $n_1 = N_1 - 1 = 16 - 1 = 15$ स्वतंत्रता अंश, द्वितीय समुच्चय से, $n_2 = N_2 - 1 = 9 - 1 = 8$. अतः $n = n_1 + n_2 = 23$ ध्यान दें कि जब \bar{X}_1 के विरुद्ध $\sum x_1^2$ का परिकलन किया गया तो स्वतंत्रता के एक अंश का ह्रास हुआ और जब \bar{X}_2 के विरुद्ध $\sum x_2^2$ का परिकलन किया गया तो एक और अंश की हानि हुई। परिशिष्ट B की 1 सारणी से हम पाते हैं $P \approx 0.10$ और हम \bar{X}_1 तथा \bar{X}_2 के मध्य अन्तर को सार्थक नहीं समझते। चार्ट 24.14 ऊपर के विवरण को प्रदर्शित करता है।



चार्ट 24.14 $t = \pm 1.71$ या अधिक को प्राप्त करने की संभाव्यता को दिखाते हुए, $n = 23$ के लिये t बंटन। चक्र के नीचे खोल का समय 0.10 दो मिनेटों में है।

$\bar{X}_{g1} - \bar{X}_{g2}$ की विश्वास्यता सीमाएँ—कभी-कभी जब यह निष्कर्ष निकाल लिया गया हो कि \bar{X}_1 और \bar{X}_2 के बीच सार्थक अन्तर विद्यमान है तो $\bar{X}_{g1} - \bar{X}_{g2}$ की विश्वास्यता सीमाओं का वक्तव्य प्राप्त करना वांछित हो सकता है। इसे $\bar{X}_{g1} - \bar{X}_{g2}$ के लिये व्यञ्जक¹⁸

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = (\bar{X}_{g1} - \bar{X}_{g2}) \pm t \hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$$

को सरल करके प्राप्त किया जाता है। जिस प्रकार \bar{X}_g की विश्वास्यता सीमाओं के निर्धारण में है, t का मान परिशिष्ट अ से पढ़ा जाता है और वह निर्भर करता है (1) प्रयुक्त किये जाने वाले विश्राम के स्तर पर और (2) स्वतन्त्रता के अंशों पर जोकि इस प्रकार है $n = N_1 - 1 + N_2 - 1$ ।

ऊपर प्रस्तुत व्यञ्जक के प्रयोग की सभ्यभाने के लिये, दो स्रोतों से प्राप्त सरचनात्मक इस्पात (जलयानों के लिये) के उत्पादन बिन्दु पर विचार करें। स्रोत 1 के लिये : $N_1 = 10$, $\bar{X}_1 = 45,948$ पाउंड प्रति वर्ग इंच, और $s_1 = 2,910$ पाउंड प्रति वर्ग इंच। स्रोत 2 के लिये $N_2 = 19$, $\bar{X}_2 = 39,820$ पाउंड प्रति वर्ग इंच, और $s_2 = 2,510$ पाउंड प्रति वर्ग इंच।¹⁹ निम्न प्रथम चर्चण दार्तो के आँकड़ों के लिए सभी प्रयुक्त उन्ही व्यञ्जकों का प्रयोग करते हुए, यह प्राप्त होता है कि $\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 1,074.9$ तथा

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{45,948 - 39,820}{1,074.9}$$

$$= \frac{6,128}{1,074.9} = 5.7$$

$n = n_1 + n_2 = 9 + 18 = 27$ के लिये t का यह मूल्य 0.001 स्तर से बहुत परे है, अतः माध्यों के बीच अन्तर सार्थक है।

$\bar{X}_{g1} - \bar{X}_{g2}$ की 98 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं को प्राप्त करने के लिये हम $t = 2.473$ का प्रयोग करते हैं और ज्ञात मूल्यों का

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = (\bar{X}_{g1} - \bar{X}_{g2}) \pm t \hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$$

में प्रतिस्थापन करते हैं। इससे प्राप्त होता है

$$45,948 - 39,820 = (\bar{X}_{g1} - \bar{X}_{g2}) \pm (2.473)(1,074.9).$$

$$\bar{X}_{g1} - \bar{X}_{g2} = 6,128 \pm 2,658,$$

$$= 3,470 \text{ और } 8,786 \text{ पाउंड प्रति वर्ग इंच।}$$

अस्वतन्त्र (आश्रित) प्रतिदर्शों—जब दो प्रतिदर्शों में मदों के जोड़ों के बीच जन्मजात युग्मता विद्यमान हो तो साधारणतया यह परिणाम निकलता है कि दो प्रतिदर्श स्वतन्त्र नहीं हैं। हम इसमें सचि नहीं रखते कि दो प्रतिदर्शों में प्रथम और आगामी मूल्यों के युग्म अभी युग्मित हुए हों क्योंकि वे सूची के क्रम से चुने गये थे; हमारी उस समय सचि होती है यदि, उदाहरणार्थ, युग्मित पाठ्यांक भाइयों और बहनो या जुड़वाँ बच्चों के प्रतिभा स्तर के मूल्य हों, अथवा यदि मूल्य टायर के मौलिक दार्तो और पुन ऊपरी पट्टी चढ़ाने के बाद टायरों के मील हैं। समस्याओं में से बहुत अधिकांश जिनका सामना करना पड़ेगा स्वतन्त्र प्रतिदर्शों के सम्बन्ध में होंगी। तो भी यह अत्यन्त महत्वपूर्ण है कि आश्रित प्रतिदर्शों को उनके

18. \bar{X}_1 और \bar{X}_2 बीच के अन्तर की सार्थकता के परीक्षण के समान, यह परीक्षण करना भी हो सकता है कि 0 से सम्बन्धित दो प्रतिदर्श उसी दृष्टि से हैं।

19. आँकड़े पाद-टिप्पणी 14 में प्रस्तुत स्रोत से हैं।

वास्तविक रूप में पहचाना जाये; उनके साथ स्वतन्त्र प्रतिद्वन्द्वों का-सा व्यवहार नहीं किया जाना चाहिये।

सारणी 242

25 अंगूर फलों के छायांकित तथा चित्रित घाबे भागों
में घनों की प्रतिदानता

फल	छायांकित X_1	चित्रित X_2	$D = X_1 - X_2$	D^2
1	8.59	8.49	0.10	0.0100
2	8.59	8.59		
3	8.09	7.84	0.25	0.0625
4	8.54	7.89	0.65	0.4225
5	8.09	8.19	-0.10	0.0100
6	8.49	7.84	0.65	0.4225
7	7.89	7.89		
8	8.49	7.89	0.70	0.4900
9	8.54	7.79	0.75	0.5625
10	7.99	7.84	0.15	0.0225
11	7.89	7.79	0.10	0.0100
12	8.09	7.84	0.25	0.0625
13	7.89	7.89		
14	8.54	8.07	0.47	0.2209
15	7.84	7.97	-0.13	0.0169
16	7.49	7.57	-0.08	0.0064
17	7.89	7.92	-0.03	0.0009
18	7.79	7.97	-0.18	0.0324
19	7.84	8.17	-0.33	0.1089
20	8.89	8.67	0.22	0.0484
21	8.54	8.07	0.47	0.2209
22	8.04	7.97	0.07	0.0049
23	8.59	8.62	-0.03	0.0009
24	8.19	7.92	0.27	0.0729
25	8.59	7.97	0.62	0.3844
योग	205.50	200.66	4.84	3.1938

बॉकडे पॉल एल० हार्वि प्लॉट डिबिगॉनोसिस्ट, डिबीवन बॉक्स फूट एंड
बैजिटेबल क्रॉन्ड एंड डिबिगॉनोसिस्ट, ब्यूरो ऑफ प्लॉट इन्डस्ट्री, साप्ले एंड एग्रीकल्चरल
इन्जीनियरिंग, एग्रीकल्चरल रिसर्च एग्जिमिनिस्ट्रेसन, युनाइटेड स्टेट्स डिपार्टमेंट ऑफ
एग्रीकल्चर से।

$$\bar{X}_D = \frac{\Sigma D}{N} = \frac{4.84}{25} = 0.194 \text{ प्रतिशत}$$

$$\begin{aligned}\sigma_D &= \sqrt{\frac{\Sigma D^2}{N-1} - \frac{(\Sigma D)^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{3.1938}{24} - \frac{(4.84)^2}{25(24)}} \\ &= \sqrt{0.133075 - 0.039043} = \sqrt{0.094032}, \\ &= 0.307 \text{ प्रतिशत}\end{aligned}$$

$$\sigma_{1D} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{N}} = \frac{0.307}{\sqrt{25}} = 0.061 \text{ प्रतिशत।}$$

सारणी 24.2 के आंकड़ों में 25 अमूर फलों के छायांकृत और चित्रित आधे भागों में घनों की प्रतिशतताओं को दिखाया गया है। यहाँ यह स्पष्ट है कि आंकड़ों के दो समुच्चय स्वतंत्र नहीं हैं, वे स्वाभाविक रूप में युग्मित हैं। अमूर फल संख्या 1 के छायांकृत पक्ष में 8.59 प्रतिशत घन थे जबकि उसी अमूर फल के चित्रित पक्ष में 8.49 प्रतिशत घन थे। स्वाभाविक रूप में वे दोनों आँकड़े एक दूसरे के साथ युग्मित हैं क्योंकि वे उसी एक फल की ओर संकेत करते हैं। अन्य 24 अमूर फलों के आंकड़ों के विषय में भी यही बात सत्य है।

छायांकृत तथा चित्रित आधे भागों के माध्यों के बीच अन्तर की सार्थकता का परीक्षण करने के लिये, हम मूल्यों के प्रत्येक युग्म के बीच अन्तर D को प्राप्त करते हैं, \bar{X}_D के मूल्य का निर्धारण करते हैं, और इस बात का निश्चय करने हैं कि क्या \bar{X}_D , 0 से मापक रूप में भिन्न है। निराकरण योग्य परिकल्पना यह है कि \bar{X}_D मूल्य के माध्य वाले अन्तरों की समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य है। सारणी 24.2 के नीचे परिकलनों को दिखाया गया है जिनसे प्राप्त होता है

$$\bar{X}_D = 0.194 \text{ प्रतिशत,}$$

$$\sigma_D = 0.307 \text{ प्रतिशत और}$$

$$\sigma_{1D} = 0.061 \text{ प्रतिशत।}$$

तब हम t के मूल्य का निर्धारण करते हैं,

$$t = \frac{\bar{X}_D - 0}{\sigma_{1D}} = \frac{0.194 - 0}{0.061} = 3.18$$

क्योंकि 24 स्वतंत्र D मूल्य हैं, अतः $n=24$, और परिणित भ. का सदस्य यह दर्शाता है कि P , 0.01 और 0.001 के बीच है।

यह बहुत महत्वपूर्ण है कि इस प्रकार की समस्या में, जैसी कि यह है, दो प्रतिदर्शों के बीच स्वतंत्रता के अभाव को पहचानना चाहिये। यदि हम सामान्य प्रविधि का अनुसरण करते तो $\bar{X}_1 = 8.22$ प्रतिशत, $\bar{X}_2 = 8.11$ प्रतिशत, और $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 0.092$ प्रतिशत का परिकलन करते हुए, प्रतिदर्शों को स्वतंत्र मानती है, तो हम

$$t = \frac{8.22 - 8.03}{0.092} = \frac{0.19}{0.092} = 2.07$$

प्राप्त कर लेते, जिसमें, $n=48$ के लिये, $0.025 < P < 0.05$ है। प्रथम प्राप्त सभाव्यता से यह सभाव्यता अत्यधिक भिन्न है। वास्तव में, यदि कोई व्यक्ति 0.02 या 0.01 स्तर का सार्थकता की कसोटों के रूप में प्रयोग करता तो दो प्रतिदर्शों की स्वतन्त्रता की पूर्व-धारणा करने वाली विधि उसे गलती से "सार्थक नहीं" इस निष्कर्ष पर ले जाती।

जब दो प्रतिदर्शों की स्वतन्त्रता की पूर्वधारणा वाली विधि का प्रयोग किया जाता है जब कि वे वास्तव में स्वतन्त्र नहीं होते, तो सम्भव परिणामों की विकल्प रूप में $\hat{\sigma}_{\bar{X}D}$ लिखकर स्पष्ट किया जा सकता है,

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 \bar{X}_2} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1}^2 + \hat{\sigma}_{\bar{X}_2}^2 - 2r\hat{\sigma}_{\bar{X}_1}\hat{\sigma}_{\bar{X}_2}},$$

जब दो प्रतिदर्शों के मध्य सहसम्बन्ध r है। यदि सक्षिप्त रूप का, जो स्वातन्त्र्य की कल्पना करता है प्रयोग किया जाए

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1}^2 + \hat{\sigma}_{\bar{X}_2}^2}$$

तो यदि आँकड़ों के दो समुच्चयों के बीच सहसम्बन्ध घनात्मक हो तो $\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 \bar{X}_2}$ का मूल्य बहुत अधिक होगा और जब शून्यात्मक सहसम्बन्ध विद्यमान हो तो बहुत कम। स्वतन्त्रता के अभाव की उपेक्षा हमें सार्थक अन्तर की घोषणा करने में उस समय असफल कर देगी जब r घनात्मक है और अन्तर की सार्थकता की गलती से घोषणा करने को विवश करेगी जब r शून्यात्मक है। अधिकतर समस्याओं में जिनमें युग्म बनाना अन्तर्निहित है, सहसम्बन्ध घनात्मक होगा, परन्तु कभी कभी ऐसी स्थितियाँ आती हैं जिनमें सहसम्बन्ध शून्यात्मक होता है। किसी भी परिस्थिति में, जब अन्तर्निहित युग्म बनते हैं, तो दो श्रेणियों के बीच सहसम्बन्ध की विद्यमानता लगभग निश्चित होती है। संयोग सहसम्बन्ध से, जो $N_1 = N_2$ वाली दो श्रेणियों के बीच दृष्टिगोचर हो जाए और जिस स्वतन्त्र समझा जाता है, हमारा कोई सम्बन्ध नहीं है।

उपसंहार

इस अध्याय में "दीर्घ-संख्या विधियों" और "अल्प-संख्या विधियों" में अन्तर करने का कोई प्रयास नहीं किया गया है। कारण यह है कि जब α ज्ञात हो तो छोटे या बड़े किसी भी आकार के प्रतिदर्शों के लिये प्रसामान्य वक्र उपयुक्त है। जब α का पता नहीं हो, और इसके स्थान पर जब $\hat{\sigma}$ का प्रयोग किया जाए, तब t वटन ("अल्प-संख्या विधि") संबंधा उचित प्रयोज्य वटन है। जैसे-जैसे n में वृद्धि होती है, t वटन प्रसामान्य वक्र के निकट पहुँचता है ताकि दीर्घ प्रतिदर्शों के लिये कई बार प्रसामान्य वटन का प्रयोग किया जाता है। तो भी, जब n दीर्घ भी हो, तो प्रसामान्य वक्र एक सन्निकटन होता है। कई बार जब प्रतिदर्श दीर्घ हो तो α के आकलन के रूप में $\hat{\sigma}$ की अपेक्षा s का प्रयोग किया जाता है। दीर्घ प्रतिदर्शों के लिये s तथा $\hat{\sigma}$ के बीच सख्त तमक अन्तर मामूली-सा है, परन्तु n के आकलन के तौर पर s का प्रयोग नहीं करना चाहिये।

बयोक इस अध्याय में वर्णित विधियाँ लघु प्रतिदर्शों पर एकदम उतनी ही लागू होती हैं जितनी कि दीर्घ प्रतिदर्शों पर, अतः प्रश्न उत्पन्न हो सकता है दीर्घ प्रतिदर्शों का

20 दोनों रूप पूर्णरूपेण समान हैं, परन्तु r वाले व्यंजक में कहीं अधिक परिकलन की आवश्यकता होती है। अग्राकलन आँकड़ों के लिए, $r = +0.577$, $\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 0.061$ का प्रयोग करके, जो $\hat{\sigma}_{\bar{X}D}$ के मूल्य से महत्व है।

प्रयोग करने का कष्ट क्यों करें ? उत्तर यह है कि जब दीर्घ प्रतिदर्शों का प्रयोग किया जाता तो एक निदिष्ट सम्भाव्यता स्तर पर सार्थकता प्राप्त करने के लिए लघुतर प्रेक्षित अन्तर $\bar{X}-\bar{Y}_g$ या $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ आवश्यक होता है। यह सत्य है, (1) क्योंकि प्रतिदर्श आकार में वृद्धि के साथ-साथ $\sigma_{\bar{X}}$ (अथवा $\sigma_{\bar{X}_1}$) तथा $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ में कम होने की प्रवृत्ति होती है, जबकि $\bar{X}-\bar{Y}_g$ और $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ की कम होने की अनुरूप प्रवृत्ति नहीं होती, क्योंकि उनमें या तो वृद्धि हो सकती है या कमी, और, (2) क्योंकि निदिष्ट सम्भाव्यता स्तर के लिये आवश्यक t मूल्य में तब कमी आती है जब n में वृद्धि होती है। कई बार लघु प्रतिदर्शों का प्रयोग करने के परिणामस्वरूप कोई व्यक्ति इस परिणाम पर पहुँच सकता है कि प्रेक्षित अन्तर माध्यक नहीं है, जब, यदि दीर्घ प्रतिदर्शों का प्रयोग किया गया होता तो अन्तर (जो कि सम्भवतः स्वयं बदल जाता) सार्थक हुमा होता।

इस अध्याय में वर्णित परीक्षणों में यह निश्चय करने का काम किया गया है कि सांख्यिकीय अन्तर उपस्थित थे या नहीं। उस पर ध्यान देना उपयोगी है कि सांख्यिकीय अन्तरो के विपरीत, जातीय अन्तर विद्यमान हो सकते हैं, और जब जातीय अन्तर विद्यमान है तब सांख्यिकीय अन्तर उपस्थित हो भी सकता है और नहीं भी। जातीय अन्तर प्रकारगत वास्तविक अन्तर होता है और उदाहरणार्थ, पुरुषों और स्त्रियों, विभिन्न प्रकार की लकड़ी के रेशपथ जोड़ों या विभिन्न प्रक्रियाओं द्वारा सुरक्षित या ताँवा अथवा जस्ती स्टील की छनो की कीमों का हवाला दे सकता है। इस अध्याय में पहले निदिष्ट, सरचना स्टील के उत्पादन बिन्दुआ के परीक्षण उस अवस्था के उदाहरण हैं जहाँ कि जातीय अन्तर तथा सांख्यिकीय अन्तर दोनों विद्यमान थे; स्रोत 1 से प्राप्त इस्पात, स्रोत 2 से प्राप्त इस्पात की अपेक्षा हल्का-भार पदार्थ था। यदि खरबोशों के समूह तथा गिनी सुन्नरो के समूह के प्रतिक्रिया समयों के परीक्षण किये जाते तो यह बिल्कुल सम्भव है कि प्रतिक्रिया समयों में सांख्यिकीय रूप से सार्थक अन्तर विद्यमान न होता, चाहे दोनों समूह जातीय तौर से भिन्न हैं।

25

सांख्यिकीय सार्थकता II :

अनुपात तथा कार्ईवर्ग परीक्षण

इस अध्याय में हम यादृच्छिक प्रतिदर्शों द्वारा प्राप्त अनुपातों से सम्बन्ध रखने वाले सार्थकता परीक्षणों पर विचार करेंगे हम कार्ईवर्ग (chi square) परीक्षण के कुछ विशेष पहलुओं की ओर भी ध्यान देंगे। एक ही अध्याय में इन दोनों विषयों को मिलान का कारण यह है कि X^2 परीक्षण तथा अनुपातों से सम्बन्ध रखने वाले सन्निकट परीक्षण सर्वसम परिणामों पर पहुँचने की वैकल्पिक विधियाँ हैं। यह बात इस अध्याय के दूसरे भाग में स्पष्ट होगी।

भाग 1 अनुपात

यादृच्छिक प्रतिदर्शों से प्राप्त अनुपातों से सम्बन्ध रखने वाले विचार-विमर्श के निम्न विषय होंगे पहला, प्रतिदर्श अनुपात (p) तथा समष्टि में अनुपात (π) के बीच अन्तर की सार्थकता जबकि समष्टि में अनुपात ज्ञात है, दूसरे, π की विश्वास्यता सीमाएँ जबकि केवल p तथा N ज्ञात हैं, तथा अन्तिम, दो यादृच्छिक प्रतिदर्शों (p_1 तथा p_2) के अनुपातों के बीच अन्तर की सार्थकता।

p तथा π में अन्तर की सार्थकता

यथातथ परीक्षण, $\pi=0.50$ —सगमरमर के एक बड़े सव्यूहन (assortment) में आधे कान्ने हैं तथा आधे मफेद। सगमरमर रंग के मिवाय किसी भी अन्य बात में एक दूसरे से भिन्न नहीं है। काले सगमरमर को “घटना” (occurrence) तथा सफेद सगमरमर को “अ-घटना” (non-occurrence) (अर्थात् काले की अ-घटना) मान कर और समष्टि में अ-घटनाओं के अनुपात¹ को सूचित करने के लिए π का तथा घटनाओं के अनुपात को सूचित करने के लिए τ का प्रयोग करके, हम प्राप्त करते हैं $\pi=0.50$ तथा $\tau=0.50$ । कल्पना कीजिये कि 10 सगमरमरों का एक प्रतिदर्श प्रस्तुत किया गया है, जिसमें 9 काले सगमरमर हैं। तब हमारे पास घटनाओं की संख्या, $a=9$, अ-घटनाओं की

1 जब किसी समष्टि में घटनाओं की संख्या (α) तथा अ-घटनाओं की संख्या (β) ज्ञात है तो

$$\pi = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \text{ तथा } \tau = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

इनसे यह स्पष्ट है कि $\pi + \tau = 1.0$ तथा $\tau = 1 - \pi$ ।

सख्या, $b=1$; घटनाओं का अनुपात, $p=0.90$, अ-घटनाओं का अनुपात, $q=0.10$ है। ध्यान दीजिए कि

$$p = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{N}, \quad q = \frac{b}{a+b} = \frac{b}{N},$$

$$p+q=1.0$$

$P=0.05$ को कसौटी के रूप में प्रयोग करके हमें उस प्रमेय की परीक्षा करनी चाहिये कि प्रतिदर्श उस समष्टि से यादृच्छिक है जिसका $\pi=0.50$ व्यंजक

$$(\pi B + \pi A)^{10}$$

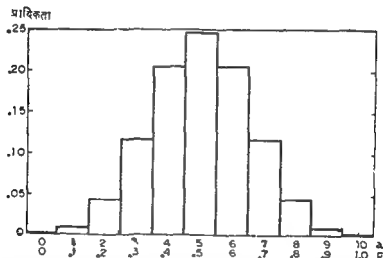
में A तथा B , जिनका कोई आँकिक मान नहीं है, क्रमशः घटना तथा अ-घटना को सूचित करने के काम में लाये गये हैं। इस व्यंजक के अनुसार $N=10$ के प्रतिदर्शों में a बराबर हो सकता है 0, 1, 2, ..., 10 के तथा $\pi=0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ के। क्योंकि $\pi=0.50$ तथा $\pi=0.50$,

$$\begin{aligned} (-B + -A)^{10} &= (0.50B + 0.50A)^{10}, \\ &= (0.50B)^{10} + 10(0.50B)^9(0.50A) \\ &\quad + 45(0.50B)^8(0.50A)^2 + 120(0.50B)^7(0.50A)^3 \\ &\quad + 210(0.50B)^6(0.50A)^4 + 252(0.50B)^5(0.50A)^5 \\ &\quad + 210(0.50B)^4(0.50A)^6 + 120(0.50B)^3(0.50A)^7 \\ &\quad + 45(0.50B)^2(0.50A)^8 + 10(0.50B)(0.50A)^9 \\ &\quad + (0.50A)^{10} \end{aligned}$$

निर्दिष्ट परिकलनों को पूरा करने तथा परिणामों को स्तम्भाकार रूप में रखने से हमें निम्न प्राप्त होता है

काले गोलों की घटनाओं की संख्या	काले गोलों की घटनाओं का अनुपात	प्राथमिक
a	p	
0	0	0.0010
1	0.1	0.0098
2	0.2	0.0439
3	0.3	0.1172
4	0.4	0.2051
5	0.5	0.2461
6	0.6	0.2051
7	0.7	0.1172
8	0.8	0.0439
9	0.9	0.0098
10	1.0	0.0010
		<hr/> 1.0000

पूर्ववर्ती वर्णन से यह प्रतीत होता है कि 9 या 10 काले सगमरमर वाले) यादृच्छिक प्रतिदर्शों को प्राप्त करने की प्रायिकता 0 0098 + 0 0010 = 0 0108 है। यह चार्ट 25 1 में बिल्कुल दायी ओर दो दृष्टिकोणों द्वारा प्रकट किया गया है। क्योंकि हमारे पास यह विश्वास करने का कोई कारण नहीं है कि प्रतिदर्शों में हमेशा, समष्टि के अनुपात की अपेक्षा, काले सगमरमर का बड़ा अनुपात होगा, इसलिए हम ऐसे ही एक या शून्य काले गोले की प्रायिकता पर विचार करते हैं जो भी 0 0108 है और जो चार्ट 2 1 में बिल्कुल बायीं ओर दो दृष्टिकोणों द्वारा प्रकट की गई है। इसलिए 9 या अधिक तथा



चार्ट 25 1 10 के प्रतिदर्शों में a तथा p के मानों की घटनाओं की प्रायिकता जब $\pi = 0.50$ । $(0.50 + 0.50A)^{10} = 0.0010B^{10} + 0.0098B^9A + 0.0439B^8A^2 + 0.1172B^7A^3 + 0.2051B^6A^4 + 0.2461B^5A^5 + 0.2051B^4A^6 + 0.1172B^3A^7 + 0.0439B^2A^8 + 0.0098BA^9 + 0.0010A^{10}$ के प्रसार से प्राप्त।

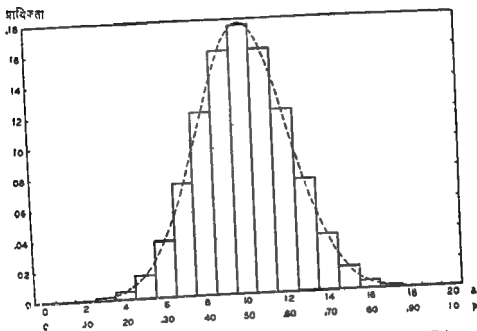
1 या कम काले सगमरमरों की प्रायिकता 0 0216 है। हम 0 05 की कसौटी को प्रयोग में लाकर इस प्रमेय को अस्वीकृत करते हैं कि प्रतिदर्श उन समष्टि से यादृच्छिक था, जिसका $\pi = 0.50$ है। स्मरण रखिए कि इस कसौटी के आधारपर, हमारे पाँच प्रतिशत निष्कर्षों में प्रथम प्रकार की त्रुटियाँ होती।

यदि हम 0 01 को अपनी कसौटी के रूप में काम में ला रहे होते, तो हमें अपनी परिकल्पना को अस्वीकृत करना पड़ता। यदि हम 0 01 को अपनी कसौटी के रूप में काम में ला रहे होते और हमारा सम्बन्ध उन प्रतिदर्शों से होता जिनमें 10 (या शून्य) काले गोले होते, तो प्रायिकता 0 0020 होती और हम परिकल्पना को अस्वीकृत कर देते।

सन्निकट परीक्षण, $\pi = 0.50$ —इस बात की ओर पहले ही निर्देश किया जा चुका है (देखिए पृष्ठ 523-527) कि द्विपद की सीमा प्रसामान्य वक्र है जैसे ही द्विपद की घात अनन्तता तक पहुँचती है। व्यावहारिक प्रयोजन के लिए, प्रसामान्य वक्र को द्विपद।

$$(0.50B + 0.50A)^N,$$

का प्रायः पर्याप्त अच्छा विवरण समझा जाता है, जब $N \geq 20$ । चार्ट 25.2 में एक प्रसामान्य वक्र दिखाया है जो $(0.50B + 0.50A)^{10}$ के साथ ग्रासजित है। जैसा हम बाद में देखेंगे, प्रसामान्य वक्र द्वारा द्विपद का प्रत्यक्ष रूप में अच्छा वर्णन इस बात की गारंटी नहीं है कि प्रसामान्य वक्र के प्रयोग में जो प्रक्रिया अन्तर्निहित है, उसका वही परिणाम निकलेगा जो द्विपद का।



चार्ट 25.2. के साथ $(0.50B + 0.50A)^{10}$ ग्रासजित प्रसामान्य वक्र।

यदि द्विपद के लिए प्रसामान्य वक्र प्रतिस्थापित किया जा सकता है तो हम प्रतिदर्श प्रतिशतता σ_p के मानक विचलन का परिकलन कर सकते हैं,

$$\frac{\sigma}{\sigma_p} = \frac{p - \pi}{\sigma_p}$$

का मान निश्चिन कर सकते हैं तथा अध्याय 24 के समान $\bar{X} - \bar{X}_0$ का परीक्षण प्रारम्भ कर सकते हैं जब σ ज्ञात हो। यदि हमारे पास बड़ी संख्या में प्रतिदर्श अनुपात $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k)$ होते, जो सभी एक ही समष्टि में यादृच्छिक प्रतिदर्शों से होते, तो हम

$$\sqrt{\frac{(p_1 - \pi)^2 + (p_2 - \pi)^2 + \dots + (p_k - \pi)^2}{k}}$$

से उन अनुपाता के मानक विचरण का परिकलन कर सकते थे। इस प्रकार के p मानों का बड़ी संख्या में होना बहुत असाधारण है किन्तु यह दर्शाया² जा सकता है कि जब π ज्ञात हो, तो यादृच्छिक प्रतिदर्शों से p की मानक त्रुटि

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{N}}$$

है। इसके वैकल्पिक रूप निम्न है, जो कभी कभी उपयोगी होता है

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{N}} = \sqrt{\frac{\pi - \pi^2}{N}}$$

प्राइए हम देखें कि सन्निकट परीक्षण हमें उसी परिणाम पर पहुँचाता है या नहीं जिस पर हम सगमरमरो के यथानय परीक्षण न पहुँचाया था, जिसमें $\pi = 0.50$, $a = 9$, $p = 0.90$ तथा $N = 10$ था। पहले हम

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{(0.50)(0.50)}{10}} = 0.158$$

का परिकलन करते हैं और तब

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{p - \pi}{\sigma_p} = \frac{0.90 - 0.50}{0.158} = \frac{0.40}{0.158} = 2.53$$

परिगणित ज से, जो प्रामाण्य वक्र के दो गिरो में क्षेत्रों को दर्शाता है, हमें पता चलता है कि $P = 0.014$ यद्यपि P का यह मान, द्विपद के प्रयोग द्वारा प्राप्त 0.0216 के मान को अपेक्षा कम है तो भी हमारा परिणाम वही है यदि हमारी कसौटी 0.05 है, तो परिकल्पना अस्वीकृत हो जाती है। तो भी यह ध्यान दें कि यदि 0.02 को कसौटी के रूप में काम में लाया जाता तो यथातथ विधि हमें परिकल्पना को स्वीकृत करने के लिए कहती, जबकि सन्निकट प्रविधि यह बतलाती है कि परिकल्पना को अस्वीकृत करना चाहिए।

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{a - \pi N}{\sigma_a}$$

को प्रयोग में लाकर a तथा πN में (प्रतिदर्श में घटनाओं की संख्या यदि प्रतिदर्श में घटनाओं का वही अनुपात था जो समष्टि में था) अन्तर की साधकता के परीक्षण में सन्निकट परीक्षण का एक उपयोगी वैकल्पिक रूप सम्मिलित है जहाँ³ $\sigma_a = \sqrt{N\pi(1-\pi)}$ । हमारी समस्या के लिए

$$\sigma_a = \sqrt{10(0.50)(0.50)} = 1.58,$$

$$\text{तथा} \quad \frac{x}{\sigma} = \frac{a - \pi N}{\sigma_a} = \frac{9 - (0.50)10}{1.58} = 2.53$$

2 परिगणित घ, परिच्छेद 25.1 देखिये।

3 σ_a के लिए व्यंजक के विकास के निमित्त, परिगणित घ, परिच्छेद 25.1 देखिए।

यह, नि सन्देह, वही $\frac{x}{\sigma}$ मान है जो हमें उम समय प्राप्त हुआ था, जब P तथा π की तुलना की गई थी। परिणाम भी वही है। परिकल्पना अस्वीकार की जाती है।

यद्यपि प्रसामान्य वक्र द्वारा बताया गई प्रायिकता अशुद्ध थी, तो भी मॉन्टेकरी परीक्षण से हम उम्मी परिणाम पर पहुँच गये, जिस पर यथावत् परीक्षण से पहुँचे थे—इस तथ्य में एक मनोरंजक प्रश्न उपस्थित होता है जब $\pi=0.50$, तो किन शर्तों के अन्तर्गत द्विपद के लिए प्रसामान्य वक्र का प्रतिस्थापन किया जाए और परिकल्पना के बारे में उम्मी परिणाम पर पहुँचा जाए? उत्तर निम्न बातों पर निर्भर करता है (1) प्रतिदर्श का परिमाण, तथा (2) उम मापकता की कमी जो काम में लायी जा रही है। क्योंकि प्रसामान्य वक्र के प्रयोग से प्राप्त प्रायिकता हमेशा बहुत कम होती है, जब $\pi=0.50$, तो $p = \pi - a$ (या $a = \pi - N$) परीक्षण का प्रयोग हम उम परिकल्पना को स्वीकृत नहीं करने देगा जिसे द्विपद ने हम अस्वीकृत करने के लिए कहा है। कभी-कभी $p = \pi$, या $a = \pi N$, परीक्षण उम परिकल्पना का अस्वीकृत करने का निर्देश करेगा, जिसे द्विपद का प्रयोग स्वीकार्य सिद्ध करेगा। उम स्थिति के बारे में विचार करें जब $\pi=0.50$, $N=60$, $a=38$ ($p=0.64$) और कमी $P=0.00$ । द्विपद को काम में लाने से यह पता चलता है कि $a \leq 22$ या $a \geq 38$ को प्राप्त करने की प्रायिकता 0.052 है और यह परिकल्पना (कि प्रतिदर्श उम मर्मण्ड से यादृच्छिक है जिसका $\pi=0.50$) स्वीकृत है। प्रसामान्य वक्र को काम में लाने पर, प्रायिकता 0.039 मिलती है, और उससे यह प्रदर्शित होता है कि परिकल्पना को अस्वीकार किया जाना चाहिए।

येट्स का शोधन—येट्स का उद्देश्य प्रसामान्य वक्र के प्रयोग से प्राप्त प्रायिकता को बढ़ाने के लिए प्रसामान्य वक्र पर हम शोधन को लागू करना था ताकि यह प्रायिकता द्विपद के प्रयोग से प्राप्त प्रायिकता के अधिक से अधिक अनुरूप हो। यदि येट्स के शोधन का अभी अभी बतलाये गये निदर्शन अधिको पर लागू किया जाए तो प्रायिकता 0.039 से बढ़ कर 0.053 हो जाती है और परिणाम वही रहता है।

‡ मूल पाठ में दिये गए विभिन्न निदर्शों में यह स्थिति दिखाई पड़ती। पाद-टिप्पणी 7 में उल्लिखित बदल में इसकी एक व्याख्या दी गई है।

5 प्रायिकता एच० जी० रोमिंग, 50—100 वायनोमियल टेबल्स, जिन विसी एंड सन्ज न्यूयार्क, 1953, की एक मारपी से प्राप्त की जा सकती है।

6 परिकल्पना है

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{a - \pi N}{\sigma_a} = \frac{38 - 30}{\sqrt{60(0.50)(0.50)}} = 2.066$$

परिचित z के सकेत द्वारा, P का मान 0.039 दिखाई दिया है।

7. इस मूल पाठ में येट्स के शोधन की व्यवस्था नहीं की गई है, क्योंकि (उन कारणों से जो पीछे स्पष्ट होंगे) इसके प्रयोग का सम्बन्ध नहीं किया गया है। येट्स के शोधन की एक व्याख्या एफ० ई० क्रॉस्टन, ऐन्निमेन्टरी स्टैटिस्टिक्स विद एप्लिकेशन्स इन मॅडिसिन एन्ड दि बायलाजिकल साइन्सिस, डावर प्रकाशन, इन्का०, न्यूयार्क, 1959, पृष्ठ 255—257, पर दी गई है।

जैसे कि मानो द्विपद का प्रयोग किया गया हो। तो भी यह ध्यान में रखिए कि येट्स के शोधन के प्रयोग ने अतिशोधन कर डाला है, अर्थात् प्रायिकता द्विपद में प्राप्त प्रायिकता की अपेक्षा अधिक बढ़ी है। यह महत्वपूर्ण है, क्योंकि येट्स के शोधन के साथ प्रसामान्य वक्र के प्रयोग का कभी-कभी यह परिणाम होगा कि उस परिकल्पना को स्वीकार कर लिया जायेगा जिसके बारे में द्विपद (तथा अशोधित सामान्य वक्र का प्रयोग¹) यह दर्शायेगा कि उसे अस्वीकृत किया जाना चाहिए। उदाहरणार्थ $\pi = 0.50$, $N = 25$, $a = 4$ ($p = 0.16$) तथा कसौटी $P = 0.001$ है। द्विपद का प्रयोग करने पर, $a \leq 4$ या $a \geq 21$ को प्राप्त करने की प्रायिकता 0.00091 पायी गई है। प्रसामान्य सन्निकटन से P का एक मान 0.0007 प्राप्त हुआ है। येट्स के शोधन का प्रयोग करने से P का यह मान बढ़ कर 0.00137 हो जाता है। दृग् सम्बन्ध में अशोधित प्रसामान्य सन्निकटन उस द्विपद के अनुरूप है, जिसमें यह संकेत होता है कि परिकल्पना को अस्वीकृत कर देना चाहिए। येट्स के शोधन का प्रयोग प्रायिकता को इस सीमा तक बढ़ा देता है कि परिकल्पना स्वीकार हो जाएगी।

यथातथ परीक्षण के लिए सारणी, जब $\pi = 0.50$ —अभी-अभी किए गए व्यापक परिकलनों तथा 0.05, 0.02, 0.01, तथा 0.001 स्तरों के संकेत से यह पता चलता है कि जबकि प्रसामान्य वक्र के प्रयोग से साधारणतया वही परिणाम निकलता है जो मानो, द्विपद के प्रयोग से निकला हो तो भी हमेशा ही हर तरह से यह अवस्था नहीं होती। इसके अतिरिक्त, येट्स के शोधन के प्रयोग से कभी-कभी इतना अधिक अतिशोधन हो जाता है कि परिकल्पना को स्वीकार करने का परिणाम द्विपद पर आधारित परिणाम से भिन्न होगा।

एक संभव हल सम्भवतः पाठक की सूझा हो। वह है, $a - \pi N$ परीक्षण येट्स के शोधन के साथ तथा उनके बिना किया जाए। जब दोनों प्रविधियों से एक ही परिणाम निकल, तो वह परिणाम वही होगा जो मानो द्विपद के प्रयोग से निकला हो। जैसा कि हम पहले ही जानते हैं, यह इसलिए सत्य है क्योंकि शोधन किए बिना $a - \pi N$ परीक्षण से जो P मान प्राप्त होता है वह द्विपद द्वारा प्राप्त मान की अपेक्षा छोटा होता है, जब कि येट्स के शोधन द्वारा $a - \pi N$ परीक्षण से जो P मान प्राप्त होता है वह द्विपद द्वारा प्राप्त मान की अपेक्षा बड़ा होता है। इस हल में यह कठिनाई है कि प्रायः परस्पर विरोधी परिणाम निकलते हैं।² दोनों प्रविधियों के जब कभी भिन्न परिणाम निकलते हैं, उस समय द्विपद का आश्रय लेना पड़ता है।

विकाराधीन प्रकार की समस्या के लिए, येट्स के शोधन में $\frac{|a - \pi N| - \frac{1}{2}}{\sigma_a}$ का परिकलन आता है, जहाँ 11 का अभिप्राय है, "निरपेक्ष मान को लीजिए," जो परिशिष्ट ज में देखा जाएगा। उपरिचिह्नित निदर्श के लिए

$$\frac{|a - \pi N| - \frac{1}{2}}{\sigma_a} = \frac{|38 - 30| - \frac{1}{2}}{\sqrt{60(0.50)(0.50)}} = 1.936$$

परिणिष्ट ज से, $P = 0.053$

8 एक और उदाहरण जब $P = 0.05$ को कसौटी के रूप में काम में लाया जाता है और $\pi = 0.50$, $N = 100$, तथा $a = 40$,

सारणी 25.1

N के निर्दिष्ट मानों के लिए चुने हुए निम्नलिखित तथा उपरलि प्रायिकता बिन्दुओं पर α के मान $\alpha=0.50$

इस सारणी के प्रयोग के सम्बन्ध में टिप्पणियाँ (1) निम्नलिखित प्रायिकता बिन्दु के लिए दिखाये हुए प्रत्येक α के मान की, तथा, इसी तरह, दिखाये हुए मान में छोटे सभी α मानों की निर्दिष्ट प्रायिकता है या कम, (2) उपरलि प्रायिकता बिन्दु के लिए दर्शाये हुए प्रत्येक α मान की तथा इसी प्रकार दिखाये हुए मान से बड़े सभी α मानों की निर्दिष्ट प्रायिकता है या कम।

N	$P \leq 0.15$		$P \leq 0.05$		$P \leq 0.01$		$P \leq 0.001$	
	नम्बर 0.025	उ-ब विन्दु	नम्बर 0.0	उ-ब विन्दु	नम्बर 0.005	उ-ब विन्दु	नम्बर 0.0005	उ-ब विन्दु
	विन्दु	विन्दु	विन्दु	विन्दु	विन्दु	विन्दु	विन्दु	विन्दु
7	0	0	0	7	0	8		
8	0	0	0	8	0	8		
9	1	9	0	10	0	10		
10	1	10	1	10	0	11	0	11
11	1	10	1	11	1	11	0	12
12	1	11	1	1	1	1	0	13
13	1	1	2	1	1	11	0	14
14	2	12	2	13		12	1	14
15	2	13	2	14	2	13	1	15
16	3	13	3	14	3	1	1	16
17	3	14	3	15	3	1	1	17
18	3	1	4	15	3	1		17
19	4	15	4	16	4	1	2	18
20	4	16	4	17	4	1	2	19
21	4	17	5	18	5	1	3	20
22	5	18	5	19	5	1	3	21
23	5	19	6	20	6	1	4	22
24	5	20	6	21	6	1	4	23
25	6	21	7	22	7	1	5	24
26	6	22	7	23	7	2	5	25
27	6	23	8	24	8	2	6	26
28	6	24	8	25	8	2	6	27
29	7	25	9	26	9	2	7	28
30	7	26	9	27	9	2	7	29
31	7	27	10	28	10	3	8	30
32	7	28	10	29	10	3	8	31
33	8	29	11	30	11	3		32
34	8	30	11	31	11	3		33
35	8	31	12	32	12	3		34
36	8	32	12	33	12	3		35
37	9	33	13	34	13	3		36
38	9	34	13	35	13	3		37
39	9	35	14	36	14	3		38
40	9	36	14	37	14	3		39
41	10	37	15	38	15	3		40
42	10	38	15	39	15	3		41
43	10	39	16	40	16	3		42
44	10	40	16	41	16	3		43
45	11	41	17	42	17	3		44
46	11	42	17	43	17	3		45
47	11	43	18	44	18	3		46
48	11	44	18	45	18	3		47
49	12	45	19	46	19	3		48
50	12	46	19	47	19	3		49
51	12	47	20	48	20	3		50
52	12	48	20	49	20	3		51
53	13	49	21	50	21	3		52
54	13	50	21	51	21	3		53
55	13	51	22	52	22	3		54
56	13	52	22	53	22	3		55
57	14	53	23	54	23	3		56
58	14	54	23	55	23	3		57
59	14	55	24	56	24	3		58
60	14	56	24	57	24	3		59
61	15	57	25	58	25	3		60
62	15	58	25	59	25	3		61
63	15	59	26	60	26	3		62
64	15	60	26	61	26	3		63
65	16	61	27	62	27	3		64
66	16	62	27	63	27	3		65
67	16	63	28	64	28	3		66
68	16	64	28	65	28	3		67
69	17	65	29	66	29	3		68
70	17	66	29	67	29	3		69
71	17	67	30	68	30	3		70
72	17	68	30	69	30	3		71
73	18	69	31	70	31	3		72
74	18	70	31	71	31	3		73
75	18	71	32	72	32	3		74
76	18	72	32	73	32	3		75
77	19	73	33	74	33	3		76
78	19	74	33	75	33	3		77
79	19	75	34	76	34	3		78
80	19	76	34	77	34	3		79
81	20	77	35	78	35	3		80
82	20	78	35	79	35	3		81
83	20	79	36	80	36	3		82
84	20	80	36	81	36	3		83
85	21	81	37	82	37	3		84
86	21	82	37	83	37	3		85
87	21	83	38	84	38	3		86
88	21	84	38	85	38	3		87
89	22	85	39	86	39	3		88
90	22	86	39	87	39	3		89
91	22	87	40	88	40	3		90
92	22	88	40	89	40	3		91
93	23	89	41	90	41	3		92
94	23	90	41	91	41	3		93
95	23	91	42	92	42	3		94
96	23	92	42	93	42	3		95
97	24	93	43	94	43	3		96
98	24	94	43	95	43	3		97
99	24	95	44	96	44	3		98
100	24	96	44	97	44	3		99

सबसे अच्छा समाधान जहाँ भी सम्भव हो द्विपद को काम में लाना है। पहले बताया हुई प्रविधियों का अनुसरण करने पर द्विपदों का लगभग $N=20$ या 30 तक प्रसार करना कठिन नहीं है। किन्तु उनमें पर प्रसार बहुत विस्तृत हो जाता है। आवश्यक ऐसी पुस्तक उत्पन्न हैं जिनमें कोई भी व्यक्ति (1) $N=2$ से $N=49$ तक के लिए एक एक के अन्तर से तथा (2) $V=50$ से $N=100$ तक के लिए पाँच पाँच के अन्तर से द्विपदों की मदों के मानों का पढ़ सकता है। 0.50 को छोड़कर - के अर्थ मान दिए हुए हैं, किन्तु इस समय अपने विचार विमर्श में हम केवल 0.50 में रुक रहे हैं। इन सारणियों का आधार पर सारणी 25.1 बनायी गई है जो प्रायिकता के विभिन्न विद्युत्ता पर तथा N के कुछ चयित मानों के लिए a का मान दर्शाती है। जब इस प्रकार की सारणी उपलब्ध है तो किसी भी व्यक्ति का द्विपद के प्रसार के परिश्रम से बचने के लिए, टेबल के शोधन में शोधित या अज्ञात किसी भी प्रकार के प्रमाणात्मक वक्र के प्रधान की आवश्यकता नहीं। न ही द्विपद के प्रसार की आवश्यकता है क्योंकि सारणी 25.1 से इस प्रकार के प्रसारों के परिणाम प्राप्त हो जाते हैं।

उन प्रतिज्ञाओं के लिए जिनमें $N > 100$ प्रमाणात्मक सन्निकटन को तब तक काम में लाना पड़ता जब तक कि कोई ऐसा संगठन जिसमें परिकल्पना की व्यापक सुविधाएँ प्राप्त हैं। द्विपदों की प्रसारित सारणियों के प्राप्त कराने का प्रयत्न नहीं करता।

प्रकारण परीक्षण - 0.50—मिचरेट को एक कम्पनी में एक जाच के परिणामों को छपा। इस जाच में नाक तथा गले की चिकित्सा में विशेषज्ञता प्राप्त चिकित्सकों द्वारा उन कम्पनी के तथा उस कम्पनी के दूसरे तीन प्रतियोगियों के उत्पादों पर निष्पक्ष किया गया था। आठ डाक्टरों में से चार ने कम्पनी की मिचरेट को अच्छा बताया जिसे हम छाप मख्या 1 कहेंगे दो में से 2 को अधिक अच्छा बताया। 3 को किसी में अच्छा नहीं बताया दो में से 4 का अधिक अच्छा बताया। चारों छपा के बीच यदि कोई भेद न होता तो प्रत्येक के चयन का समान अवसर होता जिससे कि छाप मख्या 1 के अधिक अच्छा बताए जाने की प्रायिकता 0.25 होती। - 0.25 प्रबन्ध

$$(0.75B + 0.25A)^8$$

9 है (1) नेसनल थ्रॉट और स्टैटस टबल्ले ग्राफ दि वायनोमियल प्रावविनिटी डिस्टि ब्यूशन बाबिगट 1949 तथा (2) एच. जी. रोमिन् 50—100 वायनोमियल टबल्ले ज्ञान विली एन मरठ मूपाक 1953। इन सदनों में प्रबन्ध करने इन मूल पाठ में प्रयुक्त नवेंदों से भिन्न हैं। दुत्पाक निम्न है

मूल पाठ	मदय (1)	संय (2)
a	r	λ
N	n	n
τ	p	p

पाठकों का यह याद रखने की प्रेरणा दी जाती है कि जब वह 1 में से सच्ची प्रायिकता छटा पर प्रायिकताओं के उन सचयनों को उत्तर रहा हो जो इन सदनों में दिए गए हैं तो उसे (1) सारणीयत a मान में से एक कम करना चाहिए जब मूल अवयव या अधिक प्रकार का हो जता कि म्यूट्रो जॉफ स्टैटस वास्तव में है और (2) सारणीयत a मान में एक बढ़ाना चाहिए जब मूल अवयव या कम प्रकार का हो जता कि रोमिन् की पुस्तक में है।

व्यंजक के उन पदों का मान निकालना चाहते हैं जिनमें A^1, A^2, A^6, A^7 , तथा A^8 सम्मिलित हैं। पहले की तरह, A एक घटना को सूचित करता है, इस उदाहरण में यह घटना है छाप सख्या 1 का अधिक अच्छा माना जाना, और B सूचित करता है एक अ-घटना को।

सारणी 25 2 द्विपद के नौ पदों में से प्रत्येक की प्रायिकता दर्शाती है। अन्तिम पाँच पदों की प्रायिकताओं का योग 0.1138 है, जो छाप सख्या 1 के लिए चार या अधिक प्रशंसात्मक कथनों को प्राप्त करने की प्रायिकता है, यदि चारों छाप वास्तव में समान हैं। यह स्पष्ट है कि छाप सख्या 1 को सार्थक रूप में डाक्टरों के एक-चौथाई मतों से अधिक नहीं मिले। यदि प्रतिद्वंद्वी का परिमाण बड़ा होता, तो छाप सं० 1 के पक्ष में महत्वपूर्ण भेद दृष्टा होता। ऐसा हान पर भी इस बात में विश्वास करने का कोई कारण नहीं है कि यदि N बड़ा होता तो p फिर भी 0.50 ही होता।

सारणी 25 2

$(0.75B + 0.25A)^n$ व्यंजक के प्रत्येक पद की प्रायिकता

a घटनाओं का सख्या (छाप # 1 अधिमान्यता देने वाली सख्या)	p घटनाओं का अनुपात (छाप # 1 को अधि- मान्यता देने वाला अनुपात)	व्यंजक	प्रायिकता
0	0	$(0.75B)^8$	0.1001
1	0.125	$8(0.75B)^7(0.25A)$	0.2670
2	0.250	$28(0.75B)^6(0.25A)^2$	0.3115
3	0.375	$56(0.75B)^5(0.25A)^3$	0.2076
4	0.500	$70(0.75B)^4(0.25A)^4$	0.0865
5	0.625	$56(0.75B)^3(0.25A)^5$	0.0231
6	0.750	$28(0.75B)^2(0.25A)^6$	0.0038
7	0.875	$8(0.75B)(0.25A)^7$	0.0004
8	1.000	$(0.25A)^8$	0.0000
योग			1.0000

इस बात को ध्यान में रखें कि पूर्ववर्ती विचार विमर्श में हमने द्विपद के केवल उन अन्तिम पाँच पदों पर विचार किया जिनके लिए पद थे $P - \pi \geq 0.25$ हमने उस पहले पद को उपेक्षा की जो केवल अकेला है जिसके लिए $P - \pi \geq -0.25$ है। ऐसी एक-पक्षीय परीक्षा का कारण यह है कि इस बात को जानने में हमारी दिलचस्पी थी कि क्या छाप सं० 1 के सम्बन्ध में दी गई अधिमान्यताएँ सार्थक रूप में $\pi = 0.25$ से अधिक हैं।

सन्निकट परीक्षण $\pi \neq 0.50$ —जब अरबी घोड़ा की एक घुड़माल में लेखक को बताया गया “सारी की सारी 30 घोड़ियों के इस ऋतु में बछेड़े हुए। यह बात प्रमादधारण है, क्योंकि एक ऋतु में साधारणतया केवल 70 में 80 प्रतिशत तक घोड़ियों के बछेड़े होते हैं।” अब क्योंकि $N=30$, $a=30$, $P=1.0$ और यदि π को 0.75 मान लिया

जाए, तो हम यह कह सकते हैं कि यह घटना कितनी असामान्य थी। हमें केवल उस पद का मान मालूम करना है जो पद व्यंजक

$$(0.25B + 0.75A)^{30}$$

में A^{30} को सम्मिलित किए हुए है। इस व्यंजक में, पहले की तरह, A एक घटना (बछेड़े का जन्म) है और B घ-घटना। इस पद की प्रायिकता 0.00018 है, या 10 000 में लगभग 2, और वास्तव में प्रति आश्विनजनक घटना है। घुडसाल के स्वामी ने इस आश्विनजनक उत्पादन शक्ति का कोई कारण नहीं बताया, किन्तु कोई भी व्यक्ति इस परिकल्पना को अस्वीकृत करने में युक्तिमय रहेगा कि 10 का प्रेक्षित p ममण्टि से लिए यादृच्छिक प्रतिदर्श पर आधारित था जिसे उसके भूतकालीन अनुभव के आधार पर प्रस्तुत किया गया था। यह बात फिर ध्यान में रखे कि हमने एक पक्षीय परीक्षण किया है, क्योंकि हम जानना चाहते थे कि क्या $p=1.0$ सार्थक रूप में $\tau=0.75$ से अधिक है।

आमो हम देखें कि क्या प्रसामान्य वक्र को विपमिनि द्विपद के स्थान पर काम में लाया जा सकता है। क्योंकि $N=30$, इसलिए प्रतिदर्श पर्याप्त बड़ा है। तथापि $\pi=0.75$ है न कि 0.50, जैसा कि पहले था जब प्रसामान्य वक्र काम में लाया गया था। हम परिकलन करते हैं

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\tau - \pi}{N}} = \sqrt{\frac{(0.75)(0.25)}{30}} = 0.079$$

तथा

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{p - \tau}{\sigma_p} = \frac{1.00 - 0.75}{0.079} = 3.16$$

परिशिष्ट छ से पता चलता है कि $\frac{x}{\sigma} = 3.16$ का मान, एक मिरे में, प्रत वक्र में से 0.00097 से कम किन्तु 0.00069 से अधिक क्षेत्र को काटता है। इस सन्निकट प्रक्रिया से जो प्रायिकता प्राप्त होती है वह उस प्रायिकता से बहुत बड़ी है जो यथातथ प्रक्रिया से प्राप्त होती है, किन्तु p के बारे में हमारा परिणाम वही है। यह बात हमें एक प्रश्न उठाने के लिये प्रेरित करती है जो वैसा ही है जैसा पहले उठाया गया था : जब $\pi \neq 0.50$, तो कितने अवस्थाओं में प्रसामान्य वक्र द्विपद के स्थान पर काम में लाया जा सकता है और परिकल्पना के बारे में वही परिमाण प्राप्त किया जा सकता है? समस्या अब ज्यादा जटिल है, क्योंकि उत्तर निम्न बातों पर आधारित है (1) π का मान, (2) प्रतिदर्श का परिमाण, और (3) सार्थकता की कसौटी जो काम में लाई गई। हमारे उद्देश्यों के लिए यह ध्यान देना पर्याप्त होगा, प्रथम, कि किसी प्रदत्त N के लिए जब $\pi=0.50$ उस समय की अपेक्षा, जब $\pi \neq 0.50$, प्रसामान्य वक्र द्विपद के कम सन्तोषजनक सन्निकट है। वास्तव में जब $\pi \neq 0.50$ है, तब प्रसामान्य वक्र के प्रयोग से कभी ऐसी प्रायिकता मिलेगी जो बहुत छोटी है और कभी ऐसी जो बहुत बड़ी। दूसरे, वेल्स का शोधन कोई सहायता नहीं दे सकता, क्योंकि इसका उद्देश्य वे स्थितियाँ नहीं हैं जिनमें $\pi \neq 0.50$ ।

यथातथ परीक्षण के लिए सारणियाँ जब $\pi \neq 0.50$ —जिन स्थितियों में $\pi \neq 0.50$, उनमें हमें सारणी 25.1 जैसी मार्गगुयी की एक एसी श्रेणी की आवश्यकता है जिसमें में प्रत्येक π के भिन्न-भिन्न मान से सम्बन्ध रखती हो। एक प्रारम्भिक पाठ के लिए यह कार्य बहुत बड़ा है, और किसी भी स्थिति में, विपणित द्विपदों के पदों के मान पाद-टिप्पणी 9 में उद्धृत दो सदस्यों से प्राप्त किए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए, सारणी 25.3 तैयार की गई है, जो विभिन्न परिमाणों के प्रतिदर्शों के प्रायिकता बिन्दुओं के विषय में है, जब $\pi = 0.20$ या $\pi = 0.80$

π की विश्वास्यता सीमाएँ

कभी कभी p का मान ज्ञान होना है, किन्तु π ज्ञात नहीं होता, और उन सीमाओं को बतलाना महत्वपूर्ण होता है जिनमें π क घटित होने की आशा की जा सकती है। जैसाकि हम X की विश्वास्यता सीमाओं पर विचार-विमर्श करते हुए देख चुके हैं, हम पहले यह निर्णय करना चाहिए कि हम कौनसी विश्वास्यता सीमाओं को चाहते हैं। निश्चय ही हम प्रतिदर्श के उस परिमाण को भी अवश्य जानना चाहिए जिससे p का परिकलन किया गया था। हम पहले एक सन्निकट प्रणाली पर और फिर यथातथ प्रणाली पर विचार करेंगे।

एक सन्निकट प्रणाली—लगभग 23 वर्षों के प्रयोग के बाद, शिकागो, मिलवौकी, मेट पाल तथा पसिफिक रेलवे को पता चला कि “पूर्ण कोशिका” (full cell) प्रक्रिया से लगाय गये क्रियोसोट (creosote) द्वारा सुरक्षित लान बलूत (oak) के 50 में से 22 स्लीपर अभी भी अच्छी हालत में थे। इस प्रतिदर्श के लिए, $N=50$, $a=22$, तथा $p=0.44$ π की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ क्या हैं? इन दो मानों को प्राप्त करने के लिए, हम निम्न व्यंजक को काम में लाते हैं जो पहले भी काम में लाया जा चुका है

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{p - \pi}{\sigma_p},$$

परन्तु हम इसे इस प्रकार लिखते हैं

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{N}}}$$

हमें p तथा N मालूम हैं। परिशिष्ट ज या परिशिष्ट क की अन्तिम पंक्ति से हम $\frac{x}{\sigma}$ का मान (1.96) मिलता है जो 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं से संबद्ध है। अभी

दिये हुए समीकरण में तीन ज्ञात मान रखे गये हैं और इसे π के लिए हल किया गया है,¹⁰ जो निम्नलिखित है

$$1.96 = \frac{0.44 - \pi}{\sqrt{\frac{\pi - \pi^2}{50}}}$$

$$3.8416 = \frac{0.1936 - 0.88\pi + \pi^2}{\frac{\pi - \pi^2}{50}},$$

$$\frac{3.8416 - 3.8416\pi^2}{50} = 0.1936 - 0.88\pi + \pi^2,$$

$$0.076832 - 0.076832\pi^2 = 0.1936 - 0.88\pi + \pi^2,$$

$$0.1936 - 0.956832\pi + 1.076832\pi^2 = 0,$$

$$\pi = \frac{0.671125}{2.153664} \text{ और } \frac{1.242539}{2.153664}, \text{ इसलिए}$$

$$\pi_1 = 0.312 \text{ और } \pi_2 = 0.577$$

जो कुछ हमने किया वह यह निर्धारण करना था (1) $\pi_1 = 0.312$, जिसकी स्थिति इस प्रकार है कि $p = 0.44$ प्रसामान्य वक्र के उच्च $2\frac{1}{2}$ प्रतिशत सिरे को

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi_1 - \pi}{N}} = \sqrt{\frac{(0.312)(0.688)}{50}} = 0.066 \text{ के साथ } \pi_1 \text{ के घासपास काटता}$$

है, तथा (2) $\pi_2 = 0.577$ जिसकी स्थिति इस प्रकार है कि $p = 0.44$ प्रसामान्य वक्र के निम्न $2\frac{1}{2}$ प्रतिशत सिरे को

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi_2 - \pi}{N}} = \sqrt{\frac{(0.577)(0.423)}{50}} = 0.071 \text{ के साथ के घासपास } \pi^2$$

काटता है। जो कुछ किया गया है उसे चार्ट 25.3 दर्शाता है।

10 $0.1936 - 0.956832\pi + 1.076832\pi^2$ द्वितीय समीकरण निम्न परिकलन द्वारा हल किया गया है

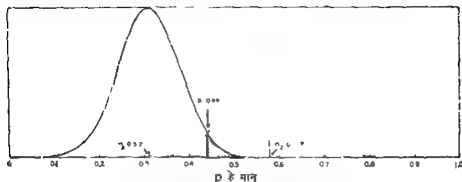
$$\pi = \frac{-(-0.956832) \pm \sqrt{(0.956832)^2 - 4(0.1936)(1.076832)}}{2(1.076832)}$$

यदि पहले समीकरण को इस प्रकार लिखा जात

$$1.96 = \frac{a - \pi N}{\sqrt{N(\pi - \pi^2)}}$$

तो हमारे पास, प्रारम्भ में, दाईं ओर केवल पूर्णांक होगा।

जिस पद्धति का अभी वर्णन किया गया है उससे तभी सन्तोषजनक परिणाम प्राप्त होते हैं जब N बड़ा होता है तथा p का मान 0.50 से बहुत भिन्न नहीं होता। इसकी वृष्टि तब स्पष्ट होगी जब इसे हम निम्न उदाहरण में काम में लायेंगे।



चार्ट 25.3 τ की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ, जब $p = 0.44$ तथा $N = 50$, जिन्हें σ , तथा प्रसामान्य वक्रों के प्रयोग से निर्धारित किया गया है। क्रॉस रेखित (cross hatched) क्षेत्र बाएँ वक्र का 2.5 प्रतिशत है, बिन्दु चिह्नित (stippled) क्षेत्र दाएँ वक्र का 2.5 प्रतिशत है।

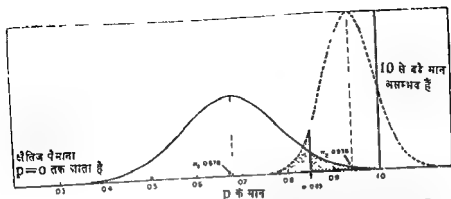
20 मेडको में से प्रत्येक को मानक शक्ति (standard strength) का डिजिटैलिस (digitalis) लगाया गया था। परिणामस्वरूप, उनमें से 17 का द्रुत प्रकृचन रुक गया (ब मर गये)। दूतरे मेडकों को आधी शक्ति का डिजिटैलिस एवं तथाकथित आधी-शक्ति वाला डिजिटैलिस लगाया गया था, किन्तु इस उदाहरण के सम्बन्ध में उन परीक्षणों के परिणामों से हमारा कोई वास्ता नहीं। जिन मेडकों को पूर्ण शक्ति का डिजिटैलिस दिया गया था उनको समूह के लिए, $N = 20$ तथा $p = 0.85$ π की 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ क्या हैं? पहले की तरह हल प्रारम्भ करने पर पहल हम परिशिष्ट B की अन्तिम पक्ति से 1.645 का $\frac{x}{\sigma}$ मान प्राप्त होता है और उसके बाद हम लिखते हैं

$$1.645 = \frac{0.85 - \tau}{\sqrt{\frac{\tau - \tau^2}{20}}}$$

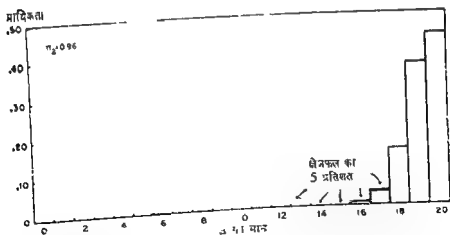
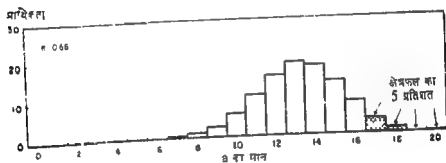
जिसे हल करने पर

$$\pi_1 = 0.678 \text{ तथा } \pi_2 = 0.938$$

प्राप्त होता है। ये परिणाम तब तक ठीक मालूम पड़ते हैं, जब तक हम चार्ट 25.4 को नहीं देखते, जो उस बात को दर्शाता है जिसे हम कर चुके हैं। अब यह तुरन्त ही स्पष्ट हो जाता है कि प्रसामान्य वक्रों का प्रयोग ठीक नहीं मिट्ट किया जा सकता, विशेष रूप से τ को निर्धारित करने के लिए। दाइ ओर का प्रसामान्य वक्र यह दर्शाता है कि $p > 1.0$ के मान होंगे, जो, निश्चय ही, असम्भव है।



चाटें 25.4 - की 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं का असन्तोषजनक सम्मिकटन जब $p=0.85$ तथा $N=20$, जिसे σ_p तथा प्रसामान्य वक्रों के प्रयोग से निर्धारित किया गया है। क्रॉस रेखाएँ क्षेत्र घनत्व का 5 प्रतिशत हैं बिन्दु-विखिल क्षेत्र घनत्व का 5 प्रतिशत है।



चाटें 25.5 - की 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ जब $N=20$ तथा $a=17$ ($p=0.85$) जिसका निर्धारण $(-B + -A)^2$ व्यञ्जक के प्रयोग से किया गया है। आंकड़े सारणी 25.4 तथा 25.5 हैं।

सारणी 25 4

व्ययक $(\tau B + \tau A)^{20}$ में a के मानों की प्रायिकताएँ* तथा संचयी प्रायिकताएँ
जब $\tau = 0.65, 0.66, 0.657$, तथा 0.656

($a \geq 17$ की प्रायिकता गहरे टाइप में दर्शायी गई है)

(a)	$\tau = 0.65$		$\tau = 0.66$		$\tau = 0.657$		$\tau = 0.656$	
	प्रायिकता	संचयी प्रायिकता	प्रायिकता	संचयी प्रायिकता	प्रायिकता	संचयी प्रायिकता	प्रायिकता	संचयी प्रायिकता
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000				
1	0.0000	> 0.9999	0.0000	> 0.9999				
2	0.0000	> 0.9999	0.0000	> 0.9999				
3	0.0000	> 0.9999	0.0000	> 0.9999				
4	0.0000	> 0.9999	0.0000	> 0.9999				
5	0.0003	> 0.9999	0.0002	> 0.9999				
6	0.0012	0.9997	0.0009	0.9998	इस निर्णय के लिए $a=0$ से $a=16$ तक की प्रायिकताओं की जरूरत नहीं है।			
7	0.0045	0.9985	0.0034	0.9989				
8	0.0136	0.9940	0.0108	0.9955				
9	0.0336	0.9804	0.0280	0.9846				
10	0.0686	0.9468	0.0598	0.9566				
11	0.1158	0.8782	0.1056	0.8968				
12	0.1614	0.7624	0.1537	0.7913				
13	0.1844	0.6010	0.1836	0.6376				
14	0.1712	0.4166	0.1782	0.4540				
15	0.1272	0.2454	0.1384	0.2758				
16	0.0738	0.1182	0.0839	0.1374				
17	0.0323	0.0444	0.0383	0.0535	0.0364	0.0506	0.0358	0.0497
18	0.0100	0.0121	0.0124	0.0152	0.0116	0.0142	0.0114	0.0139
19	0.0020	0.0021	0.0025	0.0028	0.0023	0.0026	0.0023	0.0025
20	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002

* असंचयी प्रायिकताओं का परिकलन सारणी 23 8 में दिखाये गये ढंग से किया जा सकता है। जब τ दो दशमलवों से अधिक नहीं होती, तो प्रायिकताएँ तथा संचयी प्रायिकताएँ नेशनल ब्यूरो आफ स्टैटिस्टिक्स, टेबल्स आफ दि वायनोमियल प्रोबेबिलिटी डिस्ट्रिब्यूशन, वॉशिंगटन, 1949 से प्राप्त की जा सकती हैं। असंचयी अंकों का पूर्णांकन करने से पहले ही अ संचयी अंकों से ऊपर दिखाये हुए संचयी अंक प्राप्त किये गये थे।

यथातथ विधि—पूर्ण शक्ति की डिजिटैलिस के आंकड़ों के लिए π की विश्वास्यता सीमाओं के यथातथ निर्धारण के लिए और अधिक परिश्रम साध्य प्रक्रिया की आवश्यकता होती है। π_1 के निर्धारण पर पहुँचने विचार करके हम π के उस मान को अवश्य निश्चित करना चाहिए जिसको यदि

$$(-B = -A)^{20}$$

ब्यक्त म रखा जाए तो पता चल कि $a = 17$ ($p = 0.85$) द्विपद के उच्च 5 प्रतिशत सिरे को काटना है। इसके लिए क्रमिक मॉन्टे कारो की आवश्यकता है, और हम पहले $\pi = 0.65$ को परखेंगे। सारणी 25.4 से यह देखा जा सकता है कि, द्विपद $(0.35B + 0.65A)^{20}$ में, $a \geq 17$ को प्राप्त करने की प्रायिकता 0.0444 है। क्योंकि यह प्रायिकता 0.05 से कम है, मत हमें π के कुछ बड़े मान की परख करनी चाहिए। उसी सारणी से यह मालूम पड़ता है कि, जब $\pi = 0.66$, तो $a \geq 17$ का प्राप्त करने की प्रायिकता 0.0533 है। यदि π_1 के लिए दो दशमलव पर्याप्त है, तो हम यह परिणाम निकालते कि π की निम्न प्रतिशत विश्वास्यता सीमा 0.66 है, जैसा कि चार्ट 25.5 ऊपरी के भाग में दिखाया गया है। यदि

सारणी 25.5

ब्यक्त $(-B + \pi A)^{20}$ में a के मानों की प्रायिकताएँ* तथा सचयी प्रायिकताएँ,
जब कि $\pi = 0.94, 0.95$ तथा 0.96

($a \geq 17$ की प्रायिकता गहरे दाख में दिखाई गई है)

a (1)	$\pi = 0.94$		$\pi = 0.95$		$\pi = 0.96$	
	प्रायिकता (2)	सचयी प्रायिकता (3)	प्रायिकता (4)	सचयी प्रायिकता (5)	प्रायिकता (6)	सचयी प्रायिकता (7)
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

चार दशमलव तक सभी छोटी हुई प्रायिकताएँ शून्य हैं

12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
13	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
14	0.0008	0.0009	0.0003	0.0003	0.0001	0.0001
15	0.0048	0.0056	0.0022	0.0026	0.0009	0.0010
16	0.0233	0.0290	0.0133	0.0159	0.0065	0.0074
17	0.0860	0.1150	0.0596	0.0755	0.0365	0.0439
18	0.2246	0.3395	0.1887	0.2642	0.1458	0.1897
19	0.3703	0.7099	0.3774	0.6415	0.3683	0.5580
20	0.2901	1.0000	0.3585	1.0000	0.4420	1.0000

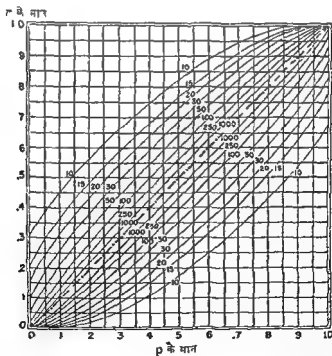
* सारणी 25.4 को पाठ दिखनी चाहिए।

τ_1 के लिए तीन दशमलवों की आवश्यकता है, तो हम देखेंगे कि अगला मान जो हम π_1 के सम्बन्ध में परख सकन है 0.655 से अधिक होना चाहिए। 0.657 मान की परख की गई थी, जिसका परिणाम सारणी 25.4 के छठे तथा सातवें स्तम्भों में दिखाया गया है, $a \geq 17$ के लिए प्रायिकता 0.0506 दली गई है। इसके बाद, $\pi = 0.656$ की परख करने पर सारणी में यह पता चला है कि $a = 17$ की प्रायिकता 0.0497 है। τ_1 का मान 0.656 तथा 0.657 के बीच में स्थित है, किन्तु 0.657 की अपेक्षा 0.656 के अधिक निकट है।

τ_2 की उच्च 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमा को प्राप्त करने के लिए, हम τ के मान का निर्धारण करना चाहिए। τ के इन मान को यदि

$$(-B + \pi A)^{20},$$

में रखा जाए तो पता चलेगा कि $a = 17$ ($p = 0.85$) द्विपद के निम्नले 5 प्रतिशत सिरे की काटता है। क्योंकि मानकट विधि में $\pi = 0.938$ था, अतः हम पहले $\tau = 0.94$ की परख करेंगे। सारणी 25.5 से पता चलता है कि $a \leq 17$ में द्विपद का 0.1150 सम्मिलित है, और उसके बाद हम $\tau = 0.95$ की परख करते हैं। τ_2 के इस मान से $a \leq 17$ की 0.0755 प्रायिकता निकलती है (देखिए सारणी 25.5), इसलिए अब हम $\tau = 0.96$ की परख प्रारम्भ करते हैं जिससे हम $a \leq 17$ के लिए 0.0439 प्रायिकता मिलती है, जैसा कि सारणी 25.5 में दिखाया गया है। इस सबका यह परिणाम निकलता है कि $\tau_2 = 0.96$ और यह



चार्ट 25.6 10 से 1,000 तक के विभिन्न आकारों के प्रतिदर्शों से प्राप्त p के मानों के लिए τ की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ। चार्ट 25.7 के शीर्षक के बाद की टिप्पणी देखिए।

p_1 तथा p_2 में अन्तर की साधकता

एक सन्निकट विधि—पूर्ण कोशिका (full cell) प्रक्रिया द्वारा लगाय गए त्रियोसोट द्वारा सुरक्षित लाय बलूत (oak) के 50 स्लीपरों के बारे में पहले हवाला दिया गया था। 23 वर्षों तक काम में लाय जाने के बाद, 22 अर्थात् 44 प्रतिशत स्लीपर अभी भी काम में आ रहे थे। जब ये स्लीपर बिछाये गए थे, उसी समय “रूपिंग (Rueping)” प्रक्रिया द्वारा त्रियोसोट मसिक लाल बलूत के दूसरे 50 स्लीपर भी बिछाये गए थे। 23 वर्षों के गुजर जाने पर इन दूसरे स्लीपरों में से 18 अर्थात् 36 प्रतिशत फिर भी काम में आ रहे थे। अब हमारे पास दो प्रतिदर्श हैं पहले, जिस प्रतिदर्श में “फुलसेल” प्रक्रिया काम में लाई गई थी, उसमें $N_1 = 50$, $a_1 = 22$, तथा $p_1 = 0.44$ था, दूसरे जिस प्रतिदर्श में ‘रूपिंग’ प्रक्रिया काम में लाई गई थी उसमें $N_2 = 50$, $a_2 = 18$, तथा $p_2 = 0.36$ था। हम जानना चाहते हैं कि क्या इन दो अनुपातों में 0.05 स्तर पर महत्वपूर्ण भेद है।

प्रक्रिया नास्तिक रूप से वही है जो दो प्रतिदर्श माध्यों के लिए काम में लाई गई थी, हम भेद तथा भेद की मानक त्रुटि इन दोनों की परस्पर तुलना करेंगे। दो प्रतिशतताओं के बीच के भेद की मानक त्रुटि

$$\sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{\sigma_{p_1}^2 + \sigma_{p_2}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{p_1 q_1}{N_1} + \frac{p_2 q_2}{N_2}}$$

है। अब हमें p मालूम नहीं है, तथा यदि हमें p मालूम होती तो हम $p_1 - p_2$ की साधकता की परीक्षा की अपेक्षा p के विरुद्ध p_1 की तथा p के विरुद्ध p_2 की परीक्षा लगभग निश्चित ही करना चाहते। क्योंकि हम p को नहीं जानते, इसलिये दोनों प्रतिदर्शों की जानकारी के आधार पर हम एक आकलन \bar{p} करते हैं। इस प्रकार

$$\bar{p} = \frac{a_1 + a_2}{N_1 + N_2}$$

$$= \frac{22 + 18}{50 + 50} = 0.40$$

अब हम परिकलन करने की स्थिति में हैं

$$\hat{\sigma}_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{pq}{N_1} + \frac{pq}{N_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.40)(0.60)}{50} + \frac{(0.40)(0.60)}{50}}$$

$$= 0.098, \text{ तथा}$$

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{p_1 - p_2}{\hat{\sigma}_{p_1-p_2}} = \frac{0.44 - 0.36}{0.098} = \frac{0.08}{0.098} = 0.82.$$

परिगिष्ट ज के सकेत से, यह प्रतीत होता है कि $P=0.41$, और हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि p_1 तथा p_2 में भेद महत्वपूर्ण नहीं है।

यथातथ विधि—जब वे दो प्रतिदर्श छोटे हैं, जिनसे p_1 तथा p_2 लिये गए हैं, तब उम सन्निकट विधि को यथातथ विधि के पक्ष में छोड़ देना चाहिये जिसका अभी अभी वर्णन किया गया है। बाद में इस अध्याय में यह दिखाया जाएगा कि “ 2×2 ” सारणी के लिए कार्दवर्ग परीक्षण ऊपर दिए p_1-p_2 परीक्षण के समरूप है। उसी समय यथातथ परीक्षण का वर्णन किया जायेगा।

भाग 2 : कार्दवर्ग परीक्षण

जैसा कि हम प्रयोग करेंगे वतमान विचार-विमर्श में χ^2 परीक्षण अनुपातों की एक श्रेणी के योग से बना है जिसमें प्रत्येक अनुपात निम्न से प्राप्त किया गया है (1) प्रेक्षित बारवारता (f) तथा सम्बद्ध सम्पष्टि या परिकल्पित बारवारता (f_c) के बीच के भेद को लेकर (2) इस भेद का वर्ग करके, और (3) वर्ग किये हुए भेद को f_c से भाग देकर। इस प्रकार,

$$\chi^2 = \sum \frac{(f - f_c)^2}{f_c}$$

अध्याय 26 में हम कार्दवर्ग के छोटे भिन्न पहलू को काम में लायेंगे, जब हम σ^2 तथा σ^2 की तुलना करेंगे।

1×2 सारणी

सन्निकट विधि - χ^2 परीक्षण तथा $p-\pi$ (या $a-r/N$) परीक्षण की सर्वसमिका (identity) प्रदर्शित करने के लिए हम उदाहरण को काम में लायेंगे जिसे इस अध्याय में पहले काम में ला चुके हैं जिसमें 10 सगमरमरों का प्रतिदर्श आया था जिनमें से 9 काले थे। 0.05 की कसौटी के रूप में काम में लाकर, σ_p तथा σ_a के प्रयोग में भी हमने इस परिकल्पना का परीक्षण किया था कि प्रतिदर्श उस सम्पष्टि से यादृच्छिक है जिसका $\pi=0.50$ है। यदि हम उसी परीक्षण को χ^2 के द्वारा करें तो हमारा परिकल्पित निम्नलिखित होगा

सगमरमर का रंग	सगमरमरों की प्रेक्षित सख्या f	परिकल्पित सख्या यदि 1 अनुपात विद्यमान है f_c	$f-f_c$	$(f-f_c)^2$	$\frac{(f-f_c)^2}{f_c}$
काला .	9	5	+4	16	3.2
सफेद .	1	5	-4	16	3.2
योग	10	10	0	..	6.4

यह एक 1×2 सारणी है क्योंकि प्रेक्षित बारवारताएँ 1 स्तम्भ तथा 2 पंक्तियों को घेरे हैं। यह सबसे अधिक सादे प्रकार की एक-स्तम्भ सारणी है। इस सारणी के अनुसार

χ^2 का मान 6.4 है, और हम स्वातन्त्र्य माना की उपयुक्त सख्या के लिए परिशिष्ट ज की मारणी के आधार पर χ^2 के ऐसे मान (या अधिक बड़े) की प्रायिकता निर्धारित कर सकते हैं। हमारी समस्या के लिए $n=1$, क्योंकि f -स्तम्भ में दो बक्सों में से एक में सख्या आसानी से लिखी जा सकती है। तथापि एक बार यह सख्या लिख दी जाती है, तो दूसरी सख्या तुरन्त निश्चित हो जाती है, क्योंकि योग 10 है। परिशिष्ट ज के आधार पर जब $n=1$ तथा $\chi^2=6.4$, तो यह देखा जा सकता है कि P का मान 0.01 से कुछ बड़ा है। यह तथ्य हमें इस सन्निकट परीक्षण के आधार पर परिवर्तनता को निराकृत करने की प्रेरणा देता है। यदि χ^2 मानों की एक अधिक विस्तृत सारणी उपलब्ध होती तो हमें पता चलता कि $P=0.0114$ ठीक वही जो उस परीक्षण से पता चला था जिसमें σ_y (या σ_a) सम्मिलित थे। सचार्ह यह है कि $P=\pi$ परीक्षण (या $\alpha=\pi N$ परीक्षण) तथा χ^2 परीक्षण में समान अन्तिम P मान प्राप्त होना चाहिए। इस बात की ओर ध्यान दें कि $d=\pi$ (या $\alpha=\pi N$) परीक्षण से जो $\frac{\chi^2}{\sigma}$ मान प्राप्त हुआ, वह χ^2 मान का वर्गमूल है।

इस बात को और अधिक अच्छी तरह समझा जा सकता है यदि हम (परिशिष्ट न की) χ^2 मारणी की अन्तिम पंक्ति को देखें, जो हम प्रसामान्य वटन के लिए $\frac{\chi^2}{\sigma}$ मान देती है, और (परिशिष्ट ज की) χ^2 सारणी की प्रथम पंक्ति को देखें जो हमें χ^2 मान देती है जब $n=1$ । किसी भी दिये हुए P मान के लिए χ^2 मान में सदा ही प्रसामान्य मान का वर्ग होगा।

परिशिष्ट ज की प्रथम पंक्ति में दिखाये हुए χ^2 के मान स्वातन्त्र्य के एक अंश (one degree of freedom) के लिए χ^2 के वटन में प्राप्त किये गये हैं, जो तथ्य चार्ट 25.8 में चित्रित है।

1 परीक्षण किसी भी दिशा में प्रेरित बारबारताओं के बराबर या उनसे अधिक प्रेरित तथा परिकल्पित बारबारताओं के बीच असह्यति पाने की प्रायिकता को प्रकट करता है। सगमरमरो के लिए 0.01 से कुछ अधिक के P मान ने 9 या 10 काले सगमरमरो की तथा 9 या 10 मकेश सगमरमरो की प्रायिकता को प्रस्तुत किया। यह तब भी सत्य है जब कार्डबन के वटन का केवल एक सिरा (देखिए परिशिष्ट न) अन्तर्निहित है, क्योंकि $f=f$, मानों का वर्ग किया गया था।

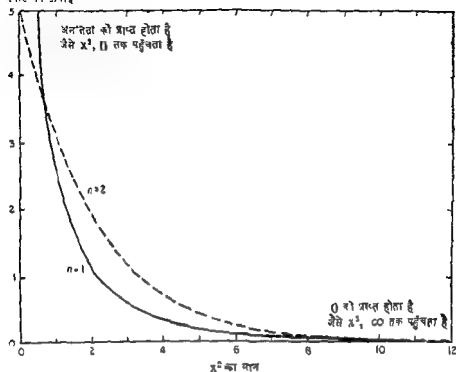
11 इस प्रायिकता को हम परिशिष्ट ज की प्रसामान्य वक मारणी में χ^2 को देखकर, χ^2 को नहीं, भी प्राप्त कर सकते हैं।

चार्ट 25.8 $n=1$, $n=2$, $n=5$, तथा $n=10$ के लिए χ^2 -वटन। ध्यान दें कि चार्ट को दोनो भागों के लिए पृथक् पमाने काम में लाये गए हैं। कोटियों का परिकलन

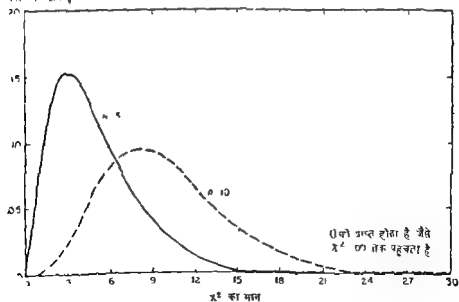
$$Y_c = \frac{-\chi^2}{2} \frac{n-2}{2} \frac{c}{(x^2)} \\ Y_c = \frac{n}{2} \left(\frac{n-2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

अधिक से किया गया था जिसे हल करना कठिन नहीं है यदि तपुबन्धक काम में लाये जाएं। χ^2 वटन का वृत्तक $\chi^2=n-2$ पर है, पिछाये इसक कि जब $n=1$, और तब वटनक शून्य पर है, जैसाकि ऊपर देखा जा सकता है, माध्य $\chi^2=n$ पर है। जैसाकि चार्ट के निचले भाग में दर्शाया गया है, वटन का वैपम्य कम होता जाता है, ज्यों-ज्यों स्वतन्त्रता अर्थों की सख्या बढ़ती है।

फोर्गि की ऊँचाई



फोर्गि की ऊँचाई



चार्ट 25 8 $^{1/3}$ बटन, जब $n=1, n=2, n=5$, तथा $n=10$, वर्णनात्मक आध्यान के लिए पृष्ठ 610³ देखें।

यथातथ विधि—जिस कारण $p-\pi$ (या $a-\pi N$) परीक्षण सन्निकट परीक्षण था उसी कारण कार्डवर्ग भी सन्निकट परीक्षण है यह मान लिया गया था कि प्रतिदर्श मानों का अविरत बंटन है जब कि मचाई यह है कि $(0.50B + 0.50A)^{10}$ द्विपद के केवल 11 पद ही हों सकते हैं। यथातथ प्रक्रिया का पृष्ठ 588—590 पर वर्णन किया गया था। इसे यहाँ नहीं दोहराया जायेगा। L^2 को काम में लाकर सन्निकट विधि को यथार्थ विधि के स्थान पर प्रयुक्त किया जा सकता है और उभी परिणाम पर पहुँचा जा सकता है कि ठीक उन्ही दशाग्रो में $p-\pi$ (या $a-\pi N$) परीक्षण काम में लाया जा सकता है और इन दशाग्रो पर $\pi=0.50$ के लिए पृष्ठ 592—594 पर तथा $\pi \neq 0.50$ के लिए पृष्ठ 596—600 पर विचार किया गया था।¹¹

π की विश्वास्यता सीमाएँ—मम्भाष्य रुचि के रूप में यह बात ध्यान में रखी जा सकती है कि L^2 को π की विश्वास्यता सीमाएँ निर्धारित करने के काम में लाया जा सकता है। यजक है

$$L^2 = \frac{\left(a - \frac{\pi}{1-\pi} b \right)^2}{\frac{1}{1-\pi} N}$$

और यह पहले दी हुई सन्निकट विधि के यथातथ समरूप है।

2×2 सारणी

सन्निकट विधि—जैसा कि अभी स्पष्ट किया जायेगा, 2×2 सारणी के लिए L^2 परीक्षण से वही प्रायिकता प्राप्त होती है और इसलिए परिकल्पना के बारे में वही परिणाम प्राप्त होता है जो p_1-p_2 परीक्षण से प्राप्त होता है, जिसका पहले वर्णन किया गया था। इस बात को स्पष्ट करने के लिए हम उसी दृष्टान्त का प्रयोग करेंगे जो p_1-p_2 परीक्षण के लिए प्रयोग किया गया था। आकड़े अब सारणी 25.6 के ढग पर व्यवस्थित किये गये हैं जिसे हम 2×2 सारणी कहते हैं, क्योंकि हममें दो स्तम्भ हैं और प्रेक्षित आकड़ों की दो पक्तियाँ हैं। उन दो-स्तम्भ सारणियों पर पीछे विचार किया जायेगा जिनमें दो में अधिक पक्तियाँ हैं।

सारणी 25.6 में समष्टि बारबारताएँ नहीं हैं किन्तु हमें परिकल्पित बारबारताएँ इस बात को ध्यान में रखने में प्राप्त होती हैं कि यदि दोनों प्रक्रियाओं से परिरक्षित स्लीपरो में से परीक्षण काल की समाप्ति पर काम में आने वाले स्लीपरो की सख्या में कोई भेद नहीं रहता, तो हमें आशा होगी कि प्रथम बक्स (पक्ति 1, स्तम्भ 1) में 'कुलनेल' प्रक्रिया से परिरक्षित 50 स्लीपरो के $\frac{1}{10}$ होंगे और दूसरे बक्स (पक्ति 1, स्तम्भ 2) में उसी प्रक्रिया से परिरक्षित 50 स्लीपरो के $\frac{6}{10}$ होंगे। इसी तरह से, तीसरे बक्स (पक्ति 2, स्तम्भ 1) में रूपायन प्रक्रिया से परिरक्षित 50 स्लीपरो के $\frac{1}{10}$ होंगे और चौथे बक्स (पक्ति 2, स्तम्भ 2) में इसी प्रक्रिया से परिरक्षित स्लीपरो के $\frac{6}{10}$ होंगे। इन f_c मानों

12 एक अधिक विकास के लिए जनल ऑफ़ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, खण्ड 60 मध्या 309, मार्च 1965, पृष्ठ 344—346 पर विनियम वी० बायड द्वारा लिखित 'ए नोमोग्राम फार काइस्क्वेयर' देखिए।

सारणी 25 6

परिरक्षी (preservative) क्रियोसोट को लगाने के लिए प्रयुक्त विधि से 23 वर्ष के परिक्षण काल की समाप्ति पर काम में आ रहे रेल मार्ग स्लोपर

वह प्रक्रिया जिसके द्वारा क्रियोसोट लगाया गया था	परीक्षण काल के बाद प्रयोग में आ रहे		योग
	हाँ	नहीं	
पूर्ण कोशिका (full cell)	22	28	50
रूपिंग (Rueping)	18	32	50
योग	40	60	100

आकरे प्रोसीडिअस ऑफ अमेरिकन वुड प्रिजर्वेंस एसोसिएशन, 1935 पृष्ठ 133 - 134 से।

का परिकलन सारणी 25 7 के स्तम्भ (2) तथा (3) में किया गया है। उसी सारणी के स्तम्भ (4), (5), (6), तथा (7) में χ^2 का परिकलन किया गया है और $\chi^2 = 0.67$ है। सीमान्त योगों की व्याख्या के माध्य, 2×2 सारणी में $n = 1$ है, जिसका अगले अनुच्छेद में स्पष्ट किया जायगा। जब $n = 1$ तथा $\chi^2 = 0.67$ तो परिशिष्ट ज से पता चलता है कि $0.30 < P < 0.50$ है। χ^2 की और अधिक विस्तृत सारणी से पता चलेगा कि $P = 0.41$, यह वही परिणाम है जो $p_1 - p_2$ परीक्षण से प्राप्त हुआ था। पुन ध्यान दें कि $p_1 - p_2$ परीक्षण के लिए $\frac{x}{n}$ मान 0.82 (या 0.816 तीन दशमन्वयों तक) था जो 0.67 के χ^2 मान का वर्गमूल है।

सारणी 25 7

सारणी 25 6 के आकड़ों के लिए χ^2 का परिकलन

सैन	परिकलित बारम्बारताओं का निर्धारण		f	$f - f_c$	$(f - f_c)^2$	$\frac{(f - f_c)^2}{f_c}$
	पक्षित तथा स्तम्भ योगों का गुणनफल	f_c स्तम्भ (2) -100 (3)				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
पक्षित 1, स्तम्भ 1	$50 \times 40 = 2,000$	20	22	+2	4	0.20
पक्षित 1, स्तम्भ 2	$50 \times 60 = 3,000$	30	28	2	4	0.133
पक्षित 2, स्तम्भ 1	$50 \times 40 = 2,000$	20	18	-2	4	0.20
पक्षित 2, स्तम्भ 2	$50 \times 60 = 3,000$	30	32	+2	4	0.133
योग		100	100	0	.	0.67

जब f_c प्रक्षिप्तियाँ पूर्णांक न हों, तब उन्हें एक दशमन्वय तक ले जाना चाहिय जिसमें कि $\sum f_c$ तथा $\sum f$ में अन्तर 1 नित्य न हो। वास्तव में, स्तम्भ (3) की f_c सख्याओं में से केवल एक का परिकलन करना जरूरी है। शेष सख्याएँ सारणी 25 6 के पक्षित तथा स्तम्भ के योगों में से घटाकर प्राप्त की जा सकती हैं।

सीमान्त योगों की व्याख्या के साथ 2×2 सारणी के लिए $n=1$ है। यह तथ्य निम्न छोटी सारणी पर विचार करके स्पष्ट किया जा सकता है

		100
		150
130	120	250

इस सारणी के सीमान्त योग दिए हुए हैं किन्तु बक्सों में कोई प्रविष्टियाँ नहीं हैं। यदि कोई सरया किसी एक बक्स में निखी जाती है तो यह स्पष्ट होना चाहिए कि दूसरे तीन बक्सों की संख्याएँ तुरन्त निश्चित हो जाती हैं। यदि प्रथम बक्स में 20 लिखते हैं तो निश्चय ही दूसरे बक्स की संख्या 80 नामरे बक्स की 110 और चौथे बक्स की 40 होनी चाहिये। क्योंकि हमें केवल एक बक्स में सरया निखने की स्वतन्त्रता थी, इसलिए स्वातन्त्र्य की केवल एक मात्रा है। 2×2 से बड़ी सारणियों के लिए यही विधि हमें स्वातन्त्र्य की मात्रा की संख्या बतलायेगी, यदि सीमान्त योग निश्चित हैं। तथापि केवल

$$n - (R - 1)(C - 1)$$

को परिकलित कर लेना अधिक त्वरित है जिसमें R पंक्तियों की संख्या है और C स्तम्भों की संख्या है। निम्न सम्बन्ध रचिकर हो सकता है

$$\text{सीमान्त योगों के कारण खोई स्वातन्त्र्य की मात्राएँ}^{13} \quad \frac{(R-1) + (C-1) + 1}{RC} \\ \text{स्वातन्त्र्य की शेष मात्राएँ, } n$$

योग (बक्सों की संख्या)

सारणी 25 7 में दिखाए परिकलन रूप की आवश्यकता नहीं होती जब 2×2 सारणी के लिए χ^2 का परिकलन किया जाता है। यह यहाँ अन्तर्निहित प्रविधि को स्पष्ट करने के लिए दिया गया था। 2×2 सारणी के लिए χ^2 का मान निम्न व्यंजक के प्रयोग से अधिक शीघ्रता से प्राप्त किया जा सकता है,

$$\chi^2 = \frac{(a_1 b_2 - b a_2)^2 N}{N_1 N_2 N_a N_b}$$

जिसमें संकेत बक्स तथा कुल बारंबारताओं को बतलाते हैं जैसा कि नीचे दिखलाया गया है

a_1	b_1	N_1
a_2	b_2	N_2
N_a	N_b	N

सारणी 25 6 के आकड़ों के लिए

$$\chi^2 = \frac{[(22)(32) - (28)(18)]^2 100}{(50)(50)(40)(60)}$$

13 प्रत्येक सीमान्त योग के कारण स्वातन्त्र्य की एक मात्रा खोई नहीं जाती। यदि कोई एक ऊर्ध्वदिश तथा कोई क्षैतिज योग (संयोगों को सम्मिलित करके) छोड़ दिया जाता है तो उद्देक्ष योगों के द्वारा दी गई जानकारी के आधार पर फिर से लिखा जा सकता है।

$$= \frac{(704 - 504)^2 100}{(2500)(2400)},$$

$$= \frac{4,000,000}{6,000,000} = 0.67$$

यह, निस्संदेह, वही मान है जो सारणी 25.7 में प्राप्त किया गया था।

यथातथ प्रविधि—जब N छोटा होता है, तब χ^2 परीक्षण द्वारा दी हुई प्रायिकता बहुत छोटी होती है जिसका परिणाम यह होता है कि γ परीक्षण परिकल्पना को अविश्वसनीय बना सकती है, जबकि यथातथ प्रविधि परिकल्पना को अविश्वसनीय न रहते दे।

प्रयोगशाला के जिन 16 पशुओं को पहले विषाणु का टीका लगाया जा चुका था, उनकी दो प्रकार की चिकित्सा से सम्बन्ध रखने वाले निम्न ग्रांफो पर विचार कीजिए।

उपचार	परिणाम		योग
	बच गये	मर गये	
#1	7	3	10
#2	0	6	6
योग	7	9	16

दो उपचारों के ग्रांफो इतने भिन्न प्रतीत होते हैं कि पाठक को यह मालूम पड़ सकता है कि सांख्यिकीय परीक्षण लागू करना समय नष्ट करना है। तो भी 0.01 की कमीटी के रूप में कान में दारकर हमें देखना चाहिए कि क्या दोनों उपचारों में महत्वपूर्ण भेद है। हमारी परिकल्पना है कि 10 तथा 6 पशुओं के दो समूह बचे या मरे हुए के अनुपातों के सम्बन्ध में एक ही समष्टि से हैं। पहले काईवर्ग परीक्षण को काम में लाकर हमें प्राप्त होता है

$$\chi^2 = \frac{(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 N}{N_1 N_2 N_a N_b}$$

$$= \frac{[(7)(6) - (0)(3)]^2 16}{(10)(6)(7)(9)} = 7.47$$

$n=1$ के लिए यदि हम परिशिष्ट अ को देखें तो पता चलेगा कि $P=0.01$ और तब इस सन्निकट परीक्षण के आचार पर हम यह परिणाम निकालेंगे कि हमारी परिकल्पना अविश्वसनीय थी। तथापि प्रायिकता वास्तव में उमसे अधिक बड़ी है जो χ^2 परीक्षण या $P_1 - P_2$ परीक्षण से सूचित होती है, जो, जैसा कि हम पहले ही जानते हैं, वही है, जो इस प्रकार की समस्या के लिए χ^2 परीक्षण है।

जिस 2×2 सारणी के भीमान्त योग निश्चित है, उस सारणी के घटकों में बार-बारताओं की किमी व्यवस्था की प्रायिकता

$$\frac{N_1! N_2! N_a! N_b!}{N! a_1! b_1! a_2! b_2!}$$

से प्राप्त की जा सकती है। यदि दोनों उपचारों में प्राप्त होने वाले आंकड़ों के आधार पर इस व्ययक को हल किया जाए तो

$$\frac{10^1 6^1 7^1 9^1}{16^1 7^1 3^1 0^1 6^1} = 0.0105$$

प्राप्त होता है। यह उम विशिष्ट विभिन्नता की प्रायिकता है जिसका प्रेक्षण किया गया था। यदि दोनों प्रतिदर्शों (उपचारों) के बीच कोई बड़े अन्तर सम्भव है, तो उनकी प्रायिकताएँ इसमें जोड़ी जानी चाहिए। (यह याद होगा कि χ^2 परीक्षण तथा $p_1 - p_2$ परीक्षण हमें प्रेक्षित अन्तर के बराबर या बड़े अन्तर की प्रायिकता प्रदान करता है।) सारणी 25.8 का प्रथम स्तम्भ उन सभी सम्भव संयोजनों को दिखाता है जिनसे हमारी समस्या के नीमान्त योग प्राप्त होगा। वे कुल सात हैं। दूसरे स्तम्भ से यह देखा जा सकता है कि कोई भी संयोजन प्रेक्षित अन्तर से बड़ा और उभी दिशा में अन्तर नहीं दिखाता। फिर भी संयोजन VII विपरीत दिशा में अपेक्षाकृत बड़ा अन्तर दर्शाता है। हम इसलिए इसकी प्रायिकता भी निश्चित करत हैं, जो 0.0009 है। यदि संयोजन I तथा VII की दोनों प्रायिकताओं का जोड़ा जाए तो 0.0114 प्राप्त होता है और हम उस परिणाम¹⁴ पर पहुँचते हैं जो पहले के परिणाम से भिन्न है परिणामस्वरूप परिकल्पना का निराकरण नहीं हुआ।

संभव रुचि की दृष्टि से सारणी 25.8 सात संयोजनों में से प्रत्येक की प्रायिकता दर्शाती है। ध्यान दीजिए कि सात प्रायिकताओं का योग 1.0000 है। पूर्णांकन के कारण सारणी 25.8 में दर्शायी सात संख्याओं का योग 0.9999 है।

यदि हमारी रुचि केवल इस बात को जानने में होती कि क्या उपचार सं० 2 की अपेक्षा उपचार सं० 1 ने बच्चे दुमों के सम्बन्ध में अधिक बड़ा अनुपात दिखाया है, तो हम χ^2 परीक्षण से प्राप्त प्रायिकता को आधार कर देते। यह '0.005 से कम' है, और इसमें यह धारणा अंतर्निहित है कि संभव मानों का वितरण सममित है, किन्तु बात ऐसी नहीं है। शुद्ध प्रायिकता तो 0.0105 है, यह वह प्रायिकता है, जो संयोजन I के लिए सारणी 25.8 में दिखायी गई है।

जब हम उस प्रकार के आंकड़ों को काम में ला रहे हों जैसे हमें दो उपचारों के सम्बन्ध में प्राप्त थे और हमें उस परिणाम का सामना करना पड़ा हो जो हमें अभी-अभी प्राप्त हुआ था, तो ऐसी व्यावहारिक स्थिति में हमें क्या करना चाहिए? ऐसी स्थिति में

14 छोटी बारबारताओं वाली 2×2 सारणियों से सम्बन्ध रखने वाले परिणामों पर पहुँचने का कार्य उस सारणी के प्रयोग से आसान हो सकता है, जिसे डॉ० जे० फिने तथा आर० लाश्वा ने संवार किया था और जो चुने हुए प्रायिकता मानों पर a_2 के मानों को सार्यक दर्शाती है, जब a_1 , N_1 , तथा N_2 निश्चित हैं। $N_1 + N_2 = 6$ से लेकर $N_1 + N_2 = 30$ तक के परिवर्तन की 2×2 सारणियों पर विचार के लिए व्यवस्था की गई है। ई० एच० डिवर्गन तथा एच० ओ० हार्टले, *बायोमीट्रिका टेबल्स फॉर स्टैटिस्टिशियन्स*, केंब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, सन् 1954, पृ० 65—72 तथा 188—193 को देखिये। यह सारणी मूलतः *बायोमीट्रिका*, खण्ड 35, भाग 1 तथा 2, और खण्ड 40, भाग 1 तथा 2, में दो भागों में प्रकाशित हुई थी।

सारणी 258

p_1, p_2 तथा $p_1 - p_2$ के मान और उन सात संयोजनों में से प्रत्येक की प्रायिकता जिनके सीमान्त योग नीचे दिखाये गये हैं

संयोजन	पहले स्तम्भ की पंक्ति योग का अनुपात तथा अन्तर	$\frac{N_1! N_2! N_a! N_b!}{N! a_1! b_1! a_2! b_2!}$ से संयोजकता की प्रायिकता
I $\begin{array}{c c c} 7 & 3 & 10 \\ \hline 0 & 6 & 6 \\ \hline 7 & 9 & 16 \end{array}$	$p_1 = 0.7$ $p_2 = 0$ $p_1 - p_2 = +0.7$	0.0105
II $\begin{array}{c c c} 6 & 4 & 10 \\ \hline 1 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 9 & 16 \end{array}$	$p_1 = 0.6$ $p_2 = 0.17$ $p_1 - p_2 = +0.43$	0.1101
III $\begin{array}{c c c} 5 & 5 & 10 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 7 & 9 & 16 \end{array}$	$p_1 = 0.5$ $p_2 = 0.33$ $p_1 - p_2 = +0.17$	0.3304
IV $\begin{array}{c c c} 4 & 6 & 10 \\ \hline 3 & 3 & 6 \\ \hline 7 & 9 & 16 \end{array}$	$p_1 = 0.40$ $p_2 = 0.50$ $p_1 - p_2 = 0.10$	0.3671
V $\begin{array}{c c c} 3 & 7 & 10 \\ \hline 4 & 2 & 6 \\ \hline 7 & 9 & 16 \end{array}$	$p_1 = 0.30$ $p_2 = 0.67$ $p_1 - p_2 = -0.37$	0.1573
VI $\begin{array}{c c c} 2 & 8 & 10 \\ \hline 5 & 1 & 6 \\ \hline 7 & 9 & 16 \end{array}$	$p_1 = 0.20$ $p_2 = 0.83$ $p_1 - p_2 = -0.63$	0.0236
VII $\begin{array}{c c c} 1 & 9 & 10 \\ \hline 6 & 0 & 6 \\ \hline 7 & 9 & 16 \end{array}$	$p_1 = 0.10$ $p_2 = 1.0$ $p_1 - p_2 = -0.9$	0.0009
योग.....	...	1.0000

निश्चय ही और अधिक प्रयोग करना ठीक है, सम्भवतः बड़े प्रतिदर्शों से सार्थक अन्तर दिखाई पड़ सकता है, या, विकल्प से, बड़े प्रतिदर्श परिकल्पना को अविश्वसनीय सिद्ध करने में असफल हो सकते हैं।

येट्स का शोधन— a — N परीक्षण के सम्बन्ध में उल्लिखित यह शोधन 2×2 सारणी¹⁵ के लिए χ^2 परीक्षण पर भी लागू किया जा सकता है, जब कि वैधम्य विद्यमान न हो। प्रयोजन वही है जो पहले या सन्निकट परीक्षण में सुवार करना ताकि इससे प्राप्त होने वाली प्रायिकता यथातथ परीक्षण से अधिक सहमति प्रकट करे। येट्स के शोधन में, यहाँ भी, प्रतिशोधन की प्रवृत्ति है।¹⁶ दोना उपचारों के आँकड़ों के सम्बन्ध में यदि येट्स के शोधन का प्रयोग किया जाय, तो 0.025 में कुछ बड़ी प्रायिकता प्राप्त होती है, जो यथातथ विधि में प्राप्त प्रायिकता की अपेक्षा बहुत बड़ी है। जैसाकि पहले कहा जा चुका है, प्रतिशोधन की प्रवृत्ति से कभी-कभी यह परिणाम निकलेगा कि अन्तर सार्थक नहीं था जबकि यथातथ प्रविधि से सार्थक अन्तर होने का संकेत मिलेगा।

1 × 2 से बड़ी 1 × R सारणियाँ

A 3 × 1 सारणी—अन्य वषों में कॉफी की बहुत सी किस्मों की ताज़गी विज्ञापित लक्षणा रही है। एक मन्था को यह मन्था कि वह इस बात का पता लगाने का प्रयत्न करे कि क्या वास्तव में ताज़गी से कॉफी के स्वाद में अन्तर आता है। इस उद्देश्य को पूरा करने के लिए एक पर्याप्त व्यापक खोज की गई। इसका एक पहलू था 52 चलने वाले, जिनमें से प्रत्येक को कॉफी के 6 प्याले दिय गये थे, जिनमें से 2 ताज़ी कॉफी के, 2 तीन सप्ताह पुरानी कॉफी के, और 2 पांच सप्ताह पुरानी कॉफी के थे। प्रत्येक चलने वाले से कहा गया था कि वह प्रत्येक प्याले की उभी जैसे दूसरे प्याले से जाँड़ी मिलाने। अब इन छ प्यालों की 15 प्रकार से जोड़ी मिलाना सम्भव है। इन 15 प्रकारों में से केवल एक ही प्रकार से प्यालों की तीनों जोड़ियों को ठीक-ठीक मिलाना सम्भव है। एक जोड़ी की ठीक से जोड़ी बनाने के छ ढंग हैं और ठीक से जोड़ी न मिलाने के आठ ढंग हैं। दो जोड़ों की ठीक-ठीक जोड़ी मिलाना सम्भव नहीं है। यदि ताज़ी, कुछ बासी तथा बासी कॉफी के स्वाद में कोई अन्तर न होता, तो हम तीन, एक, तथा एक भी नहीं जोड़ों को 1 6 8 के अनुपात में ठीक-ठीक जोड़ी मिलाने की आशा करने। सारणी 25.9 प्रेक्षित आँकड़ा तथा इन अनुपातों के आधार पर परिकल्पित बारबारताओं को दर्शाती है। सत्यापन के इन दो समुच्चयों से χ^2 का मान 46.08 पता चलता है। क्योंकि श्रेय निश्चित है और प्रतिदर्श आँकड़ों की तीन श्रेणियाँ हैं¹⁷ इसलिए $n=2$ (स्वातन्त्र्य के दो असों के लिए k का बटन चार्ट 25.8 में दिखाया गया है।) परिशिष्ट ज से यह देखा जा सकता है

15 शोधन में

$$\sum \frac{\{f - f_c\} - \frac{1}{2}}{f_c}^2$$

व्यक्ति से L^2 या पारिकमान सम्मिलित है। परिक्रान के प्रयोजन के लिए अधिक सरल रूप उपलब्ध है। उसे यहाँ इसलिए नहीं दिया है क्योंकि येट्स के शोधन के प्रयोजन को उपयुक्त नहीं बताया गया है।

16 जर्नेल ऑफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, दिसम्बर 1951, पृ. 490—501 के फ्रेड ऐडलर द्वारा लिखित “येट्स क्रैबबन एन्ड दि स्टैटिस्टीशियन्स” भी देखियें।

17 ध्यान में रखिए कि $(R-1)(C-1)$ व्यक्त $1 \times R$ सारणी पर लागू नहीं होगा।

कि P का मान 0.001 में बहुत कम है और यह स्पष्ट है कि जोड़ियों के मिलान काकतालीय वृद्धि से साथक रूप में भिन्न है। स्पष्ट ही ताजी और बारी काँफी में भेद करना संभव है। तो भी एक बात विशेष रूप से ध्यान में रखने योग्य है कि आंकड़े कम्पनी द्वारा इस प्रकार प्रस्तुत किये गये थे कि जब केवल एक ही जोड़े का ठीक जोड़ी मिलान हुआ था, उस समय जोड़ी मिलान में ताजी काँफी के दो प्याले या तीन सप्ताह पुरानी काँफी के दो प्याले या पाँच सप्ताह पुरानी काँफी के दो प्याले कितनी बार शामिल थे। इसके अतिरिक्त खाने वाला ने यह नहीं बताया कि जिन प्यालों की जोड़ियाँ मिलायी गई थी वे 'ताजी काँफी के', 'कुछ बारी' के या 'बारी' के थे।

दूसरी $1 \times R$ सारणियाँ—प्रेक्षित आंकड़ों के एक स्तम्भ तथा तीन में अधिक पंक्तियों वाली सारणियों के लिए बंसी प्रविधि होनी जैसी कि सारणी 25.9 में 1×3 सारणी के लिए दिखाई गई है। स्वातन्त्र्य की मात्राएँ $R-1$ होगी यदि केवल मान योग की प्रपक्षा और अधिक विशेषताओं के सम्बन्ध में f तथा f_c मानों की सहमत न किया गया हो। एक पंक्ति और C स्तम्भों वाली सारणियाँ बहुत कम मिलती हैं क्योंकि वे

सारणी 25.9

ताजी, तीन सप्ताह पुरानी, तथा पाँच सप्ताह पुरानी काँफी के प्यालों के जोड़ों की जोड़ी मिलान के लिए χ^2 का परिकलन

ठीक जोड़ी मिलाये जोड़ा की संख्या	f	f_c 163	$f - f_c$	$(f - f_c)^2$	$\frac{(f - f_c)^2}{f_c}$
तीन	15	3.5	+11.5	132.25	37.79
एक	24	20.8	+3.2	10.24	0.49
एक भी नहीं	13	27.7	-14.7	216.09	7.80
सबयोग	52	52.0	0		46.08

सम्भवतया ऐसे अनुपात पाते हैं जिनका प्रयोग करना बहुत कठिन होता है। ऐसी सारणी को $1 \times R$ सारणी के रूप में ठाना जा सकता है।

$1 \times R$ सारणी के विशेष दृष्टान्त के रूप में 'आसजस सौष्ठव' ("goodness of fit") का परीक्षण—अध्याय 23 में एक प्रसामान्य वक्र को दूरी के लिए प्रथम वर्ग हार्ड स्कूल की छात्राओं द्वारा किए गए वेस बाल के प्रक्षेपणों के आंकड़ों के साथ आसजित किया गया था। सारणी 25.10 के स्तम्भ (2) तथा (3) प्रेक्षित आंकड़ों तथा परिकलित बारंबारताओं को दिखाते हैं। संख्याओं के इन दो समुच्चयों से χ^2 का 6.65 मान प्राप्त हुआ है। अब χ^2 , s , तथा N के सम्बन्ध में प्रेक्षित तथा आसजित आंकड़ों को एक दूसरे में बलात् मिलाया गया है। इसीलिए स्वातन्त्र्य की तीन मात्राएँ कम हो गईं। क्योंकि प्रेक्षित आंकड़े 13 श्रेणियों में हैं, इसलिए $n=13-3=10$ $n=10$ के लिए

\bar{x}^2 का बटन चार्ट 25.8 में दिखाया गया है। परिशिष्ट A से यह पता चलता है कि P का मान 0.75 से अधिक किन्तु 0.80 से कम है, और हम इस परिणाम पर पहुँचने हैं कि प्रेक्षित तथा परिकल्पित बारवारताओं के बीच महत्वपूर्ण सन्तोषजनक है, हमारे पास इन परिकल्पना पर संदेह करने का कोई कारण नहीं है कि प्रतिदर्श प्रसामान्य मण्डल में यादृच्छिक था।

सारणी 25.10

दूरी के लिए प्रथम वर्ष हाई स्कूल की लड़कियों द्वारा किये गये बेसबाल के प्रक्षेपणों के साथ प्राप्तजित प्रसामान्य वक्र के लिए
“आसंजन सौष्ठव” का कार्द्वर्ग परीक्षण

दूरी फुटों में (1)	f प्रेक्षित बारवारता (2)	f_c प्रत्याशित बारवारता (3)	$f - f_c$ (4)	$(f - f_c)^2$ (5)	$\frac{(f - f_c)^2}{f_c}$ (6)
25 से नीचे	1	1.1	-0.1	0.01	0.01
25 किन्तु 35 से नीचे	2	3.2	-1.2	1.44	0.45
35 किन्तु 45 से नीचे	7	9.1	-2.1	4.41	0.48
45 किन्तु 55 से नीचे	25	20.2	4.8	23.04	1.14
55 किन्तु 65 से नीचे	33	35.0	-2.0	4.00	0.11
65 किन्तु 75 से नीचे	53	50.6	2.4	5.76	0.11
75 किन्तु 85 से नीचे	64	57.4	6.6	43.56	0.76
85 किन्तु 95 से नीचे	44	52.0	-8.0	64.00	1.23
95 किन्तु 105 से नीचे	31	37.0	-6.0	36.00	0.97
105 किन्तु 115 से नीचे	27	22.0	5.0	25.00	1.14
115 किन्तु 125 से नीचे	11	10.2	0.8	0.64	0.06
125 किन्तु 135 से नीचे	4	3.7	0.3	0.09	0.02
135 या अधिक	1	1.5	-0.5	0.25	0.17
योग	303	303.0	0	...	6.65

आइए सारणी 23.1 तथा 23.3 से लिए गये हैं।

“आसंजन सौष्ठव” का परीक्षण करने समय, अन्त की श्रेणियों में हो सकने वाले f तथा f_c के बीच के छोटे कम भेदों के $1/\epsilon^2$ पर पड़ने वाले स्पष्ट प्रभाव से बचने के लिए, एक या दोनों विरोध होने वाली अनेक बारवारताओं का बर्णोकरण करना अव्यावहारिक नहीं है। क्योंकि f_c के विवेक f मानों का बटन उस समय के प्रत्याशित बटन के ठीक अनुक्रम नहीं होता, जिन समय f_c छोटा होता है, इसलिए यह उपयुक्त बताया गया है कि किसी भी श्रेणी में परिकल्पित बारवारताएँ 5 या 10 से कम नहीं होनी चाहिए। फिर भी यह दिखाया जा चुका है कि यदि 0.05 कमोटी काम में लगी जा रही है, तो अन्त की बारवारताएँ इनकी बड़ी नहीं होनी चाहिए। देखिए डब्ल्यू. जी. मोचरण द्वारा इमोवा स्टेट कालिज जर्नल ऑफ साइन्स, खण्ड XVI, नक 4, पृ. 421-436 पर प्रकाशित “दि χ^2 क्रेडिटिंग फॉर कन्टिन्युइटी”।

2 × 3 तथा बड़ी सारणियाँ

2 × R सारणियाँ—प्रेक्षित आँकड़ों के दो स्तम्भों तथा R पंक्तियों वाली सारणियों के लिए ऐसी कार्य-नूची काम में नाना आवश्यक नहीं है जैसी कि सारणी 25.7 में है। निम्न सारणी में निदिष्ट किए गये ग्रंथों को प्रकट करने वाले सकेतो को काम में लाकर,

a_1	b_1	N_1
a_2	b_1	N_2
a_3	b_3	N_3
		.
N_a	N_b	N

निम्न व्यंजक में 1^2 के मान का परिकलन किया जा सकता है

$$1^2 = \frac{N^2}{N_a N_b} \left\{ \left(\frac{a_1^2}{N_1} + \frac{a_2^2}{N_2} + \dots \right) - \frac{N_a^2}{N} \right\}$$

सारणी 25 11

छ: थल सेना क्षेत्रों में से प्रत्येक में परीक्षा लिए हुए बाएँ तथा दाएँ हाथ से काम करने वाले पंजीपकों के प्रतिवर्त* में उन पंजीपकों की संख्या

थल सेना क्षेत्र	बाएँ हाथ से काम करने वाले	दाएँ हाथ से काम करने वाले	योग
I	161	1,636	1,797
II	223	2,195	2,418
III	193	2,130	2,323
IV	137	1,626	1,763
V	230	2,317	2,547
VI	120	1,191	1,311
योग	1,064	11,095	12,159

* प्रतिवर्त उन रिकार्डों में बना था जिन्हें थल सेना के विभाग ने 19 जून, 28 जून, तथा 30 जून, 1952 को प्राप्त किया था।

आंकड़े ह्यूमन बायोमॉन्ट्री, खण्ड 25, अंक 1, पृ० 36—49 में सकलित की० बी० कारपिनोग तथा एच० ए० ब्रोमबेन द्वारा लिखित "प्रैक्सेन्स ऑफ लेफ्ट हैंडेडनेस अमंग सिनिस्ट्रल सविंग रजिस्ट्रेंट्स" से उद्धृत है।

छ. यम मंता क्षेत्रा में परीक्षा लिये हुए बाएँ हाथ से तथा दाएँ हाथ से काम करने वाले पञ्जीयकों की मर्या के प्रतिद्वन्द्व आंकड़े उम जानकारी से प्राप्त किये गये थे जो उन चयनात्मक मेवा पञ्जीयका द्वारा दिये गये थे जिनकी सैनिक सेवा के लिए परीक्षा ली गई थी। बाएँ हाथ से काम करने वालों के अनुपात संख्या IV में 7.8 प्रतिशत क्षेत्र II में 9.2 प्रतिशत तक घटन-वृद्धत थे। मारणी 25.11 के आंकड़ा पर $1/2$ परीक्षण का प्रयोग हमें इस बात को निश्चित करने के योग्य बनाता है कि क्या बाएँ तथा दाएँ हाथ से काम करने वालों के अनुमान विभिन्न यम मंता क्षेत्रों में सार्थक रूप में भिन्न थे। इस सारणी के आधार पर परिकल्पना निम्न है

$$\chi^2 = \frac{(12,159)}{(1,064)(11,095)} \left\{ \frac{(161)^2}{1,767} + \frac{(223)^2}{2,418} + \frac{(193)^2}{2,323} + \frac{(137)^2}{1,763} + \frac{(230)^2}{2,547} + \frac{(120)^2}{1,311} - \frac{(1,064)^2}{12,159} \right\}$$

$$= 3.98$$

स्वातन्त्र्य की मात्राओं की सख्या निश्चित करने के लिए हम $n = (R-1)(C-1) = (5)(1) = 5$ परिकल्पित करने हैं। $n=5$ के लिए 1° का बटन चार्ट 25.8 में दिखाया गया है। परिशिष्ट A में हम पता चलता है कि P का मान 0.50 तथा 0.70 के बीच में है और हम इस परिणाम पर पहुँचते हैं कि बाएँ हाथ से तथा दाएँ हाथ से काम करने वालों के छ. क्षेत्रा से प्राप्त अनुपात सार्थक रूप में भिन्न नहीं हैं।

C स्तम्भों तथा दो पक्तियों वाली सारणियों के लिए भी वह व्यवहार, संकेतों में उचित परिवर्तन करके, काम में लाया जा सकता है जो अभी-अभी $1/2$ के लिए लाया गया था। वैकल्पिक रूप में, मारणी को दो स्तम्भों में फिर से परिवर्तित किया जा सकता है।

तीन या अधिक स्तम्भों तथा तीन या अधिक पक्तियों वाली मारणियों को, जिनके सीमान्त योग निश्चित हैं, परिकल्पना के सारणी 25.7 जैसे रूप के द्वारा बहुत शीघ्रता से काम में लाया जा सकता है। स्वातन्त्र्य की मात्राएँ $(R-1)(C-1)$ हैं।

काईबर्ग परीक्षाएँ करते समय कभी-कभी एक बहुत बड़ी प्रायिकता मानने आ सकती है। कुछ लेखकों ने संकेत दिया है कि 0.99 प्रायिकता ठीक वैसी असाधारण है जैसी 0.01, और यदि हम 0.01 को परिकल्पना को अविश्वसनीय बनाने वाला मानें, तो 0.99 ठीक उतनी ही स्पष्टता से परिकल्पना को अविश्वसनीय बना देती है, जितनी स्पष्टता से 0.01 प्रायिकता। यह सत्य है कि 0.99 प्रायिकता वाली घटना ठीक उतनी आश्चर्यजनक है जितनी वह घटना जिसकी प्रायिकता 0.01 है, किन्तु इससे यह परिणाम नहीं निकलता कि 0.99 प्रायिकता परिकल्पना को अविश्वसनीय कर देती है। प्रतिद्वन्द्व तथा समष्टि के बीच या दो प्रतिद्वन्द्वों के बीच आश्चर्यजनक महमति को हमें, साधारण सावधानी की अपेक्षा कुछ अधिक सावधानी में, सम्भवतः "काम चलाने के लिए अस्थायी रूप में संचालित" आंकड़ों को, अकण्ठित की भूलों को, यदि "आसन्न सौष्ठव" अन्तर्निहित है तो आंकड़ों के पहले ही परिष्कृत कर लेने को, अथवा असावधानी से आयोजित प्रयोग को ढूँढ़ने की प्रेरणा देनी चाहिए।

वास्तव में P के अत्यधिक बड़े या अत्यधिक छोटे मानों के होने पर हम परिस्थिति का पुनः परीक्षण करना चाहिए। निम्न घटना पर विचार कीजिए जिसका पृष्ठ 11 पर

उत्पन्न है जब प्रतिदीप्त प्रकाश की पहल पहल व्यवस्था का गई थी उस समय कुछ लोगों का यह विश्वास था कि प्रतिदीप्त प्रकाश वाली वस्तियों से विकिरण मनुष्यों को अनुसर कर दगा । उनकी आशंकाओं का निराकरण करने के लिए एक रेल मार्ग में जो पहल ही प्रतिदीप्त प्रकाश की वस्तिया तथा चुका था चूहों के एक समूह को उद्दीप्त प्रकाश के क्षेत्र में रखा और एक दूसरे समूह को प्रतिदीप्त प्रकाश के क्षेत्र में । प्रथम समूह के सामान्य रूप में मन्तान हुई, कि तु दूसरे समूह के एक भी नहीं । इससे वास्तव में उन लोगों की आशंकाएँ प्रबल होती प्रतीत हुई जो यह सोचने के कि सम्भवत प्रतिदीप्त प्रकाश मनुष्यों को अनुसर बना दे । परिणाम इतना अधिक आश्चर्यजनक प्रतीत हुआ कि एक कायकारी अधिकारी ने कहा कि चूहों के दूसरे समूह की सावधानी से जांच पन्ताल होनी चाहिए । परीक्षा करने पर पता चला कि वे सभी एक ही निग के थे ।

सांख्यिकीय सार्थकता III :

प्रसरण, प्रसरण का विश्लेषण, वैषम्य और ककुदता के माप, तथा सहसंबन्ध गुणांक

पुस्तक के इस अन्तिम अध्याय में, प्रतिदर्शों से परिकल्पित प्रसरणों, अनेक माध्यों के प्रसरण (प्रसरण का विश्लेषण), प्रतिदर्शों से उपलब्ध β_1 और β_2 के मानों, तथा सहसंबन्ध गुणांकों की ओर ध्यान देंगे।

प्रसरण

प्रतिदर्श प्रसरणों, $\hat{\sigma}^2$ पर हमारा विचार-विमर्श समान्तर माध्यों और अनुपातों के दण्डन का हम दृष्टि से समानान्तर होगा कि हम पहले $\hat{\sigma}^2$ और σ^2 के मध्य अन्तर पर विचार करेंगे, फिर σ^2 की विश्वास्यता सीमाएँ प्राप्त करेंगे, और तब हम दो प्रतिदर्श प्रसरणों की तुलना करेंगे। इसके अतिरिक्त, अनेक प्रतिदर्श प्रसरणों की तुलना करने के एक ढंग पर भी विचार करेंगे।

सामान्य समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्शों के प्रसरणों का न तो प्रसामान्य रूप में और न ही सममित रूप से बंटन होता है। उनका बंटन एक विपरिमित वक्र का अनुगमन करता है (दाएँ को विपरिमित), जिसका यथार्थ आकार σ^2 और N पर निर्भर है। क्योंकि P के कतिमय मानों के लिए $\hat{\sigma}^2$ के मानों को प्रस्तुत करने वाली सारणियों को तक रूप में σ^2 तथा N दोनों को ग्रहण करना पड़ेगा और इसलिए वे बहुत विस्तृत होंगी, अतः यह सौभाग्यपूर्ण है कि स्वतन्त्र के $N-1$ अंशों के लिए $(N-1)\hat{\sigma}^2 - \sigma^2$ काईबर्ग बंटन का अनुगमन करता है। इस प्रकार, हम लिखते हैं

$$J = \frac{(N-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

यदि $\hat{\sigma}^2$ की अपेक्षा s^2 प्रदत्त हो, तो हम $\hat{\sigma}^2$ को निम्न व्यंजक से प्राप्त कर सकते हैं

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{N}{N-1} s^2.$$

विकल्पतः, हम X^2 परीक्षण का X^2 के लिए $n=N-1$ के साथ निम्न रूप में प्रयोग कर सकते हैं

$$J^2 = \frac{Ns^2}{\sigma^2}.$$

$\hat{\sigma}^2$ और σ^2 के मध्य अन्तर को साधकता—सारणी 24.1 के नीचे यह देखा जा सकता है कि 10 टुकड़े तावे के मूल तार के लिए $\hat{\sigma}^2$ का मान 75.73 था। इस स्थिति में, अन्य अनेक स्थितियों के समान, हम σ^2 का मान नहीं जानते, लेकिन, उदाहरण के लिये, हम मान लेंगे कि $\sigma^2 = 46.42$ और इस परिक्ल्पना का परीक्षण करेंगे कि $\hat{\sigma}^2 = 75.73$, $\sigma^2 = 46.42$ वाली समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श का प्रसरण है। 0.05 का हम अपनी कसौटी के रूप में प्रयोग करेंगे। I^2 के परिकलन से हम पाते हैं

$$\chi^2 = \frac{(N-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{(9)(75.73)}{46.42} = 14.683$$

क्योंकि $n = 10 - 1 = 9$ परिशिष्ट ज का I^2 सारणी से यह प्रकट होता है कि यदि $\sigma^2 = 46.42$ तो $\sigma^2 = 75.73$ या अधिक को प्राप्त करने की प्रायिकता, 10 के प्रतिदर्शों के लिए, प्राय निश्चित रूप से 0.10 है। हमारी परिकल्पना अविश्वसनीय नहीं है। ध्यान दीजिए कि, इन प्रयोग में, χ^2 से हमें एक निराला परीक्षण प्राप्त होता है क्योंकि जो प्रायिकता प्राप्त की गई वह $\hat{\sigma}^2$ के मानों को प्रेषित के तुल्य या अधिक की घोर संकेत करती है।

यदि हम $\hat{\sigma}^2$ के मानों पर विचार करने में रुचि रखते हैं जो कि σ^2 के मान की परीक्षा कम है तो हमारे लिए पहुँच के एक से अधिक मार्ग खुल जाते हैं। वही पूर्ण अन्तर दिखाने हुए परन्तु विपरीत दिशा में हम $\hat{\sigma}^2$ के मान की प्रायिकता अनिश्चित कर सकते हैं। अर्थात् $\hat{\sigma} = 17.11$ दिक्ल्पना, हम $\hat{\sigma}^2$ का मान निर्धारित कर सकते हैं जो कि $n = 9$ के लिए γ के बटन के निचले 10 प्रतिशत सिरे को काटता है। बारी बारी इन दोनों का विचार करने पर हम पाते हैं कि जब $\hat{\sigma}^2 = 17.11$ तो

$$I^2 = \frac{(9)(17.11)}{46.42} = 3.317,$$

और प्रायिकता लगभग 0.05 है कि $\hat{\sigma}^2$ के मान 17.11 के बराबर अथवा इससे कम होंगे। $\hat{\sigma}^2$ का मान जो कि I^2 के बटन के निचले 10 प्रतिशत सिरे को काटता है, $P = 0.90$ के लिए χ^2 के मान का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है जब परिशिष्ट ज में $n = 9$ है। यह 4.168 है और हम निम्नलिखित हैं

$$4.168 = \frac{9\hat{\sigma}^2}{46.42} \text{ अतः } \hat{\sigma}^2 = 21.50$$

I^2 परीक्षण में $\hat{\sigma}$ से σ^2 तक का अनुपात समन्वित है। इस तथ्य से पाठकों को पहले ही सूझ गया होगा कि जब $n = 9$ और जब $\chi^2 = 14.684$ (I^2 का मान ऊपरी 0.10 बिन्दु पर) तो परिकल्पना 0.10 की प्रायिकता $\hat{\sigma}^2$ और σ^2 के लिए $14.684 - 9 = 1.632$ अनुपात प्रदान करती हुई मानों के किसी भी युग्म की घोर संकेत कर सकती है। जब कभी $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = 1.632$ तो $\hat{\sigma}^2$ का मान ऊपरी 0.10 बिन्दु पर होगा। संकेत चिह्नो में,

$$\frac{\chi^2}{n} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2},$$

1 अनुपात $\frac{\hat{\sigma}}{\sigma} = \frac{I}{n}$, F का विषय प्रयोग है (देखिए पृष्ठ 645) जब $n_2 = \infty$.

और इस सम्बन्ध से परिशिष्ट T की सारणी तैयार की गई थी। यह सारणी केवल $\hat{\sigma}^2$ को σ^2 से विभाजित करके $\hat{\sigma}^2$ की प्रतिदर्शी सीमाओं का परिकलन करने के योग्य बनाती है, इस प्रकार χ^2 का परिकलन अनावश्यक हो जाता है। पूर्ववर्ती उदाहरण के लिए, जहाँ $\hat{\sigma}^2 = 17.11$ और $\sigma^2 = 46.42$ वहाँ अनुपात 0.3686 है। इस अनुपात को परिशिष्ट T में $n=9$ के लिए देखने पर लगभग 0.05 की प्रायिकता (निम्नतर बिन्दु) प्राप्त होती है जो ठीक वही है जो पहले प्राप्त हुई थी।

σ^2 की विश्वास्यता सीमाएँ—हम σ^2 की विश्वास्यता सीमाएँ प्राप्त करने के लिए χ^2 का भी प्रयोग कर सकते हैं। कठोर ताँबे के तार के आँकड़ों के लिए $\hat{\sigma}^2 = 75.73$ और $N=10$ σ^2 की 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ क्या हैं? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए, हम परिशिष्ट J से $n=9$ के लिए दो काईवर्ग मानों का प्रयोग करते हैं एक तो उच्च 0.05 बिन्दु पर तथा एक निम्न 0.05 बिन्दु पर (परिशिष्ट J में 0.95 बिन्दु)। ये χ^2 मान हैं 16.919 और 3.325 और हम σ^2 के लिए $\chi^2 = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ को हल करते हैं

$$16.919 = \frac{(9)(75.73)}{\sigma_1^2},$$

$$16.919\sigma_1^2 = 681.57,$$

$$\sigma_1^2 = 40.28,$$

और

$$3.325 = \frac{(9)(75.73)}{\sigma_2^2},$$

$$3.325\sigma_2^2 = 681.57,$$

$$\sigma_2^2 = 205.0$$

σ^2 की 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ 40.28 और 205.0 हैं। पूर्ववत् यदि हम प्रसामान्य समष्टि के यादृच्छिक प्रतिदर्शों में इस प्रकार की अनेक 90 प्रतिशत सीमाओं का परिकलन करें तो हमारे कथनों में समय के 90 प्रतिशत में समष्टि मान सम्मिलित होगा और समय के 10 प्रतिशत में इसे सम्मिलित करने में हम असफल रहेंगे। रीजर पी० डोयल ने प्रसामान्य समष्टि से शूहार्ट के 1,000 प्रतिदर्शों में स प्रत्येक के लिए σ^2 की 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं का परिकलन किया। 904 उदाहरणों में उसकी सीमाओं में σ^2 सम्मिलित था, लेकिन 96 प्रतिदर्शों में ऐसा नहीं था।

हम χ^2 व्यंजक को नया रूप दे सकते हैं

$$\chi^2 = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

जो इस प्रकार पढ़ा जाए

$$\frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}^2} = \frac{n}{\chi^2}$$

ताकि हम एक लेमी गारणी बनाने में सक्षम हो सकें जिसमें σ^2 की विश्वास्यता सीमाएँ प्राप्त की जा सकें। इस प्रकार की गारणी परिशिष्ट 8 के रूप में दी गई है। σ^2 की 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ प्राप्त करने के लिए इसका प्रयोग करते हुए, जब $n=9$, जिसे Y^2 का प्रयोग करके अभी प्राप्त किया गया था, हम परिकलन करेंगे

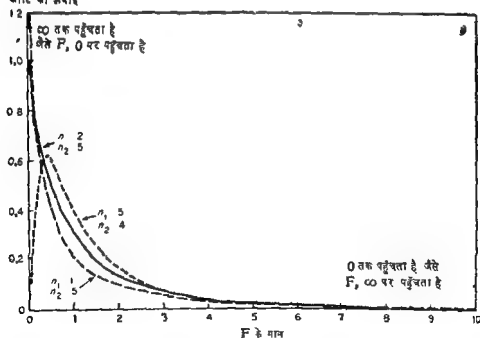
$$\sigma_1^2 = 0.5319\hat{\sigma}^2 = (0.5319)(75.73) = 40.28,$$

और

$$\sigma_2^2 = 2.707\hat{\sigma}^2 = (2.707)(75.73) = 205.0$$

दो प्रतिद्वंद्व प्रसरणों के मध्य अन्तर की सार्थकता— अध्याय 24 में हमने निम्न प्रथम चर्चणुदत्तों (दाढ़ों) के दो समुच्चयों की माध्य लम्बाइयों के मध्य अन्तर की सार्थकता पर विचार किया था जिनके $N_1=16$, $s_1=0.72$, $N_2=9$, और $s_2=0.62$ थे। हमने पहले ही पाया था कि \bar{X}_1 और \bar{X}_2 के मध्य कोई सार्थक अन्तर नहीं था। 0.05 स्तर को अपनी कसौटी के रूप में प्रयोग करते हुए, आइए, हम इस परिकल्पना का परीक्षण करें कि σ^2 के सम्बन्ध में दो प्रतिद्वंद्व एक ही समष्टि में से थे।

कोटि की ऊँचाई



घाट 26.1 $n_1=1$, $n_2=5$, $n_1=2$, $n_2=5$, और $n_1=5$, $n_2=4$ के लिए F का घटन। संतिष्ठ तथा ऊर्जाधर पैमाने ∞ तक जाते हैं। F घटन की कोटियुनिम्न व्यञ्जक से प्राप्त हुई है

$$Y_c = \frac{\frac{n_1-2}{F} \cdot \frac{\left(\frac{n_1+n_2-2}{2}\right)^{\frac{n_1}{2}} (n_1)^{\frac{n_1}{2}} (n_2)^{\frac{n_2}{2}}}{(n_1 F + n_2) \cdot \frac{n_1+n_2-2}{2} \left(\frac{n_1-2}{2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \left(\frac{n_2-2}{2}\right)^{\frac{n_2}{2}}}}{\left(\frac{n_1-2}{F}\right)^{\frac{n_1}{2}} \left(\frac{n_1+n_2-2}{2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \left(\frac{n_2-2}{2}\right)^{\frac{n_2}{2}}}$$

जब $\hat{\sigma}_1^2$ और $\hat{\sigma}_2^2$ एक ही प्रामाण्य नमूने से σ^2 के स्वतन्त्र आकलन हैं तो इनका अनुपात $\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$, $n_1 = N_1$, और $n_2 = N_2 - 1$ स्वातन्त्र्य-अंशों के साथ F बटन के अनुसार विभाजित है। यदि $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2$ तो F का मान 1.0 होगा। F के मान 0 से 0.999... तक विचरण करते हैं, जब $\hat{\sigma}_1^2 < \hat{\sigma}_2^2$, और 1.000... 1 से ∞ तक जब $\hat{\sigma}_1^2 > \hat{\sigma}_2^2$ । F बटन "विपरीत-J" आकार का है, जब $n_1 = 1$, अथवा $n_1 = 2$, और दाहिनी ओर को तिरछा है, जब $n_1 \geq 3$ कतिपय F बटन चार्टें 26.1 में दिखाए गए हैं।

निम्न प्रथम चरणदत्तों के आंकड़ों के लिए अध्याय 24 में, हमने देखा $\Sigma x_1^2 = 8.29$ तथा $\Sigma x_2^2 = 3.46$ । परिणामतः,

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\Sigma x_1^2}{N_1 - 1} = \frac{8.29}{16 - 1} = 0.553,$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{\Sigma x_2^2}{N_2 - 1} = \frac{3.46}{9 - 1} = 0.432,$$

और

$$F = \frac{0.553}{0.432} = 1.28,$$

$n_1 = 15$ और $n_2 = 8$ के साथ। n_1 और n_2 के चुने हुए मानों और बटन के दाहिने सिरे में 0.10, 0.05, 0.025, 0.01, और 0.001 की प्रायिकताओं के लिए F के मान परिशिष्ट ड में दिए गए हैं। उस परिशिष्ट के सदृश से हम पाते हैं कि $n_1 = 15$ दिया नहीं गया है, लेकिन $n_1 = 12$ और $n_1 = 24$ दिए हैं, और ऐसे ही $n_2 = 8$ है। $n_1 = 15$ के लिए अन्तर्वेशन करना आवश्यक नहीं है, क्योंकि $F \geq 1.28$ की प्रायिकता 0.10 से बड़ जाती है, चाहे हम $n_1 = 12$ और $n_2 = 8$ पर विचार करें, अथवा $n_1 = 24$ और $n_2 = 8$ पर। $\hat{\sigma}_1^2$ का प्रेक्षित मान $\hat{\sigma}_2^2$ के प्रेक्षित मान से मार्थक रूप में नहीं बड़ता। परन्तु विपरीत दिशा में अन्तरों का क्या करण है?

यदि $\hat{\sigma}_1^2$, $N_1 = 16$ के साथ 0.432 होता और $\hat{\sigma}_2^2$, $N_2 = 9$ के साथ 0.553 होता तो $n_1 = 15$ तथा $n_2 = 8$ के साथ हमारे पास रहता $F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{0.432}{0.553} = 0.781$ अब, परिशिष्ट ड की मारणी F के 1.0 से छोटे किसी भी मान को सम्मिलित नहीं करती। जब F का मान एक से कम हो, हम उस F मान या कम की प्रायिकता को $\frac{1}{F}$ के परिकलन के द्वारा प्राप्त कर सकते हैं जो 1.0 से बड़ जाएगी, और स्वतन्त्रता की मात्राओं को विपरीत दिशा में मोड़ देंगे। अर्थात्, $n_1 = 8$ तथा $n_2 = 15$ के साथ हम देखेंगे

$$F = \frac{1}{0.781} = 1.28$$

3 इस पुस्तक के लेखकों द्वारा एक संक्षिप्त भारतीय तैयार की गई थी जो दोनों उच्च तथा निम्न विद्युजों को दिखाती है। वह एफ० ई० प्रॉबस्टन के ग्रन्थ 'ऐलिमेंट्री स्टैटिस्टिक्स विद ऐप्लीकेशन्स इन मॅडिसिन, एन्ड दि बायलॉजिकल साइन्स', डार्वर प्रकाशन, इका०, न्यूयार्क, 1959 पृष्ठ 334-335 पर मिल सकती है।

यह करते हुए, हम पाते हैं कि $F \geq 1.28$ की प्रायिकता, जब $n_1 = 8$ और $n_2 = 15$ है, 0.10 से अधिक, इसलिए, $F \leq 0.781$ के मान के लिए, $n_1 = 15$ और $n_2 = 8$ के साथ भी प्रायिकता 0.10 से अधिक होगी।

σ^2 के कतिपय मानों की तुलना—कभी-कभी यह जानना महत्वपूर्ण होता है कि σ^2 के कतिपय मानों के मध्य एकरूपता रहती है अथवा नहीं। एक पैनिल बनाने वाली कम्पनी ने अपनी तथा अन्य पाँच प्रतियोगी कम्पनियों के द्वारा बनाई हुई पैनिलों के भिन्नो की शक्ति का परीक्षण किया। परीक्षण में 1, 2, 2.5, 3 और 4 में से प्रत्येक कठोरता की पाँच-पाँच पैनिलें हर कम्पनी की सम्मिलित की गईं। प्रत्येक पैनिल का चार बार परीक्षण किया गया।

एक कम्पनी द्वारा बनाई हुई 2 नम्बर की पाँच पैनिलों के लिए, जिसे हम "कम्पनी D" कहेंगे परीक्षण⁴ दिखाता है $\hat{\sigma}_1^2 = 0.01316$, $\hat{\sigma}_2^2 = 0.05667$, $\hat{\sigma}_3^2 = 0.02787$, $\hat{\sigma}_4^2 = 0.01910$, $\hat{\sigma}_5^2 = 0.01529$, $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N_5 = 4$ इन प्रसरणों की तुलना करने का एक उपाय $\hat{\sigma}_1^2$ तथा $\hat{\sigma}_2^2$ के लिए $\hat{\sigma}_1^2$ और $\hat{\sigma}_2^2$ के लिए और इसी प्रकार से भ्रमे भी F का दृक्चलन करना होगा। तुरन्त अन्य प्रविधि σ^2 सभी मानों की L माप के माध्यम द्वारा तुलना करने की होगी जिसका उल्लेख कभी-कभी प्रायिकता की कसौटी के रूप में किया जाता है।

$$L = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2 \times \hat{\sigma}_2^2 \times \dots \times \hat{\sigma}_k^2}}{\frac{1}{k}(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \dots + \hat{\sigma}_k^2)}$$

यदि $N_1 = N_2 = \dots = N_k$ । यदि प्रतिदर्शों में मदों की बदलती सरायाएँ सम्मिलित हो,

$$L = \frac{\sqrt{n_1(\hat{\sigma}_1^2)^{n_1} \times (\hat{\sigma}_2^2)^{n_2} \times \dots \times (\hat{\sigma}_k^2)^{n_k}}}{\frac{1}{n}(n_1\hat{\sigma}_1^2 + n_2\hat{\sigma}_2^2 + \dots + n_k\hat{\sigma}_k^2)}$$

जहाँ $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ । ग्रहण सब $\hat{\sigma}^2$, का गुणोत्तर माध्य है जब कि हर सब $\hat{\sigma}^2$, का समांतर माध्य है। हम पहले ही जानते हैं (अध्याय 9) कि मानों की एक श्रेणी का गुणोत्तर माध्य, जो सब एकसमान नहीं है, उन्ही मानों के समांतर माध्य की अपेक्षा कम है। माध्य ही, जितने अधिक विभिन्न मान होंगे, G और \bar{X} के मध्य उसी मात्रा में अन्तर अधिक होगा। अब, यदि $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2 = \dots = \hat{\sigma}_k^2$, तो अधिकतम एकरूपता की अवस्था प्राप्त होगी और L का मान 1.0 होगा। यदि सब $\hat{\sigma}^2$ के मध्य कोई अन्तर है, तो L का मान 1.0 से कम होगा और निम्न सीमा पर 0 को स्पर्श करेगा। $L=0$ एकरूपता के अधिकतम अभाव की स्थिति का प्रतिनिधित्व करती है और एक गैरान्तरिक सीमा है जो वास्तविक व्यवहार में प्राप्त नहीं होगी।

D कम्पनी द्वारा बनाई हुई 2 नम्बर की पाँच पैन्सिलों के लिए L के परिकलन से हम प्राप्त करते हैं

$$L = \frac{\sqrt{0.01316 \times 0.05667 \times 0.02787 \times 0.01930 \times 0.01529}}{\sqrt[5]{(0.01316 + 0.05667 + 0.02787 + 0.01930 + 0.01529)}}$$

$$= \frac{0.02278}{0.02646} = 0.86$$

क्योंकि 0.86 1.0 से बहुत भिन्न नहीं है, यह प्रतीत होगा कि σ^2 के पाँच मानों के मध्य एकरूपता विद्यमान है। तो भी हम जानना चाहते हैं कि क्या $L=0.86$ सार्थक रूप से 1.0 से भिन्न है। परीक्षण के अन्तर्गत परिकल्पना है कि पाँच प्रसरण σ^2 के सम्बन्ध में एक ही समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्शों में से हैं। प्रामाण्य समष्टि से लिए गए प्रतिदर्शों के लिए L का बटन J आकार का है, जैसा कि परिशिष्ट ड के ऊपर छोटे चार्ट के द्वारा दिखाया गया है। यह परिशिष्ट N , और k के विभिन्न मानों के लिए, 0.05 और 0.01 बिन्दुओं पर L के मान देता है, जहाँ N , समान आकार के प्रतिदर्शों में से किसी एक में मदों की संख्या का उल्लेख करता है। हमारे प्रमेय के लिए, $N_1=4$ और $k=5$, और परिशिष्ट ड से यह प्रकट होता है कि 0.05 बिन्दु पर $L=0.491$ है जब कि 0.01 बिन्दु पर $L=0.370$ है। यह स्पष्ट है कि $L=0.86$ का प्रेक्षित मान 1.0 से सार्थक रूप में भिन्न नहीं है, परिकल्पना अविश्वसनीय नहीं है।

L के मानों का परिकलन अन्य पाँच कम्पनियों में से प्रत्येक द्वारा बनाई हुई 2 नम्बर की पैन्सिलों के प्रसरणों के लिए किया गया था। एक उदाहरण में पूर्ववत्, $N_1=4$ तथा $k=5$ के माध्य $L=0.30$ है। L के लिए यह मान 0.01 बिन्दु से परे है और सार्थक रूप से 1.0 से भिन्न समझा जाएगा।

प्रसरण का विश्लेषण

अध्याय 24 में हमने दो माध्यों के बीच अन्तर की सार्थकता पर विचार किया था। प्रसरण के विश्लेषण की आगामी चर्चा दो अथवा अधिक माध्यों से सम्बन्ध रखती है। अपने सरलतम रूप में प्रसरण का विश्लेषण σ^2 के दो स्वतन्त्र आकलनों से सम्बन्धित होगा जिनकी पारस्परिक तुलना F के माध्यम से की जायेगी।

बर्गीकरण की एक कसौटी—सारणी 26.1 में तीन दूसरी जातियों के पक्षियों के घोंसलों से प्राप्त यूरोपीय कोयल के अण्डों की लम्बाई के आंकड़े प्रस्तुत किए गए हैं। यूरोपीय कोयल अपने अण्डे दूसरे पक्षियों से भेवाती है तथा उनसे ही अपने बच्चे पलवाती है। हमारी रुचि यह जानने में है कि क्या गौरैया, रॉबिन तथा भुदकनी चिड़ियों के घोंसलों में पाये कोयल के अण्डों की माध्य लम्बाई एक दूसरे से सार्थक रूप में भिन्न है। हम प्रथम माध्यों की द्वितीय से, प्रथम की तृतीय से और द्वितीय की तृतीय से तुलना नहीं करेंगे। हम तीनों माध्यों का विचार एक समूह में करेंगे। और उन तीनों माध्यों (समष्टि में प्रसरण का एक आकलन) के आकलित प्रसरण की तुलना तीनों स्तम्भों (समष्टि में प्रसरण का द्वितीय आकलन) के भीतर आकलित प्रसरण के साथ करेंगे।

सारणी 26.1 के आँकड़ों का श्रेणी विभाजन एक निकष के अनुसार हुआ है : पक्षी की जातियाँ जिनके घोंसलों में कोयल के अण्डे पाये गए थे। इस प्रकार की सारणी के लिए विचरण के तीन मोत हैं।

1 स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण—स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण प्रत्येक स्तम्भ माध्य ($\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots$) और “महामाध्य” के बीच अन्तरों को लेकर, (\bar{X} , सभी मानों का समांतर माध्य) प्रत्येक अन्तर का वर्ग बनाते हुए, प्रत्येक वर्गीकृत अन्तर को समुचित स्तम्भ (N_1, N_2, N_3, \dots) में मदों की संख्या से गुणा करते हुए, और योग करते हुए प्राप्त किया गया है। सांकेतिक रूप से, यह है

$$N_1 (\bar{X}_1 - \bar{X})^2 + N_2 (\bar{X}_2 - \bar{X})^2 + N_3 (\bar{X}_3 - \bar{X})^2 + \dots$$

\bar{X}_c का स्तम्भ माध्य के लिए, N_c का स्तम्भ में मदों की संख्या के लिए और k_c का स्तम्भों की संख्या के लिए प्रयोग करते हुए, स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\sum_1^{k_c} [N_c (\bar{X}_c - \bar{X})^2],$$

जहाँ $\sum_1^{k_c}$ बताता है कि k_c स्तम्भों के ऊपर सकलन करना है। जो व्यंजक अभी दिया गया था वह k_c स्तम्भ माध्यों और महामाध्य के परिकलन को आवश्यक बताता है। जैसा कि परिशिष्ट ध, परिच्छेद 26.1 में दिखाया गया है, यह आवश्यक नहीं है कि

$$\sum_1^{k_c} [N_c (\bar{X}_c - \bar{X})^2] = \sum_1^{k_c} \left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} X \right)^2}{N_c} \right] - \left(\frac{\sum X}{N} \right)^2,$$

जहाँ $\sum_1^{N_c}$ स्तम्भ में N_c मदों के सकलन की ओर उल्लेख करता है $N = N_1 + N_2 + N_3$

सारणी 26.1 के नीचे दिखाए गए पंक्ति से

$$\begin{aligned} \sum_1^{k_c} \left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} X \right)^2}{N_c} \right] - \frac{(\sum X)^2}{N} &= 22,311.15 - \frac{1,002,601.69}{45}, \\ &= 22,311.15 - 22,280.04, \\ &= 31.11 \end{aligned}$$

5. यदि $N_1 = N_2 = N_3 = \dots$ तो व्यंजक

$$\sum_1^{k_c} \left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} X \right)^2}{N_c} \right]$$

को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{\sum_1^{k_c} \left(\sum_1^{N_c} Y \right)^2}{N_c}$$

सारणी 26 1

मानो के परिकलन जो कि पक्षियों की तीन विभिन्न जातियों के घोंसलों में प्राप्त कोयल के अण्डों की लम्बाई के अंकड़ों के प्रसरण का विश्लेषण करने के लिए आवश्यक हैं

गौरैया		रॉबिन		फुदकनी चिड़िया	
X_1	X_1^2	X_2	X_2	X_3	X_3^2
22 0	484 00	21 8	475 24	19 8	392 04
23 9	571 21	23 0	529 00	22 1	488 41
20 9	436 81	23 3	542 89	21 5	462 25
23 8	566 44	22 4	501 76	20 9	436 81
25 0	625 00	22 4	501 76	22 0	484 00
24 0	576 00	23 0	529 00	21 0	441 00
21 7	470 89	23 0	529 00	22 3	497 29
23 8	566 44	23 0	529 00	21 0	441 00
22 8	519 84	23 9	571 21	20 3	412 09
23 1	533 61	22 3	497 29	20 9	436 81
23 1	533 61	22 0	484 00	22 0	484 00
23 5	552 25	22 6	510 76	20 0	400 00
23 0	529 00	22 0	484 00	20 8	432 64
23 0	529 00	22 1	488 41	21 2	449 44
		21 1	445 21	21 0	441 00
		23 0	529 00		
323 6	7,494 10	360 9	8 147 53	316 8	6,698 78

आकृष्ट, ओल्वाहट एच० लैटर के दि एच बाक न्यूक्लियस कैलोरम, बायोमेट्रिक्स, खण्ड 1, पृष्ठ 173 से।

$$N=45$$

$$\Sigma X = 323.6 + 360.9 + 316.8 = 1001.3$$

$$(\Sigma X)^2 = (1001.3)^2 = 1,002,601.69$$

$$\Sigma Y^2 = 7,494.10 + 8,147.53 + 6,698.78 = 22,340.41$$

$$\sum_{i=1}^k \left[\frac{\left(\frac{N_i}{\Sigma X} \right)^2}{N_i} \right] = \frac{(323.6)^2}{14} + \frac{(360.9)^2}{16} + \frac{(316.8)^2}{15} = 22,311.1495$$

2 स्तम्भों के भीतर विचरण—स्तम्भों के भीतर विचरण स्तम्भ माध्या से स्तम्भों में मानों का विचरण है। यह एक स्तम्भ और स्तम्भ माध्य में प्रत्येक मद के बीच अंतर लेकर अंतरों का वर्ग बनाकर स्तम्भ के लिए वर्ग सारों का योग करके दूसरे स्तम्भों के लिए भी यही प्रक्रिया दोहरा कर और सभी स्तम्भों के योगों को जोड़ कर प्राप्त किया गया है। सांकेतिक रूप से स्तम्भों के भीतर विचरण है

$$\sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=1}^{N_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 \right]$$

इस व्यंजक में k स्तम्भ माध्या का परिकलन और N अंतरों का निर्धारण सम्मिलित है। य कियाए अनावश्यक है क्योंकि परिशिष्ट 26.2 को दिखाता है कि

$$\sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=1}^{N_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 \right] = \sum_{i=1}^N \left[\frac{(\sum_{j=1}^k X_{ij})^2}{N_j} \right]$$

और फिर से सारणी 26.1 के नीचे परिकलनों का उल्लेख करते हुए हम पाते हैं

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{(\sum_{j=1}^k X_{ij})^2}{N_j} \right] = 22\,340\,41 - 22\,311\,15$$

$$= 29\,26$$

3 कुल विचरण—कुल विचरण महामाध्य से सभी मानों के वर्गीकृत विचलना का योग है। यह Ns^2 जसा ही है जहा s प्रामाणिक विचलन है जिसकी व्याख्या अध्याय 10 में की गई थी। सांकेतिक रूप से कुल विचरण है

$$\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2$$

यह आवश्यक नहीं है कि इस व्यंजक में उल्लिखित N विचलन प्राप्त किये जाए क्योंकि परिशिष्ट 10.2 में दिखाई गई प्रविधि के समान प्रविधि से यह दिखाया जा सकता है कि

$$\sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 = \sum_{i=1}^N X_{ij}^2 - \frac{(\sum_{j=1}^k X_{ij})^2}{N_j}$$

कोयन के अण्डों के आंकड़ों के लिए

$$\sum_{i=1}^N X_{ij}^2 - \frac{(\sum_{j=1}^k X_{ij})^2}{N_j} = 22\,340\,41 - \frac{1\,002\,601\,69}{45}$$

$$= 22\,340\,41 - 22\,280\,04 = 60\,37$$

ध्यान दीजिये हमारे द्वारा प्राप्त प्रथम दो मानों का योग तृतीय मान के बराबर है। अर्थात् स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण + स्तम्भों के भीतर विचरण कुल विचरण। यह इस प्रकार के सभी प्रयोगों के लिए सत्य है क्योंकि

$$\left\{ \sum_1^{k_c} \left[\frac{\left(\frac{k_c}{\sum X} \right)^2}{N_c} \right] - \frac{(\sum X)^2}{N} \right\} + \left\{ \sum X^2 - \sum_1^{k_c} \left[\frac{\left(\frac{N_c}{\sum X} \right)}{N_c} \right] \right\} = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}.$$

जैसाकि बाद में देखा जाएगा कुल विचरण के लिए सत्यात्मक मान का कोई उपयोग नहीं किया जाएगा। तथापि, अन्य मानों के ऊपर रोक के रूप में इसका परिकलन करना अच्छा है।

आकलित प्रसरण—यह निश्चित करने के लिये कि क्या संयोगवश प्राप्त गणना की अपेक्षा स्तम्भ माध्य अधिक भिन्न हैं, हमारा उद्देश्य स्तम्भ माध्यों के बीच आकलित प्रसरण का स्तम्भों के भीतर आकलित प्रसरण से तुलना करना है। स्तम्भों के भीतर आकलित प्रसरण हमारी संयोग प्रसरण की कसौटी है, क्योंकि स्तम्भों में मदों का विचलन $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ के माध्य अन्तरों द्वारा प्रभावित नहीं होता। विचलन को स्वतन्त्रता के अंशों की उपयुक्त सख्या के द्वारा विभाजित करके विचलन से आकलित प्रसरण प्राप्त किया गया है। हमारे प्रमेय के लिए, स्तम्भ माध्यों के बीच आकलित प्रसरण का $n=2$ है, क्योंकि तीन स्तम्भ माध्यों के विचलन \bar{X} से लिये गये थे। स्तम्भों में आकलित प्रसरण के लिए, $n = N_1 - 1 + N_2 - 1 + N_3 - 1 = 14 - 1 + 16 - 1 + 15 - 1 = 42$, क्योंकि प्रत्येक स्तम्भ में विचलन स्तम्भ माध्य से लिए गए थे।

आकलित प्रसरणों का परिकलन मारणी 26.2 में दिखाया गया है और उनसे हम पाते हैं

$$F = \frac{15.56}{0.6967} = 22.3,$$

$n_1=2$ और $n_2=42$ के माथ। परिशिष्ट ड की F मारणी में $n_2=42$ के लिए पंक्ति नहीं है तथापि यह स्पष्ट है कि $F \geq 22.3$ की प्राप्ति की प्रायिकता 0.001 की अपेक्षा बहुत कम है और हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि पक्षियों की तीन विभिन्न जातियों के घोंसलों में प्राप्त अण्डों की माध्य लम्बाई के बीच वास्तविक अन्तर है। यह रुचिकर है कि बाद में सांख्यिकी-रहित खोज में पता चला कि यूरोपीय कोयल आतिथेय विशिष्टता⁶ प्रकट करती है, जिसका अर्थ है जाति के अन्तर्गत एक ही क्षेत्र में “विभिन्न जातियाँ, अथवा जनन समूह विद्यमान हैं, प्रत्येक एक भिन्न आतिथेय जाति से सम्बन्धित है और प्रत्येक उन्नी जाति की कम से कम किसी एक विशेषता में अपने को निपुण कर लेती है।”

परिकल्पना, जिसका हमने परीक्षण किया, यह थी कि स्तम्भ माध्यों के बीच आकलित प्रसरण और स्तम्भों के भीतर आकलित प्रसरण σ^2 के सम्बन्ध में एक ही समष्टि से थे। परिकल्पना अविवशनीय थी। यदि एक प्रसामान्य एकरूप समष्टि से प्रतिदर्श लिया जाता है तब हम अपेक्षा कर सकते हैं कि दो आकलित प्रसरण जिनका अभी उल्लेख हुआ है और $\hat{\sigma}^2$ (कुल विचरण पर आधारित आकलन) $\hat{\sigma}^2$ के उतने ही अच्छे आकलन हैं। परन्तु यदि भिन्नरूपता उपस्थित है, जैसाकि हमारे उदाहरण में था, तो $\hat{\sigma}^2$ और स्तम्भ माध्यों के

6. ऐन्डन एच० मिलर “मोशल पैरासाइट्स अमग बर्ड्स,” ड्राफ लिखित दि साइंटिफिक मथली वण्ड LXII, पृष्ठ 243, देख।

बीच आकलित प्रसरण दोनों उस भिन्नरूपता से प्रभावित होंगे। स्तम्भों के अन्दर आकलित प्रसरण प्रभावित नहीं होता है और इसलिए यह हमारे संयोग प्रसरण का माप सिद्ध हुआ।

कोयल के अण्डों की लम्बाई के आँकड़ों के F परीक्षण में ऐसी स्थिति थी जिसमें $n_1 = 2$ और $n_2 = 42$ । यदि सारणी 26.1 में हमारे पास तीन स्तम्भों की अपेक्षा प्रेक्षित आँकड़ों के दो स्तम्भ होने तो $n_1 = 1$ होता और हमारी समस्या Δ_1 और Δ_2 के बीच अन्तर की साधकता का परीक्षण करना होती जिस पर अध्याय 24 में विचार किया गया था। वास्तव में, जब कभी भी आकलित प्रसरण का F परीक्षण में $n_1 = 1$ है, तो t परीक्षण एक विकल्प होता है जो समान प्रायिकता प्रदान करता है। यदि हम परिशिष्ट 8 और ड पर दृष्टिमान करें तो यह स्पष्ट हो जाएगा। इनमें यह देखा जा सकता है कि, किसी भी प्रदत्त प्रायिकता के लिए, t^2 का मान F के मान के समान है जब t के लिए n बराबर है F के लिए n_2 के और जब F के लिए $n_1 = 1$ । एक उदाहरण, जहाँ F के स्थान पर t : परीक्षण का प्रयोग हो सकता था, सारणी 26.6 में प्रदर्शित स्तम्भ माध्यों के बीच आकलित प्रसरण के परीक्षण में घटित होता है।

सारणी 26.2

कोयल के अण्डों की लम्बाई के आँकड़ों के प्रसरण के विक्षेपण के परिकलनों का मार

विचरण का स्रोत	विचरण की मात्रा	स्वातंत्र्य कोटियाँ	आकलित प्रसरण
स्तम्भ माध्यों के मध्य	31.11	2	15.56
स्तम्भों के अन्तर्गत	29.26	42	0.6967
योग... ..	60.37	44	

वर्गीकरण के दो निकष, प्रत्येक बक्से में एक प्रविष्टि—सारणी 26.1 के आँकड़ों में श्रेणीकरण का केवल एक निकष विद्यमान है, घोंसले का प्रकार जिसमें कोयल के अण्डे पाये गए। सारणी 26.3 में वर्गीकरण के दो निकष हैं (1) विभिन्न पेन्सिले, जिनमें से वहाँ पाँच थी, और (2) पेन्सिल का स्थल जहाँ परीक्षण किया गया था, प्रत्येक पेन्सिल के चार स्थलों पर परीक्षण किया गया था। प्रत्येक पेन्सिल तेज की गई और परीक्षण किया गया, फिर दुबारा तेज करके परीक्षण किया गया, और फिर यही प्रक्रिया दोहराई गई। यह संभव है कि स्थल के परिवर्तन को सिक्के की शक्ति की उत्तरोत्तर वृद्धि अथवा कमी से सम्बद्ध किया जा सके।

सारणी 26.3 में $5 \times 4 = 20$ बक्सों⁷ अथवा प्रेक्षित आँकड़ों की कोशिकाएँ हैं, जिनमें से प्रत्येक में केवल एक प्रविष्टि है। हम बाद में देखेंगे कि यह वांछित होगा कि बक्से में एक से अधिक प्रविष्टि हो, यदि यह सम्भव हो। तो भी, कुछ ऐसी स्थितियाँ हैं, जैसी कि वर्तमान, जिनमें केवल एक ही प्रविष्टि सम्भव है। हम अधिक पेन्सिलें सम्मिलित कर सकते थे अथवा प्रत्येक पेन्सिल का अधिक स्थलों पर परीक्षण कर सकते थे, परन्तु हम एक पेन्सिल पर प्रदत्त स्थल पर एक से अधिक परीक्षण नहीं कर सकते।

7 इस पाठ में 'बक्सों' शब्द प्रयुक्त किया गया है, क्योंकि स्तम्भ का माध्य दिखाने के लिए हमने पहले ही Δ_0 का प्रयोग किया है और बाद में Δ_1 का प्रयोग बक्से का माध्य दिखाने के लिए करेंगे।

सारणी 26 3 के आंकड़ों के लिए हम पहले के समान स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण और कुल विचरण लेते हैं। तो भी स्तम्भ में कोई विचरण नहीं है किन्तु इसके स्थान पर, पक्ति माध्यों के बीच विचरण है और अवशिष्ट विचरण है जो (1) कुल विचरण और (2) स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण पक्ति माध्यों के बीच विचरण, के बीच अन्तर, का प्रतिनिधित्व करता है। प्रथम हम इनमें से प्रत्येक विचरण का परिकलन करेंगे।

कुल विचरण—व्यञ्जक वही है जो पहले प्रयुक्त किया था, और 26 3 के आंकड़ों के लिये, हमारे पास है

$$\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N} = 62\,3517 - \frac{1,236\,9289}{20} = 0\,505255.$$

सारणी 26.3

मानो का परिकलन जोकि "D कम्पनी" द्वारा बनाई हुई वेन्सिल नम्बर 2 के सिक्के की शक्ति के आंकड़ों के प्रसरण का विश्लेषण करने के लिए आवश्यक है

क प्रक्षिप्त आँकड़, किन्तु श्रमों और योगों में

वेन्सिल पर परीक्षण का स्थल	वेन्सिल 1 X_1	वेन्सिल 2 X_2	वेन्सिल 3 X_3	वेन्सिल 4 X_4	वेन्सिल 5 X_5	N_r ΣX 1	$\left(\frac{N_r}{1} \Sigma X\right)^2$
I	1.82	1.70	1.70	1.82	1.92	8.96	80.2816
II	1.56	1.36	1.68	1.98	1.86	8.44	71.2336
III	1.78	1.54	2.02	1.82	1.64	8.80	77.4400
IV	1.74	1.92	1.92	1.64	1.75	8.97	80.4609
N_r ΣX 1	6.90	6.52	7.32	7.26	7.17	35.17 ΣX	309.4161 $\sum \left(\frac{N_r}{1} \Sigma X\right)^2$

आंकड़ ईगल वेन्सिल क के लिए किए गए विभिन्न प्रकार की वेन्सिलों के परीक्षणों से।

ख प्रेषित आँकड़ों के वर्गों और योग

वेन्सिल पर परीक्षण का स्थल	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_5^2	योग
I	3.3124	2.8900	2.8900	3.3124	3.6864	16.0912
II	2.4336	1.8496	2.8224	3.9204	3.4596	14.4856
III	3.1684	2.3716	4.0804	3.3124	2.6896	15.6224
IV	3.0276	3.6864	3.6864	2.6856	3.0625	16.1525
योग	11.9420	10.7976	13.4792	13.2348	12.8981	62.3517 = ΣX^2

$$N_c = 4, N_r = 5, N = 20.$$

$$(\Sigma X)^2 = (35.17)^2 = 1,236.9289$$

$$\sum \left(\frac{N_c}{1} \Sigma X\right)^2 = (6.90)^2 + (6.52)^2 + (7.32)^2 + (7.26)^2 + (7.17)^2 = 247.8193$$

स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण पूर्व प्रयुक्त व्यंजक के प्रयोग द्वारा भी प्राप्त किया जा सकता है, लेकिन जैसा कि पाद-टिप्पणी 5 में सूचित किया गया है, जब स्तम्भों में मदों की संख्या समान हों तो यह तकनीक सरल किया जा सकता है। पेंसिल श्रॉकडों के लिए

$$\frac{\sum_{j=1}^k \left(\frac{N_{cj}}{\sum Y} \right)^2}{N_c} - \frac{(\sum X)^2}{N} = \frac{247\,8193}{4} - \frac{1,236\,9289}{20} = 0.108380$$

पंक्ति माध्यों के बीच विचरण—यह सकल्पना अभी दी गई सकल्पना के ठीक समानांतर है। निम्न सूक्तों का प्रयोग करते हुए,

P_r , पंक्ति का माध्य,

V_r , पंक्ति में मदों की संख्या,

k_r , पंक्तियों की संख्या,

$\sum_{r=1}^{k_r} \frac{1}{V_r}$ एक पंक्ति में V_r मदों के ऊपर योग, और

$\sum_{r=1}^{k_r} \frac{1}{V_r}$, k_r पंक्तियों के ऊपर योग,

और यह ध्यान रखते हुए कि पंक्तियों में मदों की संख्या समान है, हमारे पास है

$$\frac{\sum_{r=1}^{k_r} \left(\frac{N_{rj}}{\sum Y} \right)^2}{N_r} - \frac{(\sum X)^2}{N} = \frac{309\,961}{5} - \frac{1,236\,4289}{20} = 0.036775$$

अवशिष्ट विचरण—स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण तथा पंक्ति माध्यों के बीच विचरण का योग कुल विचरण से कम है। यह अंतर, जो

$$(0.50255) - (0.108380 + 0.036775) = 0.360100$$

है, जिसे प्रायः “अवशिष्ट विचरण” कहा जाता है, क्योंकि इसका प्रायः आकलन अवशिष्ट के रूप में किया जाता है। इस मान का परिकलन सीधे निम्न व्यंजक द्वारा करना सम्भव है

$$\sum (X + 1 - P_r - X_c)^2$$

सारणी 26.3 के श्रॉकडों के लिए, यह मध्य-माध्य परिकलन 0.360100 देता है, ठीक वही मान जो अवशिष्ट के रूप में प्राप्त हुआ था।

आकलित प्रसरण—सारणी 26.4 पूर्वगामी परिणामों का सार है और स्वतन्त्रता की कोटियों की संख्या तथा आकलित प्रसरणों को भी प्रदर्शित करती है। क्योंकि पाँच स्तम्भ माध्य हैं, जिनके विचरण का परिकलन X के चारों ओर किया गया था, अतः स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण में चार स्वतन्त्र कोटियाँ हैं। पंक्ति माध्यों के बीच विचरण के चार माध्य हैं, जिनका विचरण λ के सम्बन्ध में था, अतः पंक्ति माध्यों के बीच विचरण की तीन स्वातन्त्र्य कोटियाँ हैं। क्योंकि कुल विचरण में

सारणी 26 4

पेन्सिलो के सिक्के की शक्ति के आंकड़ों के प्रसरण का विश्लेषण करने के लिये परिकलनों का सार

विचरण का स्रोत	विचरण की मात्रा	स्वातन्त्र्य कोटियाँ	आकलित प्रसरण
स्तम्भ माध्यों के मध्य . .	0 108380	4	0 027095
पक्ति माध्यों के मध्य	0 036775	3	0 012258
अवशिष्ट	0 360100	12	0 030008
योग .. .	0 505255	19	...

$N-1=20-1=19$ स्वातन्त्र्य कोटियाँ हैं, अतः अवशिष्ट विचरण में $19-(4+3)=12$ स्वातन्त्र्य कोटियाँ हैं।

सारणी 26 4 के आकलित प्रसरणों से, अब हम दो F परीक्षण कर सकते हैं, जिनमें से एक स्तम्भ माध्यों के लिए

$$F = \frac{0.027095}{0.030008} = 0.903, \quad n_1 = 4, \quad n_2 = 12,$$

और दूसरा पक्ति माध्यों के लिए

$$F = \frac{0.012258}{0.030008} = 0.408, \quad n_1 = 3, \quad n_2 = 12$$

क्योंकि उनमें से कोई भी F मान 1.0 से अधिक नहीं बढ़ता, अतः यह स्पष्ट है कि न तो स्तम्भ माध्यों के बीच आकलित प्रसरण (अर्थात् पेन्सिलो के बीच) और न पक्ति माध्यों के बीच आकलित प्रसरण (अर्थात् स्थलों के बीच) हमारे संयोग प्रसरण के आकलन से नहीं बढ़ता। इसलिए कोई भी साधकता परीक्षण आवश्यक नहीं है।⁸ यदि पाठक की यह जानकारी हो कि क्या दोनों में से कोई F का मान 1.0 से साधक रूप में कम है तो उसे पूर्व निर्दिष्ट रीति से कार्य करना चाहिए: अर्थात् $\frac{1}{F}$ का परिकलन करें और यह मान परिशिष्ट ड में विपरीत स्वातन्त्र्य कोटियों के साथ देखें। वह पायेगा कि F का कोई भी मान 1.0 से साधक रूप में कम नहीं है।

ऊपर परिकलित F के दोनों मानों के लिए हम आकलित अवशिष्ट प्रसरण था; वह संयोग प्रसरण का हमारा माप था, क्योंकि यह विचरण के चार स्रोतों में से केवल एक था जो भिन्नरूपता से प्रभावित नहीं होगा। इस तथ्य से कि सारणी 26 3 में एक बक्स में केवल एक प्रविष्टि है यह असंभव हो जाता है कि जब एक बक्स में एक से अधिक प्रविष्टि हो तो विद्यमान और अलग किए जा सकने वाले दो तरफों का मूल्यांकन किया जाए। ये

8 यदि हम पेन्सिलो पर उन स्थलों की उपेक्षा करें जहाँ परीक्षण किये गये थे तो सारणी 26 3 के आंकड़ों वर्गीकरण के एक निष्कर्ष के साथ एक समस्या होगी। इस आधार पर भी स्तम्भ माध्यों के बीच प्रसरण (अर्थात् पेन्सिलो के बीच) साधक नहीं है। मूल अथवा अन्य का प्रथम संस्करण, पृष्ठ 356—359 देखिए।

है • (1) वर्गीकरण के दो निकषों के बीच परस्पर क्रिया तथा (2) बक्सों में विचरण।

वर्गीकरण के दो निकष, बक्स में एक से अधिक प्रविष्टियाँ—सारणी 26.5 का प्रथम भाग नौ प्रकार के कौंधमेलों के, मिनटों में, नई दशा में और 6 मास से 12 मास तक रखने के उपरान्त, जीवन आँकड़े दिखाता है। पहले की तरह यहाँ वर्गीकरण के दो निकष हैं परन्तु प्रत्येक बक्स में पाँच प्रविष्टियाँ हैं। कुल विचरण अब चार अवयवों से बना है स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण, पक्ति माध्यों के बीच विचरण, स्तम्भ तथा पक्ति माध्यों के बीच परस्पर क्रिया, और बक्सों के अन्दर विचरण। सारणी 26.5 में दिखाये योगों का प्रयोग करके हम इन सभी का सख्यात्मक मान प्राप्त करेंगे।

कुल विचरण—कुल विचरण के लिए व्यंजक वही है जो पहले प्रयुक्त हुआ है।

$$\begin{aligned}\frac{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}{N} &= 34,325,736 - \frac{2,874,460,996}{90} \\ &= 2,387,280.49\end{aligned}$$

स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण में वही सूत्र प्रयुक्त हुआ है जैसा कि पूर्व उदाहरण में, क्योंकि सारणी 26.5 के प्रथम भाग के दोनों स्तम्भों में मदों की सख्या समान है।

$$\begin{aligned}\frac{\sum_1^k \left(\frac{N_c}{\sum_1^k X} \right)^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}{N_c} &= \frac{1,454,015,716}{45} - \frac{2,874,460,996}{90} \\ &= 373,004.85\end{aligned}$$

पक्ति माध्यों के बीच विचरण में भी पूर्व उदाहरण में प्रयुक्त व्यंजक का ही प्रयोग हुआ है क्योंकि सारणी 26.5 के प्रथम भाग की नौ पक्तियों में मदों की सख्या समान है।

$$\begin{aligned}\frac{\sum_1^h \left(\frac{N_r}{\sum_1^h X} \right)^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}{N_r} &= \frac{333,359,050}{10} - \frac{2,874,460,996}{90} \\ &= 1,397,449.49\end{aligned}$$

बक्सों के भीतर विचरण—यह बक्सों के माध्यों के चारों ओर बक्सों में मदों का विचरण है। सांकेतिक रूप में यह

$$\sum_1^{N_b} \left[\sum_1^{N_b} (X - \bar{X}_b)^2 \right]$$

है जहाँ

\bar{X}_b , बक्स का माध्य है,

N_b , बक्स में मदों की सख्या है,

N_b , बक्सों की सख्या है,

सारणी 26 5

D प्रकार के कौंध सत्तों* के जीवन क आकड़ों के प्रसरण का
विस्तार करने के लिए आवश्यक मानों का परिकलन

I स्तम्भों और पंक्तियाँ के लिए
प्रक्षित आकड़ नया बाँट

II स्तम्भों और पंक्तियाँ के लिए
नया तथा योग

छाप	नया	संचयन के बाद	$\sum \lambda$
A	696	612	6 214
	73	512	
	730	558	
	683	4 9	
	720	49	
B	661	643	6 97
	646	642	
	693	636	
	674	678	
	678	646	
C	749	7	7 097
	757	676	
	832	649	
	87	718	
	760	448	
D	840	06	7 515
	734	657	
	845	728	
	798	576	
	885	746	
E	690	628	6 649
	733	648	
	736	60	
	691	672	
	659	640	
F	733	67	6 637
	757	604	
	714	627	
	608	576	
	693	658	
G	478	296	4 752
	734	455	
	635	320	
	672	272	
	410	480	
H	470	413	3 669
	586	542	
	395	138	
	414	38	
	438	234	
I	680	352	4 489
	507	408	
	362	544	
	458	22	
	555	396	
$\sum X$	29 704	23 910	53 614— $\sum X$

छाप	नया	संचयन के बाद	$\sum \lambda^2$
A	484 416	374 544	3 925 732
	529 984	763 169	
	537 900	311 764	
	466 489	229 441	
	518 400	245 02	
B	436 971	413 449	4 355 555
	417 316	412 164	
	480 249	404 496	
	454 275	459 684	
	459 684	417 316	
C	561 001	521 284	5 130 856
	573 049	448 900	
	692 224	421 701	
	616 369	515 524	
	577 600	200 704	
D	705 600	498 436	5 726 771
	538 756	431 649	
	714 025	529 984	
	636 804	331 7	
	783 224	556 516	
E	476 100	394 384	4 440 023
	537 289	419 904	
	541 696	362 404	
	477 481	386 884	
	434 281	409 600	
F	537 239	451 585	4 438 071
	573 049	364 816	
	509 796	386 884	
	369 664	331 776	
	480 249	432 954	
G	228 484	87 616	2 491 574
	538 756	207 025	
	403 225	102 400	
	451 584	73 984	
	168 100	230 400	
H	220 900	170 569	1 624 223
	343 396	294 849	
	156 075	19 044	
	171 396	1 444	
	191 844	54 756	
I	462 400	125 904	2 162 931
	257 049	166 464	
	131 044	295 936	
	209 764	51 529	
	308 075	856 816	
$\sum X^2$	20 361 174	13 964 562	34 325 736 $\sum X^2$

सारणी 26.5 (वित्त)

III बक्तों के लिए योग और योगों के वर्ग

वक्त	N_b $\sum_{i=1} Y$	$\left(\sum_{i=1} Y \right)^2$
वक्ति 1, स्तंभ 1	3,557	12,652,249
स्तंभ 2	2,657	7,059,649
वक्ति 2, स्तंभ 1	3,352	11,235,904
स्तंभ 2	3,245	10,530,025
वक्ति 3, स्तंभ 1	3,885	15,093,225
स्तंभ 2	3,207	10,284,849
वक्ति 4, स्तंभ 1	4,102	16,926,404
स्तंभ 2	3,413	11,648,569
वक्ति 5, स्तंभ 1	3,509	12,313,081
स्तंभ 2	3,140	9,859,600
वक्ति 6, स्तंभ 1	3,505	12,285,025
स्तंभ 2	3,132	9,809,424
वक्ति 7, स्तंभ 1	2,929	8,579,041
स्तंभ 2	1,823	3,323,329
वक्ति 8, स्तंभ 1	2,303	5,303,809
स्तंभ 2	1,266	1,865,956
वक्ति 9, स्तंभ 1	2,562	6,563,844
स्तंभ 2	1,927	3,713,329
योग	53,614	$168,947,312 = \sum_{i=1}^b \left(\sum_{j=1}^k N_{ij} \right)^2$

* सेन का गणन, मैन बोल्ड के परीक्षण के समय 0.90 स्कोर तक (बालों में लगने वाला समय (मिनटों में) है, मैन बोल्ड स्कोर/मिनट पर दृष्टि—को—101 को के लिखित है। D प्रकार के सेन बोल्ड-प्रकाश प्रकार में सबसे बड़े होने हैं।

प्रथम भाग में प्रस्तुत बकिडे, कौश प्रकाश बकिडेया के परीक्षण में, श्री सी० आर० के अग्रस्त 1953 ई वुलेटिन में प्रकाशित हुए हैं, कन्स्यूमर्स रिसर्च, वाशिंगटन, डी० जर्सी के मोनोम में पाठ हुए हैं।

$$(\sum Y)^2 = (53,614)^2 = 2,874,460,996$$

$$\sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^b N_{ij} \right)^2 = (29,704)^2 + (23,910)^2 = 1,454,015,716.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^b N_{ij} \right)^2 &= (6,214)^2 + (6,597)^2 + (7,092)^2 + (7,515)^2 \\ &\quad + (6,649)^2 + (6,637)^2 + (4,752)^2 + (3,669)^2 \\ &\quad + (4,489)^2 = 333,359,050. \end{aligned}$$

$$\sum_1^{N_b} \text{बक्स में } N_b \text{ मदों के ऊपर योग है, और}$$

$$\sum_1^{k_b} \text{ } k_b \text{ बक्सों के ऊपर योग है।}$$

परिशिष्ट ध, परिच्छेद 26 2 में दिखाई गई प्रक्रिया के समान ही, यह व्यंजक

$$\sum X^2 = \sum_1^{k_b} \left[\frac{\left(\sum_1^{N_b} X \right)^2}{N_b} \right]$$

होगा। फिर भी सारणी 26 5, भाग 1 के प्रत्येक बक्स में मदों की संख्या समान है; अतः हम लिख सकते हैं

$$\begin{aligned} \sum X^2 - 1 \frac{\sum_1^{k_b} \left(\sum_1^{N_b} X \right)^2}{N_b} &= 34,325,736 - \frac{168,947,312}{5}, \\ &= 34,325,736 - 33,789,462.4, \\ &= 536,273.6 \end{aligned}$$

अन्त क्रिया—गत प्राप्त तीन विचरणों के योग से, कुल विचरण सख्यात्मक मान बढ जाता है। यह अन्तर, स्तम्भ माध्यों और पंक्ति माध्यों के बीच अन्तःक्रिया के कारण, विचरण है। इसका सख्यात्मक मान है

$$2,387,280.49 - (373,004.85 + 1,397,449.49 + 536,273.6) = 80,552.55.$$

विकल्प, परन्तु अधिक परिश्रम से, अन्त क्रिया का परिकलन सीधा निम्न में किया जा सकता है

$$\sum_1^{k_b} [N_b (\bar{A}_b + \bar{A}' - \bar{A}'_r - \bar{A}'_c)^2]$$

आकलित प्रसरण—सारणी 26 6 में विचरण की मात्रा, स्वातन्त्र्य कोटियाँ और विचरण के प्रत्येक स्रोत के लिए आकलित प्रसरण दिखाए हैं, कुल विचरण और कुल विचरण के लिए स्वातन्त्र्य कोटियाँ भी दिखाई गई हैं। बक्सों में विचरण के लिए स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या है $k_b(N_b - 1) = 72$, क्योंकि बक्स की प्रत्येक मद का विचलन बक्स के माध्य से प्राप्त किया गया था। अन्तःक्रिया के लिए स्वातन्त्र्य कोटियाँ विचरण के अन्य तीन स्रोतों के लिए स्वातन्त्र्य कोटियों को कुल विचरण के लिए स्वातन्त्र्य कोटियों में से घटा कर प्राप्त की गई हैं। इस प्रकार, अन्त क्रिया के लिए स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या है।

$$89 - (1 + 8 + 72) = 8$$

सारणी 26 6

D प्रकार के कोष्ठ सेलों के जीवन के आँकड़ों के प्रसरण के विश्लेषण के लिए परिकल्पना का सार

विचरण का स्रोत	विचरण की मात्रा	स्वातंत्र्य कोटियाँ	आकलित प्रसरण
स्तम्भ माध्यों के बीच	373,004.85	1	373,004.85
पंक्ति माध्यों के बीच	1 397 449.49	8	174,681.19
अन्त क्रिया	10,552.55	8	10 069.07
बक्सों में योग	536,273.6	72	7,448.24
	2 387 286.49	89	

अब हम स्तम्भ माध्यों के बीच आकलित प्रसरण तथा पंक्ति माध्यों के बीच आकलित प्रसरण का परीक्षण करने के लिए तैयार हैं। फिर भी इस पहले यह निष्कर्ष करना चाहिए कि अन्य दो प्रसरणों में से F परीक्षण का हर कौनसा होगा। यह सत्य है कि बक्सों में विचरण विचरण के उन वास्तविक स्रोतों में से केवल एक है जो स्तम्भ पंक्ति अथवा माध्यों के बीच विषमता से अप्रभावी रहते हैं। अतः यह प्रतीत होता है कि बक्सों में आकलित बक्स प्रसरण संयोग का हमारा माप होगा। लेकिन एक अन्य बिन्दु भी विचार योग्य है यदि पंक्ति (अथवा स्तम्भ) माध्यों के बीच अन्तर पंक्ति और स्तम्भ माध्यों के बीच अन्त क्रिया में अधिक न हो तो अन्तर बहुत मायका नहीं हो सकता।⁹ परिणामस्वरूप सामान्य प्रविधि निम्न प्रकार होगी प्रथम अन्त क्रिया के आकलित प्रसरण का बक्सों में आकलित प्रसरण के प्रति परीक्षण करो यदि अन्त क्रिया का आकलित प्रसरण बक्सों के अन्तर आकलित प्रसरण की अपेक्षा मायका रूप से अधिक है तब अन्य दो आकलित प्रसरणों में से प्रत्येक का अन्त क्रिया के आकलित प्रसरण प्रतिपरीक्षण करो, यदि अन्त क्रिया का आकलित प्रसरण बक्सों में आकलित प्रसरण की अपेक्षा कम है अथवा मायका रूप से अधिक नहीं है तो इन दो स्रोतों से प्राप्त स्वातंत्र्य कोटियों और विचरण को मिलाओ और

9 यह बिन्दु सारणी 26 5 के आँकड़ों से समझना इतना सरल नहीं है जितना मूढ़ द्वारा दिये हुए एक उदाहरण में। उसका उदाहरण जिसके लिए कोई आंकड़ नहीं दिये गए हैं पांच मनुष्यों (स्तम्भों) से सम्बन्धित है जो चार मशीनों (पंक्तियों) चलाते हैं और जिनके बक्सों में तीन प्रयोग हैं। वह देखता है कि एक आदमी एक मशीन पर दूसरे की अपेक्षा अधिक अच्छा काम कर सकता है, लेकिन वही आदमी दूसरी मशीन पर उतना अच्छा काम न कर सके या अधिक धीरे काम भी कर सकता है। सरलता के लिए, मशीनों के मध्य अन्तर जन क्रिया में अन्तर होना चाहिए अन्यथा समस्त अच्छी मशीन लगाते पर भी व्यक्ति को यह प्रतीत हो सकता है कि उस मशीन पर काम करने वाला व्यक्ति उतना उत्पादक नहीं है जितना कि वह दूसरी मशीन पर हो सकता था। ए० ए० मूढ़ डेटाडिक्शन टु दि थियरी ऑफ स्टैटिस्टिक्स, मैकग्रा हिल बुक कंपनी, न्यूयार्क, 1950 पृष्ठ 334—337 देखिए।

एक नवीन आकलित प्रसरण का परिकलन करो जोकि F परीक्षण के लिए हर का कार्य कर सके।¹⁰

प्रथम बक्सों में आकलित प्रसरण के प्रति अन्त क्रिया के आकलित प्रसरण का परीक्षण करने पर, हमारे पास है

$$F = \frac{10\ 069\ 07}{7\ 448\ 24} = 1\ 35 \quad (n_1 = 8, n_2 = 72)$$

परिशिष्ट ड से यह दिखाई पड़ता है कि यह F का मान 1.0 से सार्थक रूप से अधिक नहीं है, इसलिए अन्त क्रिया का आकलित प्रसरण, बक्सों में आकलित प्रसरण से सार्थक रूप में अधिक नहीं होता।

क्योंकि अन्त क्रिया सार्थक नहीं है, हम अन्त क्रिया के विचरण और बक्सों के अन्तर विचरण को मिला देते हैं और विचरण के इन दो स्रोतों की स्वातन्त्र्य कोटियों से इस मान को विभाजित करते हैं और प्राप्त करते हैं

$$616,826\ 15 - 80 = 7\ 710\ 33$$

यह स्तम्भ माध्यों के बीच आकलित प्रसरण और पक्ति माध्यों के बीच आकलित प्रसरण के परीक्षण के लिए F का हर है।

स्तम्भ माध्या के लिए,

$$F = \frac{373\ 004\ 85}{7,710\ 33} = 48\ 38 \quad (n_1 = 1, n_2 = 80).$$

परिशिष्ट ड में यह दिखाई पड़ता है कि F का यह मान 0.001 बिन्दु से पर्याप्त दूर है, इसलिए स्तम्भ माध्यों के बीच अन्तर (ताजे तथा रखे हुए सेलों के बीच) वास्तविक है।

पक्ति माध्यों के लिए,

$$F = \frac{174\ 681.19}{7\ 710\ 33} = 22\ 66. \quad (n_1 = 8, n_2 = 80)$$

F का यह मान भी 0.001 बिन्दु से दूर है, और पक्ति माध्यों के बीच अन्तर (सेलों के छापो के बीच) सार्थक है।

वे स्थितियाँ जिनमें बक्सों में मदों की असमान संख्या के साथ वर्गीकरण के दो निकप हैं, और वर्गीकरण के तीन अथवा अधिक के निकपों वाली स्थितियाँ इस पुस्तक के सीमा-क्षेत्र से बाहर हैं।

10 कुछ अधिकारियों ने अन्त क्रिया के कारण होने वाले अथवा बक्सों के भीतर सबसे बड़े दो प्रसरणों के प्रयोग की सत्तुति की है। यदि अन्त क्रिया का आकलित प्रसरण अधिक है लेकिन साधक रूप से नहीं, तो इन प्रविधि में अन्त क्रिया के सम्भव छोटे प्रभावों के न जात होने की सम्भावना है जब अन्त क्रिया के आकलित प्रसरण का परीक्षण करते हैं। इससे प्रकार II की अशुद्धियों की संख्या में वृद्धि की सम्भावना भी है।

$$\frac{x}{\sigma}, t, / \text{ और } F \text{ के मध्य अन्तःसम्बन्ध}$$

अध्याय 24 में यह देखा गया था कि t वटन प्रमामान्य वटन की ओर पहुँचता है जैसे n अनन्त की ओर वटन। इसलिए प्रमामान्य वटन t वटन की एक विशेष दशा है जैसा कि परिशिष्ट भ की अन्तिम पंक्ति में दिखाया गया है।

अध्याय 25 में यह सकेत किया गया था कि एक ही प्रकार के आँकड़ों के समुच्चय के लिए प्रमामान्य विचलन वही प्राधिकृतार्थे उत्पन्न करते हैं जैसा 1^2 के मान करते हैं जब 1^2 के लिए $n=1$ है। विशेष रूप से, α और α परिशिष्टों की तुलना करने पर हमें ज्ञात हुआ कि दत्त प्राधिकृत के लिए $\left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 = 1^2$ जबकि 1^2 के लिए $n=1$ ।

इस अध्याय में यह उल्लेख किया गया था कि किसी भी दत्त प्राधिकृत के लिए $\frac{\sigma^2}{n} = F$, जब 1^2 के लिए n F के लिए n_1 के बराबर है और जब F के लिए $n_2 = \infty$ है। यह परिशिष्ट α और α की तुलना करने पर देखा जा सकता है।

इस अध्याय में यह भी सकेत किया गया था कि किसी भी दत्त प्राधिकृत के लिए $1^2 = F$ जब t के लिए n_1 F के लिए n_2 के बराबर है और जब F के लिए $n_2 = 1$ । यह परिशिष्ट α और α की परीक्षा से स्पष्ट है।

पूर्वगत चार अनुच्छेदों में जो कुछ कहा गया है, वह सब चार्ट 26.2 में एकत्र किया गया है। इन चार्टों में यह स्पष्ट है कि F सम्मिलनकारी वटन है जब कि अन्य तीन वटन केवल F की विशेष स्थितियाँ हैं।

वैषम्य और ककुदता के माप

वैषम्य—अध्याय 10 में 409 विद्यार्थियों के प्रेशों के वटन का वैषम्य, जैसा कि β_1 के द्वारा मापा गया था, 0.16 पाया गया था। 0.05 का प्रयोग निकष के रूप में करने पर, क्या β_1 का यह मान 0 से मायंक रूप में अधिक होगा? जॉन एम. पियरसन ने β_1 की सीमाना 0.10 और 0.02 की मारणियाँ तैयार की हैं जब वह सामान्य समष्टि से प्राप्त प्रतिदर्शों पर आधारित है। यह सांख्यिकी परिशिष्ट ए के रूप में दिखाई गई है, और इस परिशिष्ट में सक्म छोटा चार्ट β_1 के वटन का रूप दिखाता है। परिशिष्ट ए, $N=409$ के लिए β_1 का मान नहीं दिखाता, लेकिन $N=400$, अथवा $N=450$ के लिए $\beta_1 = 0.16$ मान जो 0.02 विरुद्ध से परे है। तार्थक वैषम्य उपस्थित है।

अध्याय 10 में 371 अमरीकी आनिष्कृतियों की मृत्यु पर घायु के वटन के लिए β_1 का मान 0.16 पाया गया था। परिशिष्ट ए से यह मान भी शून्य से मायंक रूप में अधिक दिखाई पड़ता है।

अध्याय 23 में, नवम कक्षा की 703 छात्राओं द्वारा दूरी के लिए आधार-नोट के प्रेक्षणों के वटन पर एक प्रसाधान्य वृद्ध आसक्ति किया गया था। $\beta_1 = 0.0104$ पाया गया था। β_1 का मान 0 से सायक रूप में भिन्न नहीं है, जैसा कि परिशिष्ट ए में देखा जा सकता है।

ककुदता—मारणी 10.9 में एक तुंग ककुद वटन दिखाया गया, जो पाँच कमरों वाले लकड़ी के मकानों का निर्माण मूल्य $\beta_2 = 4.46$ और $N=82$ के साथ था। 0.05 को

वारवारताओं के रूप में ये और हमें मन्विष्ट लैम्पो की सख्या ज्ञात नहीं है। फिर भी, परिगणित न देखे, तो हम देख सकते हैं कि $\beta_1 = 2.18$ निम्न 0.01 सीमा पर है और $\beta_2 = 2.35$ निम्न 0.05 सीमा पर, जबकि प्रतिदर्श केवल 100 मन्दों का है। 125 अथवा अधिक मन्दों के प्रतिदर्शों के लिए, $\beta_2 = 2.22, 0.01$ विन्दु म पर है। यदि मारणी 10 10 के आंकड़ों में 100 अथवा अधिक लैम्प सम्मिलित हो (होने चाहिएँ, नहीं तो प्रतिफलताएँ प्रकट न की जाती) तो बटन सार्थक रूप से चर्पटकुद्दी है।

सहसम्बन्ध गुणांक

सरल सहसम्बन्ध—जब किसी प्रतिदर्श के लिए सहसम्बन्ध विश्लेषण किया जा चुका है, तो इनके प्रश्न उत्पन्न हो सकते हैं। उनमें से कुछ हैं— क्या r का मान शून्य में सार्थक रूप में भिन्न है? क्या r का मान शून्य में भिन्न निश्चित मान से सार्थक रूप में भिन्न है? क्या दो r के मान सार्थक रूप में एक दूसरे से भिन्न हैं? समष्टि में सहसम्बन्ध की विश्वास्यता सीमाएँ क्या हैं? समष्टि में सहसम्बन्ध का एकाकी अनुमान क्या लगाया जा सकता है? हम इनमें से प्रत्येक पर क्रमानुसार विचार करेंगे।

क्या r का मान सार्थक रूप में शून्य से भिन्न है? यहाँ हम इस परिकल्पना का परीक्षण करेंगे कि समष्टि में कोई महसम्बन्ध नहीं है। अर्थात् r_0^2 अथवा $r_0 = 0$ । यदि यह परिकल्पना प्रविरसनीय है तो सहसम्बन्ध सार्थक माना जाएगा। इस प्रविधि में t परीक्षण मूल्य है जिसमें पास्क पूर्व परिचित है। t का मान

$$t = r \sqrt{\frac{(N-2)}{1-r^2}} \text{ अथवा } \sqrt{\frac{r^2(N-2)}{1-r^2}}$$

से प्राप्त किया गया है जिसके बाद हम परिगणित t में P का $n = N-2$ के साथ निर्धारण करेंगे। (आकलन समीकरण में दो स्थिरांकों के कारण दो स्वातन्त्र्य कोटियाँ गण्ट हो गई हैं।) पेड़ों की ऊँचाई वृद्धि और मोटाई वृद्धि के आंकड़ों के लिए N था 20, और r था +0.758। य

$$t = 0.758 \sqrt{\frac{(20-2)}{1-0.574}} = 4.93$$

देते हैं। जब $n = 20-2 = 18$ है, तो परिगणित t दिखाता है कि $t = 4.93$ में $P < 0.001$ । फलस्वरूप, r का मान सार्थक है।

11 अधिक पूर्ण वस्तु यह है हम जानते हैं कि $t^2 = F$ जब F के लिए $n_1 = 1$ और जब t के लिए n_2 F के लिए n_2 के बराबर है। उपर्युक्त t परीक्षण के समकक्ष F परीक्षण है,

$$F = \frac{\sum y_c^2 - (2-1)}{\sum y_s^2 - (N-2)}$$

व्याख्यात विवरण नी 2-1 = 1 इसलिय कोटि है क्योंकि यह \bar{Y} से Y_c मानों ($Y_c = a + bX$) के विचलनों पर आधारित है। व्याख्यात विवरण की $N-2$ स्वातन्त्र्य कोटियाँ हैं क्योंकि यह $Y_c = a + bX$ से N मानों के विचलनों पर आधारित है।

यह रुचिकर है कि यह परीक्षण ठीक वैसा ही है जैसाकि यह निश्चित करने के लिये कि b सांख्यिक रूपेण धून्य से भिन्न है अथवा नहीं। प्रयोज्य व्यञ्जक है¹²

$$t = b \sqrt{\frac{\sum x^2 (N-2)}{\sum y^2}}$$

पेडो के ग्रांफो के लिए, हमने पाया कि $b = +1.677$, $\sum x^2 = 42,6055$, और $\sum y^2 = 88.74$ परिणामस्वरूप,

$$t = 1.677 \sqrt{\frac{42,6055(20-2)}{88.74}} = 4.93,$$

ठीक वैसा ही जैसाकि पहले प्राप्त हुआ था।

क्या r का मान शून्य से भिन्न निर्दिष्ट मान से सांख्यिक रूप में भिन्न है? जब $r_g = 0$, यादृच्छिक प्रतिदर्शों से तब r के मानों का बंटन 0 के आसपास सममित है जिसका परिमर -1.0 से $+1.0$ तक है। जब $r_g \neq 0$, तब यादृच्छिक प्रतिदर्शों से r के मानों का बंटन r_g के आसपास सममित नहीं है, और t परीक्षण अनुपयुक्त है। यह परीक्षण करने के लिए कि r सांख्यिक रूप में $r_g \neq 0$ के मान से भिन्न है या नहीं, हम r को निम्न में परिवर्तित करते हैं¹³

$$z = 1.15129 \text{ लघु } \frac{1+r}{1-r},$$

जिसका बंटन लगभग

$$z_g = 1.15129 \text{ लघु } \frac{1+r_g}{1-r_g}, \text{ के आसपास प्रामाण्य है}$$

जबकि z की मानक त्रुटि है ¹⁴

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-2,6667}}$$

12. समानता के प्रमाण के लिए, देखिए परफिट्स घ, परफिट्स 26.3। r अथवा b का परीक्षण करने के लिए अनेक वैकल्पिक सूत्र उपलब्ध हैं। उनमें निम्नलिखित हैं

$$t = \frac{\sqrt{\frac{b_{xy}(N-2)}{\sum y^2}}}{\sqrt{\frac{(\sum x)^2(N-2)}{\sum x \sum y^2 - (\sum xy)^2}}}$$

13. देखिए आर० ए० फिशर, स्टैटिस्टिकल मैनडस फॉर रिसर्च वर्कर्स, यथापूर्व, पृष्ठ 197-204।

14. सामान्य व्यञ्जक है $\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}}$, जो यहाँ दिया गया है उसकी व्याख्या के लिए देखिए,

हेरल्ड होर्टेलिंग का लेख "न्यू साइट ऑन दि कोरिलेशन कोएफिशिएंट एन्ड इट्स ट्रान्सफॉर्म", जर्नल ऑफ दि रॉयल स्टैटिस्टिकल सोसायटी, सीरीज B, खण्ड XV, मध्या 2, 1953, पृष्ठ 220। पृष्ठ 223-224 पर होर्टेलिंग ने z के दो सुधार सुझाए हैं जो ऊपर निविष्ट रूप की अपेक्षा प्रसामान्य के अधिक निकट हो सकते हैं।

मान लो हम यह जानना चाहत है कि पेज की वृद्धि के ऑकड़ों के लिए $+0.758$ का हमारा $r = +0.750$ के कार्पनिक r_g से सार्थक रूप में भिन्न है अथवा नहीं। हम निम्न परिकलन करेंगे

$$z = 1.15129 \text{ तब } \frac{1 + 0.758}{1 - 0.758} = 0.992$$

$$r_g = 1.15129 \text{ तब } \frac{1 + 0.750}{1 - 0.750} = 0.973,$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{20 - 2.6667}} = 0.240, \text{ और}$$

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{z - z_g}{\sigma} = \frac{0.992 - 0.973}{0.240} = \frac{0.019}{0.240} = 0.08$$

परिणित ज हमें बनाना है कि 100 में से लगभग 94 बार इतने बड़े या अधिक बड़े अन्तर की संयोग कारणां से आशा कर सकते हैं। यह परिकल्पना कि $r = +0.758$ उम यादृच्छिक प्रतिदर्श का महसम्बन्ध है, जो ऐसी समष्टि में लिया गया है जिसका $r_g = +0.750$, मन्दिग्ध नहीं है। अन्तर साधक नहीं है।

क्या r के दो मान सार्थक रूप में एक दूसरे से भिन्न हैं? यदि अपने प्रतिदर्श के लिए $r = +0.758$ ($z_1 = 0.992$) के मान तथा $+0.750$ ($z_2 = 0.973$) के अन्य प्रतिदर्श r के मान में, जो मदों के 20 युग्मों से प्राप्त हुआ था, अन्तर की साधकता के परीक्षण में हमारी रुचि होती तो हम निम्न परिकलन करते

$$\sigma_{z1} = \frac{1}{\sqrt{20 - 2.6667}} = 0.240,$$

$$\sigma_{z2} = \frac{1}{\sqrt{20 - 2.6667}} = 0.240,$$

$$\sigma_{z1-2} = \sqrt{\sigma_{z1}^2 + \sigma_{z2}^2} = \sqrt{(0.240)^2 + (0.240)^2},$$

$$= 0.339 \text{ तथा}$$

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{z_1 - z_2}{\sigma_{z1-2}} = \frac{0.992 - 0.973}{0.339} = \frac{0.019}{0.339} = 0.06$$

सामान्य क्षेत्रों की सारणी (परिणित ज) प्रदान करती है $P = 0.95$, और हम इस निष्कर्ष पर पहुँचने हैं कि अन्तर साधक नहीं है।

r_g की विश्वास्यता सीमाएँ—जैसा कि \bar{X}_g , τ , और σ की स्थिति में है, हम r_g की विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात करने की इच्छा कर सकते हैं। य निम्न व्यञ्जक के प्रयोग द्वारा प्राप्त होती है

$$z = z_g \pm \frac{x}{\sigma}$$

यह हमें z_g के दो मान प्रदान करेगा, जोकि तब r_g मानों में परिवर्तित कर दिये जाते हैं।

यदि हम पेड की वृद्धि के आँकड़ों के लिए 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ $\left(\frac{x}{\sigma} = 1.960\right)$ प्राप्त करना चाहते हैं जहाँ r या $+0.758$ और $z=0.992$, तो हमारे पास आता है

$$0.992 = z_{\theta} - (1.960)(0.240)$$

$$z_{\theta} = 0.992 + 0.4704$$

$$z_{\theta_1} = 0.5216 \text{ तथा}$$

$$z_{\theta_2} = 1.4624$$

z_{θ_1} को r_{θ_1} में और z_{θ_2} को r_{θ_2} में बदलने में प्राप्त होगा

$$r_{\theta_1} = +0.479 \text{ और}$$

$$r_{\theta_2} = +0.898$$

जो 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ हैं।

y का एकल आकलन प्रसरणों पर विचार करते हुए, हमने देखा था कि एक प्रतिदर्श σ^2 का एकल आकलन में

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum y^2}{N-1}$$

के द्वारा किया जा सकता है। लगभग इसी प्रकार r_{θ}^2 का आकलन भी किया जा सकता है। हम इसका \hat{r}^2 के रूप में उल्लेख करेंगे। हम समष्टि में निर्धारण के गुणांक का आकलन प्रकट करने के लिए \hat{r}^2 का प्रयोग अधिक तर्कसंगत r_{θ}^2 के स्थान पर करते हैं, ताकि इस अध्याय के अन्तिम भाग में पचीदा पादाकों से बचा जा सके

हम अध्याय 19 की पादटिप्पणी 8 के द्वारा पहले ही जानने हैं कि

$$\begin{aligned} r^2 &= 1 - \frac{\sum y^2}{\sum y^2} = 1 - \frac{\sum y^2 - N}{\sum y^2 - N}, \\ &= 1 - \frac{S_Y^2 \cdot X}{S_Y^2} \end{aligned}$$

अब, $S_Y^2 \cdot X$, $\sigma_1^2 \cdot X$ का अभिनत आकलन और S_Y^2 , σ_1^2 का अभिनत आकलन है। अभिनत आकलन विचरण के मापों को स्वातन्त्र्य कोटियों की उपयुक्त संख्या से भाग देकर प्राप्त किए जाते, न कि N से। इस प्रकार,

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum y^2}{N-1},$$

$$\hat{\sigma}_{Y \cdot X}^2 = \frac{\sum y^2}{N-2}; \text{ और}$$

$$\begin{aligned} \hat{r}^2 &= 1 - \frac{\hat{\sigma}_1^2 \cdot X}{\hat{\sigma}_{Y \cdot X}^2} = 1 - \frac{\sum y^2 - (N-2)}{\sum y^2 - (N-1)}, \\ &= 1 - \frac{y^2}{\sum y^2} \cdot \frac{N-1}{N-2}. \end{aligned}$$

व्योक्त

$$\frac{\sum y^2}{\sum y^2} = 1 - r^2,$$

अतः हम लिख सकते हैं

$$r^2 = 1 - (1 - r^2) \frac{N-1}{N-2}$$

पेड़ की वृद्धि के आँकड़ों के लिये, जहाँ $r' = 0.574$ और $r = +0.758$

$$r^2 = 1 - (1 - 0.574^2) \frac{20-1}{20-2}$$

$$= 0.550$$

$$r = +0.742$$

जब r' बहुत निम्न हो ता r शून्यात्मक हो सकता है। ऐसी स्थिति में, समष्टि में सहसम्बन्ध को शून्य समझा जाना चाहिए।

अपेक्षित सहसम्बन्ध द्वितीयांश वक्र, तृतीयांश वक्र अथवा उच्च स्तर के वक्र से व्यवहार करते समय, हमारी यह जानने की इच्छा हो सकती है कि (1) क्या निर्धारण का अपेक्षित गुणांक निम्न स्तर के वक्र पर आधारित गुणांक से, सार्थक रूप में बड़ा है, अथवा (2) क्या अपेक्षित गुणांक शून्य में सार्थक रूप में बड़ा है। कभी-कभी हमारी यह भी इच्छा हो सकती है कि समष्टि में सहसम्बन्ध का आकलन किया जाए।

द्वितीयांश वक्र— भारी चीड़ के पेड़ों के व्यास और आयतन के आँकड़ों के लिए, अध्याय 20 में हमने देखा था कि

$$r' = \frac{\text{मीधी रेखा द्वारा व्याख्यात विचरण}}{\text{कुल विचरण}}$$

$$= \frac{\sum y^2}{\sum x^2} = \frac{152,259.2}{159,698} = 0.953,$$

और

$$r_1^2 = \frac{\text{द्वितीयांश वक्र द्वारा व्याख्यात विचरण}}{\text{कुल विचरण}}$$

$$= \frac{\sum y^2}{\sum x^2} = \frac{156,235.5}{159,698} = 0.978.$$

यह निश्चित करने की कि क्या r^2 से अधिक है, सरलतम विधि है, r^2 के माप का परिकलन करना, जिसका उल्लेख अध्याय 20 की पाठ-टिप्पणी 2 में किया गया है, और $n = N - 2$ के साथ r^2 का t परीक्षण करना। ($N - 3$ के प्रयोग की व्याख्या अगले पृष्ठ पर दी गई है।) आंशिक निर्धारण का यह गुणांक, $r^2_{YX^2X}$, जो

हमें वह अनुपात बताता है जो (1) X^2 के प्रयोग द्वारा व्याख्यात मयुक्त विचरण का (2) सीधी रेखा द्वारा व्याख्यात विचरण के साथ है,

$$r^2_{Y \text{ पर } X} = \frac{r^2_{Y \text{ पर } X^2} - r^2}{1 - r^2}$$

$$= \frac{0.978 - 0.953}{1 - 0.953} = 0.532$$

t -परीक्षण ठीक वही है जैसा कि r के लिए t -परीक्षण, अतः यह है कि हमने $N - 2$ के स्थान पर $N - 3$ का प्रयोग किया है।

$$t = \sqrt{\frac{r^2_{Y \text{ पर } X^2} (N - 3)}{1 - r^2_{Y \text{ पर } X^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.532 (20 - 3)}{0.468}} = 4.4$$

जब $n = 17$, $t = 4.4$ का मान 0.001 स्तर से परे है (देखिए परिशिष्ट B), इस प्रकार हम उपसंहार कर सकते हैं कि X के प्रयोग द्वारा विचरण की सार्थक रूप से बड़ी मात्रा की व्याख्या हुई है।

पूर्ववर्ती सामान्य F -परीक्षण¹⁵ का मूल समकक्ष है जिसमें

$$F = \frac{\left[\left(\text{द्वितीय श्रेणी वक्र द्वारा व्याख्यात विचरण} \right) - \left(\text{सीधी रेखा द्वारा व्याख्यात विचरण} \right) \right] - \text{स्वातन्त्र्य कोटियाँ}}{\left[\left(\text{कुल विचरण} \right) - \left(\text{द्वितीय श्रेणी वक्र द्वारा व्याख्यात विचरण} \right) \right] - \text{स्वातन्त्र्य कोटियाँ}}$$

$$= \frac{(\sum y^2_{\text{पर } X^2} - \sum y^2_{\text{पर } X}) - 1}{(\sum y^2 - \sum y^2_{\text{पर } X^2}) - (N - 3)}$$

$N_1 = 1$ और $N_2 = N - 3$ के साथ। अतः स्वतन्त्र्य कोटियों की संख्या $2 - 1 = 1$, है क्योंकि यह द्वितीय श्रेणी वक्र से परिकल्पित व्याख्यात विचरण के लिए स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या (जो दो हैं) और सीधी रेखा से परिकल्पित व्याख्यात विचरण के लिए स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या (जो एक है) के बीच का अन्तर है। द्वितीय श्रेणी वक्र से प्राप्त व्याख्यात विचरण में स्वातन्त्र्य कोटियाँ $3 - 1 = 2$ हैं क्योंकि समीकरण में तीन स्थिरांक हैं और परिकल्पित मानों का विचरण \bar{Y} के आसपास लिया गया था, व्याख्यात विचरण में, जो कि सीधी रेखा से प्राप्त किया गया, स्वातन्त्र्य कोटि $2 - 1 = 1$ है, क्योंकि समीकरण में दो स्थिरांक हैं और परिकल्पित मानों का विचरण \bar{Y} के आसपास लिया गया था। हर में $\sum y^2_{\text{पर } X^2} = \sum y^2 - \sum y^2_{\text{पर } X}$ के लिए स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या $N - 3$ है, क्योंकि तीन स्थिराकों वाले द्वितीय श्रेणी वक्र से Y मानों (जो N हैं) के वर्गित अन्तरों से व्याख्यात विचरण प्राप्त किया गया

15. आंशिक निर्धारण के इस और अन्य गुणों के लिए t परीक्षण तथा F -परीक्षण की समानता घ परिशिष्ट के परिच्छेद 26.4 में दिखाई गई है।

था। विकल्पतः, हम देख सकते हैं कि कुल विचरण में $N-1$ स्वातन्त्र्य कोटियाँ और व्याख्यात विचरण में $3-1$ स्वातन्त्र्य कोटियाँ हैं, इसलिए, उनके अन्तर में जो कि अव्याख्यात विचरण है $(N-1)-(3-1)=N-3$ स्वातन्त्र्य कोटियाँ हैं।

यदि F के लिए ऊपर दिए हुए व्यंजक के अंश और हर में से प्रत्येक को Σy^2 से विभाजित कर दें, तो हमारे पास विकल्प रूप होगा

$$F = \frac{r^2_{Y \cdot XX^2} - 1}{(1 - r^2_{Y \cdot XX^2}) - (N-3)}$$

$n_1=1$ और $n_2=N-3$ के साथ।

यह निश्चित करने के लिए कि $r^2_{Y \cdot XX^2} = 0.978$ मायंक रूप से 0 से बड़ा है प्रयत्न नहीं, हम F -परीक्षण का प्रयोग निम्न दो में से किसी एक का परिकलन करते हुए, करते हैं¹⁶

$$F = \frac{r^2_{Y \cdot XX^2} \div (3-1)}{(1 - r^2_{Y \cdot XX^2}) - (N-3)}$$

अथवा

$$F = \frac{\Sigma (r^2_{Y \cdot XX^2}) - (3-1)}{(\Sigma y^2 - \Sigma (r^2_{Y \cdot XX^2})) - (N-3)}$$

$n_1=3-1$ तथा $n_2=N-3$ के साथ। हम अंश में $(3-1)$ स्वातन्त्र्य कोटियों का प्रयोग करते हैं क्योंकि द्वितीयान्न वक्र में तीन स्थिरांक हैं और उस वक्र से परिकलित व्याख्यात विचरण Y के आसपास लिया गया था, अधिक सामान्य रूप से, व्याख्यात विचरण के लिए स्वातन्त्र्य कोटियाँ हैं $(m-1)$, जहाँ m आकलन समीकरण में स्थिरांकों की संख्या है। हर में स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या की व्याख्या पूर्व अनुच्छेद में की गई थी, सामान्यतः, अव्याख्यात विचरण के लिए स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या $(N-m)$ है।

भारी चीज के पेड़ों के आकड़ों के लिए प्रथम व्यंजक का प्रयोग करने से हम पाते हैं

$$F = \frac{0.978 - (3-1)}{(1 - 0.978) - (20-3)} \\ = 379.1 \text{ (केवल दो अंक ही मायंक है),}$$

$n_1=2$ और $n_2=17$ के साथ। परिशिष्ट ड की सारणी F का उल्लेख करते हुए, यह स्पष्ट हो जाता है कि यह F मान 1.0 से मायंक रूप में बढ़ जाता है, क्योंकि इसमें प्रायिकता 0.001 से पर्याप्त कम है, और इसलिए $r^2_{Y \cdot XX^2}$ मायंक रूप में शून्य से बढ़ जाता है।

समष्टि में सहसम्बन्ध का आकलन करने के लिए वंशी ही प्रविधि है जिसका पूर्व उल्लेख रेखिक सहसम्बन्ध के लिए किया गया था। अर्थात्

$$r^2_{Y \cdot XX^2} = 1 - \frac{\Sigma (r^2_{Y \cdot XX^2}) - (N-3)}{\Sigma y^2 \div (N-1)} \\ = 1 - (1 - r^2_{Y \cdot XX^2}) \frac{N-1}{N-3} \\ = 1 - (1 - 0.978) \frac{19}{17} = 0.975.$$

16 यदि द्वितीय व्यंजक के अंश और हर दोनों Σy^2 से विभाजित किये जाएँ तो प्रथम व्यंजक प्राप्त हो जाएगा।

तृतीयांश वक्र—यह निश्चित करने के लिए बि X^3 का प्रयोग निम्न प्रकार के वक्र में विचरण की साथक अतिरिक्त मात्रा की व्याख्या करता है अथवा नहीं,

$$Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$$

का परिकलन करे

$$r^2_{YX^3} = \frac{r^2_{YX^2X^3} - r^2_{YX^2} r^2_{X^2X^3}}{1 - r^2_{YX^2}}$$

और तब t परीक्षण निम्न का प्रयोग करने हुए करें

$$t = \sqrt{\frac{r^2_{YX^3X^2} (N-4)}{1 - r^2_{YX^2} r^2_{X^2X^3}}}$$

$n = N - 4$ के साथ। उसके समान F परीक्षण है

$$F = \frac{(\sum y^2_{YX^2X^3} - \sum y^2_{YX^2}) - 1}{(\sum_{j=1}^2 - \sum_{j=1}^2 r^2_{X^2X^3} - (N-4))},$$

$$= \frac{(\sum_{j=1}^2 r^2_{YX^2X^3} - r^2_{YX^2}) - 1}{(1 - r^2_{X^2X^3}) - (N-4)}$$

$n_1 = 1$ और $n_2 = N - 4$ के साथ।

इस परिकल्पना का परीक्षण करने के लिए कि समष्टि का सहसम्बन्ध शून्य है, परिकलन कीजिए

$$F = \frac{r^2_{YX^2X^3} - (4-1)}{(1 - r^2_{X^2X^3}) - (N-4)} \quad \text{अथवा}$$

$$F = \frac{\sum y^2_{YX^2X^3} - (4-1)}{\sum_{j=1}^2 r^2_{X^2X^3} - (N-4)}$$

$n_1 = 4 - 1$ और $n_2 = N - 4$ के साथ। याद रखिए कि $\sum y^2_{YX^2X^3} = \sum y^2 - \sum y^2_{YX^2X^3}$

समष्टि में सहसम्बन्ध का आकलन है

$$r^2_{YX^2X^3} = 1 - \frac{\sum y^2_{YX^2X^3} - (N-4)}{\sum y^2 - (N-1)},$$

$$= 1 - (1 - r^2_{YX^2X^3}) \frac{N-1}{N-4}$$

पाठक इन व्यंजकों को उच्च स्तर के चक्रों के लिए सरलतापूर्वक अनुकूलित कर सकता है। परन्तु यह कदाचित् ही आवश्यक होगा क्योंकि तृतीयांश वक्र प्रायः प्रयुक्त नहीं होते और उच्च स्तर के वक्र तो और भी कम प्रयोग में आते हैं।

सहसम्बन्ध अनुपात—छिन्नी हुई मक्का की प्रति एकड़ उब्ज और प्रति टन काम के घण्टों के आंकड़ों के लिए हमने अध्याय 20 में देखा कि

$$r^2_{YX} = \frac{\text{स्तम्भ माध्यों द्वारा व्याख्यात विचरण}}{\text{श्रेणी का कुल विचरण}}$$

$$= \frac{148\ 115}{217\ 515} = 0.681.$$

यदि एक द्वितीयांश वक्र ऊही आँकड़ों पर आसजित किया जाए तो हम पावेंगे¹⁷

$$r^2_{YXX^2} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2 Y_j^2}{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \frac{140\ 743}{217\ 515} = 0.647.$$

यह निश्चित करने के लिए कि r^2_{YX} सार्थक रूप में $r^2_{YXX^2}$ की अपेक्षा अधिक है, हम परिकलन करते हैं

$$F = \frac{(r^2_{YX} - r^2_{YXX^2}) - \text{स्वातन्त्र्य कोटियाँ}}{(1 - r^2_{YX}) - \text{स्वातन्त्र्य कोटियाँ}}$$

$$= \frac{(0.681 - 0.647) - (11 - 2)}{(1 - 0.681) - (103 - 12)} = \frac{0.00378}{0.00351} = 1.1,$$

$n_1 = 9$ और $n_2 = 91$ के साथ। अर्थात्, हम प्रयोग कर सकते हैं

$$F = \frac{\left[\left(\begin{array}{c} \text{स्तम्भ माध्यों द्वारा} \\ \text{व्याख्यात विचरण} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{द्वितीयांश वक्र द्वारा} \\ \text{व्याख्यात विचरण} \end{array} \right) \right] - \text{स्वातन्त्र्य कोटियाँ}}{\left[\left(\begin{array}{c} Y \text{ श्रेणी का कुल} \\ \text{विचरण} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{स्तम्भ माध्यों द्वारा} \\ \text{व्याख्यात विचरण} \end{array} \right) \right] - \text{स्वातन्त्र्य कोटियाँ}}$$

$$= \frac{(148\ 115 - 140\ 743) - (11 - 2)}{(217\ 515 - 148\ 115) - (103 - 12)} = \frac{0.8191}{0.7626} = 1.1,$$

$n_1 = 9$ और $n_2 = 91$ के साथ। अर्थात्, हम स्वातन्त्र्य कोटियाँ व्याख्यात विचरण के लिए स्वातन्त्र्य कोटियाँ, स्तम्भ माध्यों का प्रयोग करते हुए (जो 11 हैं) और द्वितीयांश वक्र का प्रयोग करते हुए (जो 2 हैं) व्याख्यात विचरण के लिए स्वातन्त्र्य कोटियों के बीच अन्तर को प्रकट करती हैं। स्तम्भ माध्यों का प्रयोग करते हुए व्याख्यात विचरण के लिए स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या $12 - 1 = 11$ है क्योंकि 12 स्तम्भ माध्यों के और उन माध्यों के विचरण का परिकलन \bar{Y} के सम्बन्ध से किया गया था। द्वितीयांश वक्र का प्रयोग करते हुए व्याख्यात विचरण के लिए स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या $3 - 1 = 2$ है क्योंकि समीकरण में तीन स्थिरांक हैं और परिकलित मानों का विचरण \bar{Y} के आसपास लिया गया था। हर में स्वातन्त्र्य कोटियाँ, स्तम्भ माध्यों के द्वारा व्याख्यात विचरण के लिए, N स्तम्भ माध्यों की संख्या है, अर्थात् $103 - 12 = 91$ ।

$F = 1.1$ की प्रायिकता को जानने के लिए परिजिष्ट ड के सकेत से जब कि $n_1 = 9$ और $n_2 = 91$, हम पाते हैं कि न तो $n_1 = 9$ और न ही $n_2 = 91$ को सारणी में दिखाया गया है। फिर भी, यह आवश्यक नहीं है कि अन्तर्वेशन किया जाए। F मानों की ओर

17. इन आँकड़ों के सहसम्बन्ध विस्लेषण के लिए, जिसमें द्वितीयांश वक्र का प्रयोग हुआ है, मूल जर्नेलो पुस्तक का प्रथम संस्करण, पृष्ठ 721—727 देखिए।

देख कर जब कि $n_1=8$ और 12 तथा $n_2=60$ और 120, यह स्पष्ट है कि प्रायिकता 0.10 की अपेक्षा अधिक है और $r^2_{1, X}$ मापक रूप से $r^2_{1, X \cdot 2}$ की अपेक्षा बड़ा नहीं है।

यह निर्धारित करने के लिए कि $r^2_{1, X}$ सार्थक रूप से शून्य से अधिक है या नहीं, हम F के लिए उसी प्रकार के व्यंजकों का प्रयोग करते हैं जैसे इसी प्रयोजन के लिए घरेलूिक गुणों के लिए पहले प्रयोग किए गए थे। ये हैं

$$F = \frac{r^2_{1, X} - (\text{स्वातंत्र्य कोटियाँ} = \text{स्तम्भ माध्यों की संख्या} - 1)}{(1 - r^2_{1, X}) - (\text{स्वातंत्र्य कोटियाँ} = N - \text{स्तम्भ माध्यों की संख्या})}$$

$$= \frac{0.681 - (21 - 1)}{(1 - 0.681) - (103 - 12)} = \frac{0.0619}{0.00351} = 17.6, \text{ अथवा,}$$

$$F = \frac{\left(\frac{\text{स्तम्भ माध्या द्वारा व्याख्यात}}{\text{विचरण}} \right) - \left(\frac{\text{स्वातंत्र्य कोटियाँ} = \text{स्तम्भ माध्यों की संख्या} - 1}{\text{माध्यों की संख्या} - 1} \right)}{\left[\left(\frac{Y \text{ श्रेणी का}}{\text{कुल विचरण}} \right) - \left(\frac{\text{स्तम्भ माध्यों द्वारा व्याख्यात विचरण}}{\text{व्याख्यात विचरण}} \right) \right] - \left(\frac{\text{स्वातंत्र्य कोटियाँ} = N - \text{स्तम्भ माध्यों की संख्या}}{\text{स्तम्भ माध्यों की संख्या}} \right)}$$

$$= \frac{148.115 - (12 - 1)}{(217.515 - 148.115) - (103 - 12)} = \frac{13.46}{0.763} = 17.6$$

F के इस मान के लिए, $n_1=11$ और $n_2=91$ । इनमें से कोई भी परिशिष्ट ड में नहीं दिखाया गया है लेकिन $n_1=8$ अथवा 12 और $n_2=60$ अथवा 120 को देख कर यह स्पष्ट है कि $F=17.7$ ऊपरी 0.001 बिन्दु से बहुत परे है। $r^2_{1, X}$ मापक रूप से शून्य से अधिक है।

समष्टि के लिए आकलन, $r^2_{1, X}$ का मान है

$$r^2_{1, X} = \frac{\left[\left(\frac{Y \text{ श्रेणी का कुल}}{\text{विचरण}} \right) - \left(\frac{\text{स्तम्भ माध्यों द्वारा व्याख्यात विचरण}}{\text{व्याख्यात विचरण}} \right) \right] - \left(\frac{N - \text{स्तम्भ माध्यों की संख्या}}{\text{स्तम्भ माध्यों की संख्या}} \right)}{(Y \text{ श्रेणी का कुल विचरण}) - (N - 1)}$$

अथवा

$$r^2_{1, X} = 1 - (1 - r^2_{1, X}) \cdot \frac{N - 1}{N - \text{स्तम्भ माध्यों की संख्या}}$$

$$= 1 - (1 - 0.681) \cdot \frac{102}{91} = 0.642.$$

अनेकधा सहसम्बन्ध—अनेकधा सहसम्बन्ध गुणों पर विचार करते समय, हम प्राथमिकतः यह जानने में रुचि रखते हैं कि प्रदत्त R^2 (अथवा R) का मान सार्थक है अथवा नहीं। हम अध्याय 21 के उदाहरण का निदर्शन के रूप में प्रयोग नहीं करेंगे, क्योंकि वहाँ प्रयुक्त आँकड़े प्रतिदर्श नहीं थे। उसके स्थान पर हम चार चर-वाली समस्या पर विचार करेंगे जो उन 27 बालों के शारीरिक मापों से संबंधित है जिनकी आयु 12, 13 अथवा 14 सप्ताह थी।¹⁸

18. विभिन्न लिंग के बालक और बालिकाओं के लिए ये और अन्य आँकड़े डॉ॰ अल्फ्रेड जे॰ विमनेक के सांख्यिक सेन्सुस फॉर डेलिग हास्पिटल द्वारा किए गए थे। मिस मेरियन गी॰ जैटोइल ने कुपापूर्वक इन आँकों की प्रतिलिपि।

चर थे

X_1 , भार किलोग्रामो में

X_2 , लंबाई सेंटीमीटरों में,

X_3 , मिर की परिधि सेंटीमीटरों में, और

X_4 , छाती की परिधि सेंटीमीटरों में।

हम $R_{1\ 23}^2$ और $R_{1\ 234}^2$ का परीक्षण करेंगे, और ऐसा करने के लिए हमें निम्न मानों की आवश्यकता पड़ेगी :

$$N = 27$$

$$\Sigma x_1 = 11\ 625$$

$$\Sigma x_{c1\ 23}^2 = 9\ 1085,$$

$$\Sigma x_{s1\ 23}^2 = 2\ 5173,$$

$$R_{1\ 23}^2 = 0\ 783$$

$$\Sigma x_{c1\ 234}^2 = 10\ 0152,$$

$$\Sigma x_{s1\ 234}^2 = 1\ 6106,$$

$$R_{1\ 234}^2 = 0\ 861$$

यह निश्चित करने के लिए कि निर्धारण का अनेकधा सहसम्बन्ध सार्थक रूप से धूम्य से अधिक है अथवा नहीं, हम F परीक्षण का प्रयोग करते हैं, जो वंसा ही है जैसे इसी उद्देश्य के लिए अरेलिक सहसम्बन्ध के लिए प्रयुक्त किए गए थे। सामान्य रूप से, हम प्रयोग कर सकते हैं। तो,¹⁹ या

$$F = \frac{R_{1\ 234}^2}{(1 - R_{1\ 234}^2)} \frac{m - (m-1)}{m - (N - m)}$$

अथवा,

$$F = \frac{\Sigma x_{c1\ 234}^2}{\Sigma x_{s1\ 234}^2} \frac{m - (m-1)}{m - (N - m)}$$

$n_1 = m - 1$ तथा $N_2 = N - m$ के साथ।

$R_{1\ 23}^2$ का परीक्षण करने के लिए प्रथम व्यञ्जक का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है

$$F = \frac{0\ 783 - (3-1)}{(1-0\ 783) - (27-3)} = 43\ 4,$$

$n_1 = 2$ और $n_2 = 24$ के साथ। परिशिष्ट ड में F के लिए प्राप्त मान ऊपरी 0.001 बिन्दु से बहुत परे दिखाई पड़ता है, और $R_{1\ 23}^2$ स्पष्टतः सार्थक है।

19 दो व्यञ्जकों का समकक्ष पर्याप्त रूप से दूतरे व्यञ्जक के हर में, $\Sigma x_{c1\ 234}^2 - \Sigma x_{s1\ 234}^2$ में, $\Sigma x_{s1\ 234}^2$ के स्थान पर निचो, तब अथ और हर को $\Sigma x_{s1\ 234}^2$ से विभाजित करो, परिणाम प्रथम व्यञ्जक होगा।

पुन दो भे से प्रथम व्यञ्जक का प्रयोग करके लेकिन इस बार $R^2_{1\ 234}$ का परीक्षण करने के लिए, हम निम्न प्राप्त होगा

$$F = \frac{0.861 - (4-1)}{(1-0.861) - (27-4)} = 47.5,$$

$n_1 = 3$ और $n_2 = 23$ के साथ। $R^2_{1\ 234}$ भी सार्थक है।

कभी-कभी कोई $R^2_{1\ 234}$ m के मान की इच्छा कर सकता है, जो समष्टि में प्रत्येक धा निर्धारण का अधिकतम गुणांक है। यह है

$$\begin{aligned} \hat{R}^2_{1\ 234} &= 1 - \frac{\sum x_{2\ 1\ 234}^2}{\sum x_{1\ 234}^2 - (N-m)}, \\ &= 1 - \frac{\sum x_{2\ 1\ 234}^2}{\sum x_{1\ 234}^2} \cdot \frac{N-1}{N-m}, \\ &= 1 - (1 - R^2_{1\ 234}) \cdot \frac{N-1}{N-m} \end{aligned}$$

27 बालको के आँकड़ों के लिए केवल $\hat{R}^2_{1\ 234}$ का परिकलन करने पर, हम पायेंगे

$$\begin{aligned} \hat{R}^2_{1\ 234} &= 1 - (1 - R^2_{1\ 234}) \cdot \frac{N-1}{N-m} \\ &= 1 - (1 - 0.861) \cdot \frac{27-1}{27-4}, \\ &= 0.843 \end{aligned}$$

आंशिक सहसम्बन्ध—क्योंकि आंशिक निर्धारण का गुणांक हमें वह अनुपात बताता है जो (1) अनिवारित व्याख्यात विचरण, जिसका श्रेय प्रदत्त स्वतन्त्र चर को है, का (2) उस स्वतन्त्र चर के प्रयोग के पूर्व, अव्याख्यात विचरण के सम्बन्ध में है, अतः हम प्रायः यह जानने में रुचि रखते हैं कि गुणांक शून्य में सार्थक रूप में भिन्न है अथवा नहीं। परीक्षण में निम्न परिकलन सन्निहित है

$$t = \sqrt{\frac{r^2_{1m\ 23} (m-1)(N-m)}{1 - r^2_{m1\ 23} (m-1)}},$$

$n = N - m$ के साथ।

27 बालको के शारीरिक मापों के आँकड़ों के लिए,

$$r^2_{14\ 23} = \frac{R^2_{1\ 234} - R^2_{1\ 23}}{1 - R^2_{1\ 23}} \quad \text{अथवा} \quad \frac{\sum x_{c1\ 234}^2 - \sum x_{c1\ 23}^2}{\sum x_{1\ 23}^2 - \sum x_{c1\ 23}^2}$$

प्रथम व्यञ्जक का प्रयोग करने पर निम्न प्राप्त होता है

$$r^2_{14\ 23} = \frac{0.861 - 0.783}{1 - 0.783} = 0.359$$

चर X_4 ने विचरण के 36 प्रतिशत की व्याख्या की जिसकी व्याख्या करने में X_2 और X_3 असफल रहे थे।

t के मान के लिए, हम पाते हैं

$$t = \sqrt{\frac{0.359(27-4)}{1-0.359}} = 3.59,$$

$n=23$ के साथ। परिशिष्ट 8 की t सारणी से यह ज्ञात होता है कि $0.001 < P < 0.01$, और हम $r_{12, 23}^2$ को सार्थक समझते हैं।

इसी प्रकार से, यह निश्चित किया जा सकता है कि $r_{12, 24}^2$ और $r_{12, 34}^2$ सार्थक हैं अथवा नहीं। यहाँ बिना परीक्षण किये, हम केवल यह देखेंगे कि 0.01 स्तर पर $r_{12, 34}^2$ सार्थक है और 0.05 स्तर पर भी $r_{12, 24}^2$ सार्थक नहीं है, क्योंकि $r_{12, 24}^2$ के लिए P , 0.30 और 0.40 के बीच है। यह हमें यह नहीं बताता कि हमें X_3 को अपने विश्लेषण से अवश्य बाहर कर देना चाहिए, क्योंकि X_3 कुछ उपयोगी जानकारी प्रदान कर सकता है यद्यपि हम उसकी सार्थकता प्रदर्शित नहीं कर सके। तो भी, यदि हमें केवल दो स्वतन्त्र चरों के प्रयोग की इच्छा है तो निस्सन्देह वे X_2 और X_4 होंगे।

जैसा कि पृष्ठ 652—653 पर देखा गया t परीक्षण, निर्धारण के प्राशिक गुणांक की सार्थकता का परीक्षण करने के लिए F परीक्षण का विकल्प है। सामान्य शब्दों में F परीक्षण है

$$F = \frac{(\sum x_{11}^2 - \frac{m^2}{N-m})}{(\sum x_{21}^2 - \frac{m^2}{N-m})} = \frac{m - \frac{\sum x_{11}^2}{N-m}}{(\sum x_{21}^2 - \frac{m^2}{N-m})} = \frac{(m-1) - [m - (m-1)]}{(N-m) - (m-1)},$$

जहाँ पर $m - (m-1)$ निस्सन्देह हमेशा 1 है। F के लिए यह व्यंजक और t के लिए ऊपर दिए गए वर्ग के समान है, यह परिशिष्ट 8, परिच्छेद 26.4 में प्रदर्शित किया गया है।

बहुत कम अवसरों पर यह जानने की इच्छा हो सकती है कि प्राशिक निर्धारण का गुणांक उस समष्टि मान से सार्थक रूप में भिन्न है अथवा नहीं, जो शून्य नहीं है। इस प्रकार का परीक्षण ठीक उसी प्रकार किया जा सकता है। जैसा कि माधारण रेखिक सहसम्बन्ध गुणांक के लिए (647—648), z की निम्न मानक त्रुटि के साथ,

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-2.6667 - (m-2)}} = \frac{1}{\sqrt{N-m-0.6667}},$$

जहाँ m समाविष्ट चरों की संख्या है, जो कि वही है जैसी कि अनेकधा आकलन समीकरण में स्थिरांकों की संख्या है, क्योंकि हम केवल रेखिक अनेकधा सहसम्बन्ध पर विचार कर रहे हैं।

यदि कोई $r_{1m, 23}^2 (m-1)$ का मान, जो समष्टि के लिए आकलन है, चाहता है तो यह

$$r_{1m, 23}^2 \cdot (m-1) = 1 - \frac{\sum x_{11}^2 - \frac{m^2}{N-m}}{\sum x_{21}^2 - \frac{m^2}{N-m}} = \frac{m - (N-m)}{(N-m) - (m-1)}$$

से प्राप्त हो सकता है, अथवा, यदि हम अश और हर में से प्रत्येक को Σx_1^2 से विभाजित कर दें तो निम्न से

$$\begin{aligned} \hat{f}_{1m,23}^2 \cdot (m-1) &= 1 \frac{1 - \hat{R}_{1,234}^2}{1 - \hat{R}_{1,234}^2} \cdot \frac{m}{m-1}, \\ &= \frac{\hat{R}_{1,234}^2}{1 - \hat{R}_{1,234}^2} \cdot \frac{m - \hat{R}_{1,234}^2}{m-1} \cdot (m-1) \end{aligned}$$

परिशिष्ट

परिशिष्ट क

प्रत्येक अध्याय में प्रयुक्त संकेत चिह्न

अध्याय 9 में प्रयुक्त संकेत चिह्न

- β_1 छोटा ग्रीक बीटा तिरछापन का माप । अध्याय 10 देखिए ।
 β_2 छोटा ग्रीक बीटा ककुदता का माप । अध्याय 10 देखिए ।
 d एक λ मान का λ_1 से विचलन ।
 d एक X मान का λ_1 में वग अन्तरालों के रूप में विचलन ।
 Δ_1 बड़ा ग्रीक डेल्टा बहुलक वग की बारवारता और ग्राफ की दृष्टि से बहुलक वग के दाइ ओर के वग की बारवारता का अन्तर ।
 Δ बड़ा ग्रीक डेल्टा बहुलक वग की बारवारता और ग्राफ की दृष्टि से बहुलक वग के दाइ ओर के वग की बारवारता का अन्तर ।
 f बारवारता ।
 $f_1, f_2, f_3, X_1, X_2, \lambda_1$ में सम्बन्धित बारवारताएँ ।
 G गुणोत्तर माध्य ।
 H हरात्मक माध्य ।
 i वग अन्तराल ।
 i_1 वग की निचली सीमा ।
 i_2 वग की ऊपरी सीमा ।
 Med माध्यिका ।
 Mo बहुलक ।
 n चक्रवृद्धि व्याज सूत्र में प्रयोग के समान, अवधि के प्रारम्भ से अन्त तक वर्षों (या अन्य समय इकाइयों) की संख्या ।
 N प्रातदश में मदों की संख्या ।
 P_0 तथा P_n चक्रवृद्धि व्याज सूत्र में प्रयोग के समान क्रमशः अवधि के प्रारम्भ में और अन्त में मूल्य ।
 Q_1, Q_2, Q_3 चतुर्थक । $Q_2 =$ माध्यिका ।
 Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा जिसका अर्थ है 'योग लो' ।
 r "चक्रवृद्धि व्याज सूत्र" में प्रयोग के समान, प्रतिवर्ष (या अन्य समय इकाई) वृद्धि या कमी का अनुपात ।
 s प्रतिदश का मानक विचलन । अध्याय 10 देखिए ।
 x एक मूल्य का \bar{X} से विचलन ।
 $x_1, x_2, x_3, X_1, X_2, X_3$ के X से विचलन ।

- X : श्रेणी में एक मूल्य, साथ ही, एक बारवारता बटन में एक वर्ग का मध्य मूल्य।
 X_1, X_2, X_3 : एक श्रेणी में मूल्य, साथ ही, एक बारवारता बटन के वर्गों के मध्य मूल्य।
 \bar{X}_4 : एक बारवारता बटन के \bar{X} के परिकलन को सरल करने के लिए प्रथम सन्निकट के तौर पर प्रयुक्त निर्दिष्ट माध्य।
 \bar{X} : समानर माध्य। बाद के अध्यायों में हम एक प्रतिदर्श के समांतर माध्य \bar{X} , तथा समष्टि के समांतर माध्य \bar{X}_0 में भेद करेंगे।
 ∞ : अनन्त।

अध्याय 10 में प्रयुक्त सकेत चिह्न

- AD औमत (या माध्य) विचलन।
 α छोटा ग्रीक अल्फा α मूल्यों की तृतीय घातो का प्रयोग करने वाले तिरछेपन का माप।
 α_4 छोटा ग्रीक अल्फा α मूल्यों की चतुर्थ घातो का प्रयोग करने वाली ककुदता का माप।
 β_1 छोटा ग्रीक बीटा, β मूल्यों की तृतीय घातो का प्रयोग करने वाले तिरछेपन का माप।
 β_2 छोटा ग्रीक बीटा β मूल्यों की चतुर्थ घातो का प्रयोग करने वाली ककुदता का माप।
 d Δ_d में एक X मूल्य का विचलन।
 d Δ_d से एक X मूल्य का वर्ग अंतरालों के रूप में, विचलन।
 f बारवारता।
 h^2 : समानता का माप, $2s^2$ का व्युत्क्रम।
 i वर्ग अंतराल।
 M s के साथ प्रयुक्त s के एक विशिष्ट गुणा का सकेत करने के लिए।
Med माध्यिका।
Mo बहुलक।
 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ छोटे ग्रीक μ , शेफर्ड के सुधारों के साथ, \bar{X} के आसपास क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय, तथा चतुर्थ घूर्ण। $\mu_1 = \tau_1 = 0$ तथा $\mu_3 = \tau_3$
 N एक प्रतिदर्श में मदों की संख्या।
 $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ छोटे ग्रीक ν , \bar{X} के आसपास क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय, तथा चतुर्थ घूर्ण।
 P_1, P_2, \dots, P_{99} शततमक।
 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ छोटे ग्रीक पाई; \bar{X} के आसपास क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय, तथा चतुर्थ घूर्ण। $\pi_1 = 0$
 Q अर्ध अन्तश्चतुर्थ परिसर।
 Q_1, Q_2, Q_3 चतुर्थक। Q_2 = माध्यिका।
 s : एक प्रतिदर्श का मानक विचलन।

- s^2 एक प्रतिदश का प्रसरण ।
 Sk तिरछेपन का पियसन का माप ।
 Sk_0 चतुर्थका पर आधारित तिरछेपन का माप ।
 σ छोटा ग्रीक सिग्मा सिग्मा कैंरेट या 'सिग्मा हैट' समष्टि के मानक विचलन का आकलन ।
 σ छोटा ग्रीक सिग्मा समष्टि का मानक विचलन ।
 Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा जिसका अर्थ है 'योग लो ।'
 V विचरण का गुणांक ।
 x λ में Y का विचलन ।
 X श्रेणी में एक मूल्य माप हो बारबारना बटन में वग का मध्य-मान ।
 Δ समान्तर माध्य । बाद के अध्यायों में हम प्रतिदश के समान्तर माध्य Y तथा समष्टि के समान्तर माध्य Δ_y में भेद करेंगे ।
 λ निश्चित माध्य ।
 $|$ चिह्न की उपेक्षा करा इस प्रकार Σx का अर्थ है ' x मूल्यों का चिह्नो की उपेक्षा करके योग लो ।

अध्याय 12 में प्रयुक्त संकेत चिह्न

- समीकरण $Y = a + bX$ में एक स्थिरांक b का मान जब $X=0$, Y अवरोध ।
 b समीकरण $Y = a + bY$ में एक स्थिरांक ढाल ।
 N एक श्रेणी में सदो की संख्या ।
 Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा जिसका अर्थ है 'योग लो ।'
 X λ श्रेणी का एक मान ।
 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, Y$ श्रेणी के विनिष्ट मान ।
 Δ λ मानों का समान्तर माध्य ।
 Y Y श्रेणी का एक प्रक्षित मान ।
 λ_c Y श्रेणी का एक परिकल्पित मान ।
 $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n, Y$ श्रेणी के विनिष्ट मान ।
 \bar{Y} Y मानों का समान्तर माध्य ।

अध्याय 13 में प्रयुक्त संकेत चिह्न

- a विभिन्न उपनति समीकरणों में एक स्थिरांक ।
 b विभिन्न उपनति समीकरणों में एक स्थिरांक ।
 c द्वितीय या उच्चतर अंश के बहुपद में एक स्थिरांक । पादांक के रूप में c एक परिकल्पित मूल्य का एक प्रक्षित मूल्य से अंतर बताता है, देखें Y_c ।
 d तृतीय या उच्चतर अंश के बहुपद में एक स्थिरांक ।
 e चतुर्थ या उच्चतर अंश के बहुपद में एक स्थिरांक ।

- f पंचम या उच्चतर अक्ष के बहुपद में एक स्थिरांक ।
 k एक अनन्तस्पर्शीय विकास वक्र का अनन्तस्पर्शी ।
 k_0, k_1, k_2 जब एक वृद्धिघात वक्र को अन्य किसी के एक भाग पर बनाया जाता है तो k_0 प्रथम वृद्धिघात वक्र का ऊपरी अनन्तस्पर्शी है और k_1 तथा k_2 क्रमशः द्वितीय वृद्धिघात वक्र के निम्न तथा ऊपरी अनन्तस्पर्शी हैं ।
 μ छोटे ग्रीक मू वृद्धिघात वक्र के लिए उपनति मानों के निर्धारण में सहायता के लिए प्रयुक्त । $\mu = 10^a + b^1$
 Π सशोधित घातीय या गाम्पर्ट वक्र के लिए श्रेणी के प्रत्येक तृतीय भाग में बर्षों की सख्या एक वृद्धिघात वक्र के लिए, x_0 और x_1 या x_1 और x_2 के बीच समय इकाइयों की सख्या ।
 N श्रेणी में मंदी की सख्या ।
 Σ बड़ा ग्रीक निम्मा जिसका अर्थ है 'योग लो' ।
 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ क्रमशः एक श्रेणी के प्रथम, द्वितीय और तृतीय बराबर भागों के लिए मानों का योग ।
 x_1, x_2 वृद्धिघात वक्र का आसन्न करने समय y_0, y_1 , तथा y_2 के साथ सम्बद्ध रूप ।
 X X श्रेणी का एक मान ।
 y_0, y_1, y_2 वृद्धिघात वक्र के आसन्न के लिए प्रयुक्त तीन चुने हुए Y मान ।
 Y Y श्रेणी का प्रक्षित मान ।
 Y_c Y श्रेणी का परिकल्पित मान ।
 $!$ क्रमगुणित $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

अध्याय 16 में प्रयुक्त सकेत चिह्न

- β_1 छोटा ग्रीक बीटा निरन्तरता का माप । अध्याय 10 देखिए ।
 β_2 छोटा ग्रीक बीटा ककुदता का माप । अध्याय 10 देखिए ।
 C चक्रीय ।
 I अनियमित ।
 N एक श्रेणी में मंदी की सख्या ।
 s मानक विचलन । अध्याय 10 देखिए ।
 S ऋतुनिष्ठ ।
 Σ बड़ा ग्रीक निम्मा जिसका तात्पर्य है 'योग लो' ।
 T उपनति ।
 X X श्रेणी का एक मान ।
 y एक चक्रीय विचलन, अनियमित गतियों के सरलन के उपरान्त, उपनति तथा ऋतुनिष्ठ के संयुक्त आकलन से एक काल श्रेणी में मान का विचलन ।
 Y_c Y श्रेणी का परिकल्पित मान ।

अध्याय 17 और अध्याय 18 में प्रयुक्त सकेत चिह्न

- p वस्तु की कीमत ।

P : कीमत सूचकांक ।

q : वस्तु की मात्रा ।

Q : मात्रा सूचकांक ।

n : प्रदत्त अवधि अथवा वर्तमान अवधि का चोखन पादांक ।

o : आधार अवधि का चोखन पादांक ।

Σ : बड़ा ग्रीक सिग्मा जिसका अर्थ है 'योग ले' ।

उदाहरणार्थ 59 64 मिले हुए मन्वात्मक पादांक P अथवा Q (p या q) के साथ आ सकन है और 1949 आधार पर 1964 के सूचकांक को प्रदर्शित करते हैं । उदाहरणार्थ जब 64 या 59 61 मिले जाते हैं तो ऐसे पादांक p या q के साथ आ सकन है और यह दर्शाते हैं कि निर्दिष्ट कीमत अथवा मात्रा उन विशिष्ट वर्ष के लिए है या हाइफन के द्वारा अलग किए गए वर्षों के लिए घोषित (या योग) है ।

u : प्रति डालर क्य वॉलन की इकाइयाँ

अध्याय 19 में प्रयुक्त संकेत चिह्न

a : Y_c का मूल्य जब समीकरण $Y_c = a + bX$ में $X=0$ ।

a' : X_c का मूल्य जब समीकरण $X_c = a + b'Y$ में $Y=0$ ।

a_1 : 2×2 मारणी के ऊपरी बाएँ सेल में प्रेक्षित बारवारताओं की संख्या ।

a_2 : 2×2 मारणी के निम्न बाएँ सेल में प्रेक्षित बारवारताओं की संख्या ।

b : प्राकलन समीकरण $Y_c = a - bX$ का ढाल ।

b' : प्राकलन समीकरण $X_c = a + b'Y$ का ढाल ।

b_1 : 2×2 मारणी के ऊपरी दाएँ सेल में प्रेक्षित बारवारताओं की संख्या ।

b_2 : 2×2 मारणी के निम्न दाएँ सेल में प्रेक्षित बारवारताओं की संख्या ।

C : माध्य वर्ग प्राकल्पिकता का गुणांक ।

d'_x : वर्गों के रूप में Δ_x से एक सेल का विचलन ।

d'_y : वर्गों के रूप में Δ_y से एक सेल का विचलन ।

D : युग्मित मानों के स्तरों में अन्तर ।

f : बारवारता, सामूहिक सहसम्बन्ध में, सेल में बारवारता ।

f_X : X श्रेणी की बारवारता, सामूहिक सहसम्बन्ध में, सम्बन्ध बारवारता ।

f_Y : Y श्रेणी की बारवारता, सामूहिक सहसम्बन्ध में, पक्षित बारवारता ।

h : अन्य सक्रमण गुणांक ।

k^2 : प्रतिधारण का गुणांक ।

N : एक प्रतिदर्श में मदों की संख्या । द्विचर सहसम्बन्ध में, N मदों के जोड़ों की संख्या है ।

r : सहसम्बन्ध का गुणांक ।

r^2 : निर्धारण का गुणांक ।

r_{rank} : स्तर सहसम्बन्ध का गुणांक ।

S_X : X श्रेणी का मानक विचलन ।

s_Y : Y श्रेणी का मानक विचलन ।

S_{YX} : आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के लिए आकलन की मानक त्रुटि ।

Σ : बड़ा ग्रीक सिग्मा जिनका अर्थ है 'योग लो' ।

Σy^2 : Y मूल्यों का कुल विचरण ।

Σy_c : आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के प्रयोग द्वारा वर्णित Y का विचरण ।

Σy_c^2 : आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के प्रयोग द्वारा अवर्णित Y का विचरण ।

x : $X - \bar{X}$ ।

X : X श्रेणी; माप हो X श्रेणी में प्रेषित मूल्य । इस प्रकार हम X और Y के सहसम्बन्ध का नक्के करने हैं परन्तु ΣX का अर्थ है " X श्रेणी में मूल्यों को जोड़ो ।

X_{adj} : समन्वयित (क्षेत्रित) अक्ष ।

Y : पन्निष्ठ Y मूल्य ।

\bar{X} : X श्रेणी का समान्तर माध्य ।

$1/2$: कार्दार्ड ; नक्के चिह्न छोटा ग्रीक कार्दार्ड है ।

y : $Y - \bar{Y}$: Y श्रेणी में कुल विचरण Σy^2 है ।

y_c : $Y - \bar{Y}$: Y श्रेणी में वर्णित विचरण Σy_c^2 है ।

y_{adj} : $Y - \bar{Y}$: Y श्रेणी में अवर्णित विचरण Σy_{adj}^2 है ।

Y : Y श्रेणी तथा X श्रेणी में प्रेषित मूल्य । इस प्रकार हम सहसम्बन्ध वाले X और Y का नक्के करने हैं, परन्तु ΣX का अर्थ है " X श्रेणी में मूल्यों का जोड़ करो" ।

Y_{adj} : उच्चार्ड अक्ष ।

Y_c : पन्निष्ठ Y मूल्य ।

\bar{Y} : Y श्रेणी का समान्तर माध्य ।

\bar{Y} : Y मूल्यों का समान्तर माध्य, $\bar{Y}_c = \bar{Y}$ ।

अध्याय 20 में प्रयुक्त संकेत चिह्न

Σ : Y_c का मूल्य जब $X=0$ आकलन समीकरणों $Y_c = a + bX$, $Y_c = a - bX + cX^2$, तथा $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$; $(\sqrt{Y})_c$ का मूल्य जब $X=0$ आकलन समीकरण $(\sqrt{Y})_c = a + bX$ में, $\left(\frac{1}{Y}\right)_c$ का मूल्य

जब $X=0$ आकलन समीकरण $\left(\frac{1}{Y}\right)_c = a + bX$ में । आकलन समीकरण (नष्ट Y) $_c$ = नष्ट $a + X$ लघु b में जब $X=0$ तथा आकलन समीकरण (नष्ट Y) $_c$ = नष्ट $a + b$ लघु X में जब $X=1$ तब नष्ट a , (नष्ट Y) $_c$ का मूल्य है ।

b : a के लिए ऊपर वर्णित विभिन्न आकलन समीकरणों में b , या लघु b , एक स्थिरांक है ।

c : आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2$ तथा $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ में एक स्थिरांक ।

t आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ में एक स्थिरांक ।

η छोटा ग्रीक एटा सहसम्बन्ध अनुपात ।

h सहसम्बन्ध सारणी में स्तम्भों की संख्या ।

N एक प्रतिदश में मदों की संख्या । द्विचर रैखिक या अरैखिक सहसम्बन्ध में N मदों के गुणमों की संख्या है ।

N_c सहसम्बन्ध सारणी में एक स्तम्भ में मदों की संख्या ।

r_{12} X और Y के लिए निर्धारण का गुणांक ।

r_{12}^2 X और Y के लिए निर्धारण का गुणांक आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2$ का प्रयोग किया गया है ।

r_{YXX^2X} Y और X के लिए निर्धारण का गुणांक आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ का प्रयोग किया गया है ।

r_{YX^2X} $(1) X^2$ के प्रयोग के कारण बढ़ हुए विचरण का (2) अक्षरे X के प्रयोग द्वारा अध्यायान विचरण की मात्रा के अनुपात के रूप में व्यक्त एक माप । अध्याय 21 में वर्णित प्राणिक निर्धारण के गुणांक को देखिए ।

r^* लघु Y , X और लघु X के लिए निर्धारण का गुणांक ।

r^2 लघु Y , लघु X और लघु Y के लिये निर्धारण का गुणांक ।

$r^2 \frac{1}{1-X^2}$ Y और $\frac{1}{X}$ के लिये निर्धारण का गुणांक ।

$r^2 \sqrt{1-X^2}$ X और $\frac{1}{X}$ के लिये निर्धारण का गुणांक ।

s_{YX} आकलन समीकरण $Y = a + bX$ के लिये आकलन की मानक त्रुटि ।

s_{YX^2} आकलन समीकरण $Y = a + bY + cX$ के लिये आकलन की मानक त्रुटि ।

s_{YXX^2} आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ के लिये आकलन की मानक त्रुटि ।

s लघु YX आकलन समीकरण (लघु Y) $c =$ लघु $a + X$ लघु b के लिये आकलन की मानक त्रुटि ।

s लघु Y , लघु X आकलन समीकरण (लघु Y) $c =$ लघु $a + b$ लघु X के लिए आकलन की मानक त्रुटि ।

$s \frac{1}{Y}$ आकलन समीकरण $\left(\frac{1}{Y}\right)_c = a + bX$ के लिये आकलन की मानक त्रुटि ।

$s \sqrt{Y/X}$ आकलन समीकरण $(\sqrt{Y/X})_c = a + bX$ के लिए आकलन की मानक त्रुटि ।

Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा जिसका अर्थ है का योग लो ।

k सहसम्बन्ध सारणी में h स्तम्भों के ऊपर योग ।

N_c सहसम्बन्ध सारणी में एक स्तम्भ में N_c मदों के ऊपर जोड़ ।

ΣY^2 Y मूल्यों का कुल विचरण ।

$\Sigma(\text{लघु } y)^2$: लघु Y मूल्यों का कुल विचरण। पाद-टिप्पणी 10 और 11 देखिये।

$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2$: $\left(\frac{1}{Y}\right)$ मूल्यों का कुल विचरण। पाद-टिप्पणी 15 देखिये।

$\Sigma(\sqrt{y})^2$: \sqrt{Y} मूल्यों का कुल विचरण। पाद-टिप्पणी 12 देखिये।

Σy_c^2 : आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

$\Sigma y_c^2, \chi^2$: आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

$\Sigma y_c^2, \chi^2, \chi^2, \chi^2$: आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ के लिये अव्याख्यात विचरण।

$\Sigma(\text{लघु } 1)^2$: आकलन समीकरण (लघु $Y)_c = \text{लघु } a + b$ लघु X या आकलन समीकरण (लघु $Y)_c = \text{लघु } a + X$ लघु b के लिए अव्याख्यात विचरण। पाद-टिप्पणी 11 देखे।

$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)_c^2$: आकलन समीकरण $\left(\frac{1}{Y}\right)_c = a + bX$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

$\Sigma(\sqrt{y})_c^2$: आकलन समीकरण $(\sqrt{Y})_c = a + bX$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

Σy_c^2 : आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

$\Sigma y_c^2, \chi^2$: आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

$\Sigma y_c^2, \chi^2, \chi^2, \chi^2$: आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

$\Sigma(\text{लघु } y)_c^2$: आकलन समीकरण (लघु $Y)_c = \text{लघु } a + b$ लघु X , अथवा आकलन समीकरण (लघु $Y)_c = \text{लघु } a + X$ लघु b के लिए अव्याख्यात विचरण। पाद-टिप्पणी 11 देखे।

$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)_c^2$: आकलन समीकरण $\left(\frac{1}{Y}\right)_c = a + bX$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

$\Sigma(\sqrt{y})_c^2$: आकलन समीकरण $(\sqrt{Y})_c = a + bX$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

X : X श्रेणी, तथा X श्रेणी में प्रेषित मूल्य। इस प्रकार हम X तथा Y का सहसम्बन्ध करने का सकेत करते हैं, परन्तु ΣX का अर्थ है “ X श्रेणी में मूल्यों को जोड़ा”।

y : Σy देखे, $y = Y - \bar{Y}$

y_c : विभिन्न अतिरिक्त पादांशों के साथ Σy_c^2 तथा Σy_c^2 देखें। सामान्यतः y_c (अतिरिक्त पादांशों के साथ या उनके बिना), उचित परिकल्पित Y , या परिकल्पित रूपान्तरित Y , मूल्य तथा संगत समान्तर माध्य के बीच अन्तर है।

y_s : विभिन्न अतिरिक्त पादांशों सहित Σy_s^2 तथा Σy_s^2 को देखें। सामान्यतः y_s (अतिरिक्त पादांशों सहित या उनके बिना) प्रेषित Y , या रूपान्तरित प्रेषित Y , मूल्य तथा संगत परिकल्पित मूल्य के बीच अन्तर है।

Y Y श्रेणी, तथा Y श्रेणी में प्रक्षिप्त मूल्य। इस प्रकार हम X तथा Y का सहसम्बन्ध करने का संकेत करते हैं, परन्तु $\succeq Y$ का अर्थ है “ Y श्रेणी में मूल्यों को जोड़ो”।

\bar{Y} : Y मूल्यों का समान्तर माध्य।

Y_c : सहसम्बन्ध अनुपात के सम्बन्ध में प्रयोग किए जाने पर स्तम्भ का समान्तर माध्य। (पिछले अध्याय में इस चिह्न को परिकलित Y मूल्यों के समान्तर माध्य के अर्थ में प्रयुक्त किया गया था, परन्तु इस अध्याय में इसे इस प्रकार प्रयुक्त नहीं किया गया।)

$\overline{\text{लघु } Y}$: लघु Y मूल्यों का समान्तर माध्य।

$\left(\frac{1}{Y}\right)$: $\frac{1}{Y}$ मूल्यों का समान्तर माध्य।

$\sqrt{\overline{Y}} \cdot \sqrt{\overline{Y}}$ मूल्यों का समान्तर माध्य।

Y_c : परिकलित Y मूल्य।

(लघु Y) : परिकलित लघु Y मूल्य।

$\left(\frac{1}{Y}\right)$: परिकलित $\frac{1}{Y}$ मूल्य।

$(\sqrt{Y})_c$: परिकलित Y मूल्य।

अध्याय 21 में प्रयुक्त संकेत चिह्न

इस अध्याय के प्रथम अनुच्छेद में प्रयुक्त संकेत चिह्न के लिए अध्याय 19 की सूची देखिए।

a_{12} : X_{c12} का मान जब $X_2=0$ आकलन समीकरण $X_{c12}=a_{12}+b_{12}X_2$ में। अध्याय 19 में प्रयुक्त आकलन समीकरण $Y_{c12}=a+bX$ में a के समान।

a_{13} : X_{c13} का मान जब $X_3=0$ आकलन समीकरण $X_{c13}=a_{13}+b_{13}X_3$ में।

a_{123} : X_{c123} का मान जब $X_2=0$ तथा $X_3=0$ आकलन समीकरण $X_{c123}=a_{123}+b_{123}X_2+b_{133}X_3$ में।

a_{124} : X_{c124} का मान जब $X_2=0$ तथा $X_4=0$ आकलन समीकरण $X_{c124}=a_{124}+b_{124}X_2+b_{144}X_4$ में।

a_{134} : X_{c134} का मान जब $X_3=0$ तथा $X_4=0$ आकलन समीकरण $X_{c134}=a_{134}+b_{134}X_3+b_{144}X_4$ में।

$a_{122'3}$: $X_{c122'3}$ का मान जब X_2, X_2^2 , तथा $X_3=0$ आकलन समीकरण $X_{c122'3}=a_{122'3}+b_{122'3}X_2+b_{12^2'23}X_2^2+b_{1323}X_3$ में।

b_{12} : X_2 का गुणांक आकलन समीकरण $X_{c12}=a_{12}+b_{12}X_2$ में। अध्याय 19 में b के समान।

b_{13} : X_3 का गुणांक आकलन समीकरण $X_{c13}=a_{13}+b_{13}X_3$ में।

b_{123} : X_2 का गुणांक आकलन समीकरण $X_{c123}=a_{123}+b_{123}X_2+b_{133}X_3$ में।

b_{122} Y_3 का गुणांक आकलन समीकरण $Y_{c122} = a_{122} - b_{122} Y_2 + b_{122} X_2$ में ।

b_{121} b_{122} समझ X_2 तथा Y_3 का गुणांक a_{121} के लिए ऊपर निर्दिष्ट आकलन समीकरण में ।

b_{121} b_{122} समझ Y_3 तथा Y_4 के गुणांक a_{121} के लिए ऊपर निर्दिष्ट आकलन समीकरण में ।

b_{1234} Y_3 का गुणांक आकलन समीकरण $Y_{c1234} = a_{1234} + b_{1234} X_2 - b_{1234} Y_3 - b_{1234} Y_4$ में ।

b_{1234} Y_3 का गुणांक आकलन समीकरण $Y_{c1234} = a_{1234} + b_{1234} X_2 + b_{1234} Y_3 - b_{1234} Y_4$ में ।

b_{143} Y_4 का गुणांक आकलन समीकरण $Y_{c143} = a_{143} + b_{143} Y_3 + b_{143} Y_4 - b_{143} X_2$ में ।

b_{1234} r b_{1234} m b_{1234} m b_{1234} $(m-1)$ समझ Y_2 Y_3 Y_4 Y_m के गुणांक Y_{c1234} m के लिए आकलन समीकरण में ।

b_{123} b_{123} b_{123} समझ Y_2 X_3 तथा X_3 का गुणांक आकलन समीकरण में a_{123} के लिए ऊपर निर्दिष्ट ।

b_{12} X_1 का गुणांक आकलन समीकरण $X_{c21} = a_{21} + b_{21} X_1$ में ।

इस प्रक्रिया में कदा d_{123} के परिकलन में सहायता प्रयुक्त ।

१. किमा प्रतिदिन में म. की संख्या । अनकवा अथवा आशिक सहसम्बन्ध में V प्रश्न समुच्चय का संख्या हाती है ।

r_{12} निर्धारण का गुणांक X_1 तथा X_2 के लिए ।

r_{13} निर्धारण का गुणांक Y_1 तथा Y_2 के लिए ।

r_{14} निर्धारण का गुणांक X_1 तथा Y_4 के लिए ।

r_{13} निर्धारण का गुणांक X_2 तथा X_3 के लिए ।

r_{14} निर्धारण का गुणांक X तथा X_4 के लिए ।

r_{34} निर्धारण का गुणांक X_3 तथा X_4 के लिए ।

r_{123} आशिक निर्धारण का गुणांक X_1 में अतिरिक्त घटवट X_2 द्वारा व्याख्यात, X_1 में घटवट के अनुपात के रूप में अभिव्यक्त जो X_3 द्वारा व्याख्यात थी ।

r_{123} आशिक निर्धारण का गुणांक, X_1 में अतिरिक्त घटवट X_3 द्वारा व्याख्यात, X_1 में घटवट के अनुपात के रूप में अभिव्यक्त जो X_2 द्वारा व्याख्यात थी ।

r_{124} r_{134} r_{123} r_{143} r_{213} r_{314} आशिक सहसम्बन्ध के गुणांक विभिन्न प्रत्यक्ष माप के परिकलन में सहायता के लिए इस प्रक्रिया में प्रयुक्त किये गये हैं ।

r_{1234} आशिक निर्धारण का गुणांक, X_1 में अतिरिक्त घटवट X_2 द्वारा व्याख्यात, X_1 में घटवट के अनुपात के रूप में अभिव्यक्त जो X_3 तथा X_4 द्वारा व्याख्यात थी ।

r_{1234} आशिक निर्धारण का गुणांक X_1 में अतिरिक्त घटवट X_3 द्वारा व्याख्यात, X_1 में घटवट के अनुपात के रूप में अभिव्यक्त जो X_2 तथा X_4 द्वारा व्याख्यात थी ।

$r_{11 \cdot 2}^2$ प्राशिक निर्धारण का गुणांक X_1 में अतिरिक्त घटवृद्ध X_2 द्वारा व्याख्यात Y_1 में घटवृद्ध के अनुपात के रूप में अभिव्यक्त जो X_2 तथा X_3 द्वारा व्याख्यात थी।

$r_{12 \cdot 34}^2$ प्राशिक निर्धारण के गुणांक का सामान्य रूप, X_1 में अतिरिक्त घटवृद्ध X_2 द्वारा व्याख्यात Y_1 में घटवृद्ध के अनुपात के रूप में अभिव्यक्त जो X_3, X_4, \dots, X_m द्वारा व्याख्यात थी।

$r_{1 \cdot 23}^2$ प्राशिक निर्धारण के गुणांक का सामान्य रूप X_1 में अतिरिक्त घटवृद्ध Y_1 द्वारा व्याख्यात X_2 में घटवृद्ध के अनुपात के रूप में अभिव्यक्त जो X_3, X_4, \dots, X_m द्वारा व्याख्यात थी।

$r_{1 \cdot 23}^2$ (19) $r_{1 \cdot 23}^2$ के परिकलन के लिए इस अध्याय में प्रयुक्त प्राशिक महसूब-ध के गुणांक का सामान्य रूप। ध्यान दें कि तीन गुणांक परिकलित किए जाने वाले गुणांक में एक कम नीचे है प्रथम X_1 को अपवर्जित कर देता है दूसरा X_2 को अपवर्जित करता है तथा तीसरा X_3 को अपवर्जित करता है।

$R_{1 \cdot 3}^2$ अनेकधा निर्धारण का गुणांक X_1 में घटवृद्ध का अनुपात जो X_2 तथा X_3 द्वारा व्याख्यात था।

$R_{1 \cdot 4}^2$ अनेकधा निर्धारण का गुणांक X_1 में घटवृद्ध का अनुपात जो X_3 तथा X_4 द्वारा व्याख्यात था।

$R_{1 \cdot 34}^2$ अनेकधा निर्धारण का गुणांक, X_1 में घटवृद्ध का अनुपात जो X_3 तथा X_4 द्वारा व्याख्यात था।

$R_{1 \cdot 35}^2$ अनेकधा निर्धारण का गुणांक, Y_1 में घटवृद्ध का अनुपात जो X_2, X_3 तथा Y_4 द्वारा व्याख्यात था।

$R_{1 \cdot 34}^2$ अनेकधा निर्धारण के गुणांक का सामान्य रूप, X_1 में घटवृद्ध का अनुपात जो $Y_2, X_3, X_4, \dots, X_m$ द्वारा व्याख्यात था।

$R_{1 \cdot 31}^2$ (20) $r_{1 \cdot 23}^2$ के परिकलन में सहायता के लिए प्रयुक्त अनेकधा निर्धारण के गुणांक का सामान्य रूप, X_1 में घटवृद्ध का अनुपात जो $X_2, X_3, X_4, \dots, X_m$ द्वारा व्याख्यात था।

$R_{1 \cdot 34}^2$ (21) $r_{1 \cdot 23}^2$ के परिकलन में सहायता के लिए प्रयुक्त अनेकधा निर्धारण के गुणांक का सामान्य रूप X_1 में घटवृद्ध का अनुपात जो X_3, X_4, \dots, X_m द्वारा व्याख्यात था।

$S_{1 \cdot 2}^2, S_{2 \cdot 3}^2, S_{3 \cdot 4}^2$ क्रमशः X_1, X_2, X_3, X_4 श्रेणी के मानक विचलन।

$S_{1 \cdot 2}^2$ आकलन समीकरण $X_{c1 \cdot 2} = a_{1 \cdot 2} + b_{12} X_2$ के लिए आकलन मानक त्रुटि। अध्याय 19 में $S_{1 \cdot 2}^2$ के समान।

$S_{1 \cdot 3}^2$ आकलन समीकरण $X_{c1 \cdot 3} = a_{1 \cdot 3} + b_{13} X_3$ के लिए आकलन मानक त्रुटि।

$S_{1 \cdot 23}^2$ आकलन समीकरण $X_{c1 \cdot 23} = a_{1 \cdot 23} + b_{12 \cdot 3} X_2 + b_{13 \cdot 2} X_3$ के लिए आकलन मानक त्रुटि।

$S_{1 \cdot 24}^2$ आकलन समीकरण $X_{c1 \cdot 24} = a_{1 \cdot 24} + b_{12 \cdot 4} X_2 + b_{14 \cdot 2} X_4$ के लिए आकलन मानक त्रुटि।

$J_{1\ 33}$: आकलन समीकरण $X_{c1\ 33} = a_{1\ 33} + b_{13\ 4}X_2 + b_{14\ 3}X_4$ के लिए आकलन मानक त्रुटि ।

$J_{1\ 234}$: आकलन समीकरण $X_{c1\ 234} = a_{1\ 234} + b_{12\ 34}X_2 + b_{13\ 24}X_3 + b_{14\ 23}X_4$ के लिए आकलन मानक त्रुटि ।

$J_{1\ 234}$ m आकलन की मानक त्रुटि का सामान्य रूप ।

$J_{m\ 123}$ $(m-1) \cdot b_{1m\ 23}$ $(m-1)$ के परिकलन में सहायता के लिए प्रयुक्त आकलन मानक त्रुटि का सामान्य रूप ।

Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा, तात्पर्य है "योग लो" ।

ΣX_1^2 : X_1 मूल्यों की पूर्ण घटवढ़ ।

$\Sigma x_{c1\ 1}^2$, $\Sigma x_{c1\ 3}^2$, $\Sigma x_{c1\ 4}^2$: X_1 की घटवढ़ क्रमशः X_2 द्वारा, X_3 द्वारा, तथा X_4 द्वारा व्याख्यात ।

$\Sigma x_{c1\ 1\ 3}^2$, $\Sigma x_{c1\ 1\ 4}^2$, $\Sigma x_{c1\ 3\ 4}^2$: X_1 की घटवढ़, क्रमशः X_2 तथा X_3 द्वारा, X_2 तथा X_4 द्वारा, तथा X_3 और X_4 द्वारा व्याख्यात ।

$\Sigma x_{c1\ 2\ 3\ 4}^2$: X_1 की घटवढ़ X_2 , X_3 , तथा X_4 द्वारा व्याख्यात ।

$\Sigma x_{c1\ 1}^2$, $\Sigma x_{c1\ 3}^2$, $\Sigma x_{c1\ 4}^2$: X_1 की घटवढ़, क्रमशः X_2 द्वारा, X_3 द्वारा तथा X_4 द्वारा व्याख्यात ।

$\Sigma x_{c1\ 1\ 3}^2$, $\Sigma x_{c1\ 1\ 4}^2$, $\Sigma x_{c1\ 3\ 4}^2$: X_1 की घटवढ़, क्रमशः X_2 तथा X_3 द्वारा, X_2 तथा X_4 द्वारा, और X_3 तथा X_4 द्वारा व्याख्यात ।

$\Sigma x_{c1\ 1\ 3\ 4}^2$: X_1 की घटवढ़ X_2 , X_3 , तथा X_4 द्वारा व्याख्यात ।

$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_m$: $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_m$ श्रेणी में मान अपने क्रमिक समान्तर माध्यों से विचलनों के रूप में अभिव्यक्त ।

x_{c1} : देखिए Σx_{c1}^2 विभिन्न अतिरिक्त पादाको सहित ।

x_{c1} : देखिए Σx_{c1}^2 विभिन्न अतिरिक्त पादाको सहित ।

X_1 : X_1 श्रेणी, तथा X_1 श्रेणी में प्रेक्षित मान । इस प्रकार हम X_1 का X_2, X_3 तथा X_4 में महसबन्ध करने का सकेत करते हैं, किन्तु ΣX_1 का तात्पर्य है " X_1 श्रेणी में मानों का योग लो" ।

$X_2, X_3, X_4, \dots, X_m$ क्रमशः $X_2, X_3, X_4, \dots, X_m$ श्रेणियाँ; उन श्रेणियों में प्रेक्षित मान भी । X_1 देखिए ।

$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_4, \dots, \bar{X}_m$ क्रमशः $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_m$ श्रेणियों के समान्तर माध्य ।

$X_{c1\ 2}$: श्रेणी X_1 का परिकलित मान जब आकलन समीकरण $X_{c1\ 2} = a_{1\ 2} + b_{12}X_2$ का प्रयोग किया जाए । अध्याय 19 में Y_c के समान ।

$X_{c1\ 3}$: X_1 श्रेणी का परिकलित मान जब आकलन समीकरण $X_{c1\ 3} = a_{1\ 3} + b_{13}X_3$ का प्रयोग किया जाए ।

$X_{c1\ 23}$: X_1 श्रेणी का परिकलित मान जब आकलन समीकरण $X_{c1\ 23} = a_{1\ 23} + b_{12\ 3}X_2 + b_{13\ 2}X_3$ का प्रयोग किया जाए ।

$X_{c1\ 24}$ Y_1 श्रेणी का परिकल्पित मान जब $a_{1\ 11}$ के लिए ऊपर निर्दिष्ट आकलन समीकरण का प्रयोग किया जाए।

$X_{c1\ 34}$ X_1 श्रेणी का परिकल्पित मान जब $a_{1\ 11}$ के लिए ऊपर निर्दिष्ट आकलन समीकरण का प्रयोग किया जाए।

$X_{c1\ 234}$: X_1 श्रेणी का परिकल्पित मान जब आकलन समीकरण $X_{c1\ 134} = a_{1\ 234} + b_{12\ 34}Y_2 + b_{13\ 34}Y_3 - b_{14\ 23}Y_4$ का प्रयोग किया जाए।

$X_{c1\ 21'3}$: X_1 श्रेणी का परिकल्पित मान जब $a_{1\ 21'3}$ के लिए ऊपर निर्दिष्ट आकलन समीकरण का प्रयोग किया जाए।

अध्याय 22 में प्रयुक्त सकेत चिह्न

a Y_6 का मान जब $Y = -a + bY$ समीकरण में $Y = 0$

$a_{1\ 13}$ $Y_{c1\ 23}$ का मान जब आकलन समीकरण $X_{c1\ 13} = a_{1\ 13} + b_{12\ 13}X_2 + b_{13\ 13}Y_3$ में $X_2 = 0$ तथा $Y_3 = 0$

$a_{2\ 13}$ $X_{c2\ 13}$ का मान जब आकलन समीकरण $Y_{c2\ 13} = a_{2\ 13} + b_{21\ 13}X_1 + b_{22\ 13}X_2$ में $X_1 = 0$ तथा $Y_3 = 0$

b समीकरण $Y = -a + bY$ में Y का गुणांक।

$b_{12\ 3}$ ऊपर $a_{1\ 13}$ के लिए निर्दिष्ट आकलन समीकरण में X_2 का गुणांक।

$b_{13\ 3}$ ऊपर $a_{1\ 13}$ के लिए निर्दिष्ट आकलन समीकरण में Y_3 का गुणांक।

$b_{21\ 3}$ ऊपर $a_{21\ 13}$ के लिए निर्दिष्ट आकलन समीकरण में X_1 का गुणांक।

$b_{22\ 1}$ ऊपर $a_{2\ 13}$ के लिए निर्दिष्ट आकलन समीकरण में X_2 का गुणांक।

N द्वि-धर सहसंबंध के लिए मदा के युगलो की संख्या, अनेकधा एवं आंशिक सहसंबंध के लिए मदो के समुच्चयों की संख्या।

r सहसंबंध का गुणांक। r_{12} , r_{13} , r_{23} गुणांक हैं जो क्रमशः X_1 और X_2 , X_1 और X_3 , तथा X_2 और X_3 की धोर मकेत करते हैं।

$r_{12\ 3}$ आंशिक सहसंबंध का गुणांक X_3 के मानों को स्थिर रखते हुए।

s_x x मानों की मानक घटवट।

s_y y मानों की मानक घटवट।

Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा, जिसका अर्थ है "योगफल लो"।

x X मानों की उपनि-रेखा से किसी X मान की घटवट।

X X श्रेणी, तथा X श्रेणी में भी प्रेक्षित मान। इस प्रकार, हम X और Y को सहसंबंधित करने की ओर सकेत करते हैं, किन्तु ΣX का अभिप्राय है " X श्रेणी में मानों का योगफल लो"।

X_1 : X_1 श्रेणी, X_1 श्रेणी में कोई प्रेक्षित मान भी। इस प्रकार हम X_1 को X_2 के साथ या X_3 के साथ, या X_2 और X_3 दोनों के साथ सहसंबंधित करने की ओर सकेत करते हैं, किन्तु ΣX_1 का अभिप्राय है " X_1 श्रेणी के मानों का योगफल लो"।

X_2, X_3 : क्रमशः X_2 श्रेणी तथा X_3 श्रेणी, उन श्रेणियों में प्रेक्षित मान भी। देखिए X_1 ।

- $X_{c_1, 23}$ X_1 श्रेणी का परिकलित मान जब $a_{1, 23}$ के लिए उपर्युक्त आकलन समीकरण का प्रयोग किया जाय।
- $X_{c_2, 13}$ X_2 श्रेणी का परिकलित मान, जब $a_{2, 13}$ के लिए उपर्युक्त परिकलन समीकरण का प्रयोग किया जाए।
- y Y मानों की उपनति-रेखा से किसी Y मान का विचलन।
- Y Y श्रेणी, Y श्रेणी में प्रेक्षित मान भी। इस प्रकार, हम X और Y को सहमबधित करने की ओर सकेन करते हैं किन्तु ΣY का अभिप्राय है " Y श्रेणी में मानों का योगफल सो"।
- Y_c Y श्रेणी का परिकलित मान।

अध्याय 23 में प्रयुक्त सकेत चिह्न

- A पॉसा फक्त समय श्वेत पार्श्व की उपस्थिति। A का कोई आकिक मान नहीं है।
- α_1 छोटा ग्रीक अल्फा वैषम्य का एक माप, $\sqrt{\beta_1}$, देखिए अध्याय 10।
- B पॉसा फेकत समय श्वेत पार्श्व की अनुपस्थिति। B का कोई आकिक मान नहीं है।
- β_1, β_2 छोटा ग्रीक बीटा, क्रमशः वैषम्य और ककुदता के माप। अध्याय 10 देखिए।
- c वैषम्य के लिए सर्गुद्ध कभी-कभी लघुगुणकीय प्रसामान्य वक्र के आसजन में प्रयुक्त।
- C_0, C_1, C_2 द्विपद गुणाक।
- $d = \lambda_0$ में X मान का, वर्ग अन्तराल के मबध म, विचलन।
- $e = 2.71828$, श्रेणी $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$ की सीमा।
- f बारबारता।
- $F_1\left(\frac{x}{s}\right)$ द्वितीय सन्निकटन वक्र को बटाने में, परिशिष्ट ड के प्रसामान्य-वक्र क्षेत्र।
- $F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ द्वितीय-सन्निकटन वक्र को बटाने में, परिशिष्ट च के सारणीकृत मान, जो α_0 से गुणा किए जाने पर वैषम्य के लिए, परिष्कार प्रस्तुत करते हैं।
- h मिक्के को उछालने समय चित या चेहरे की उपस्थिति।
- i वर्ग अन्तराल।
- k प्रतिदर्शों की मस्या।
- N किसी प्रतिदर्श में मद्यों की मस्या।
- v_1, v_2, v_3 छोटा ग्रीक नू, चुने हुए उद्गम के सम्बन्ध में प्रथम, द्वितीय, तथा तृतीय क्षण। अध्याय 10 देखिए।
- p किसी प्रतिदर्श में उपस्थितियों का अनुपात।

- π छोटी ग्रीक पाइ प्रमामाय वक्र के लिए अभिव्यक्ति में स्थिर 3.14159
द्विपद में किमी समष्टि में उपस्थितियों का अनुपात ।
- π_2, π_3 छोटी ग्रीक पाइ Δ के विषय में द्वितीय तथा तृतीय संचलन । अध्याय 10 देखिए ।
- q किसी प्रतिदश में अनुपस्थितियों का अनुपात ।
- Q चतुर्थक विचलन यथवा अथवा तबचतुर्थक परिसर । अध्याय 10 देखिए ।
- Q_1, Q_2, Q_3 चतुर्थक । अध्याय 9 देखिए ।
- s किसी प्रतिदश का मानक विचलन । अध्याय 10 देखिए ।
- S लघु प्रतिदश मानों की श्रेणियों के नमूनेगणको का मानक विचलन ।
- Sk लघु चतुर्थको के लघुगणको पर आश्रित वषम्य का गुणांक ।
- σ छोटा ग्रीक सिग्मा समष्टि का मानक विचलन ।
- σ एक अकले प्रतिदश में परिकल्पित समष्टि का आकलित मानक विचलन ।
सिग्मा करट या सिग्मा ट्रेज के रूप में सकेतित । अध्याय 24 देखिए ।
- t सिक्का उछालन समय पट की उपस्थिति यथवा चेहर की अनुपस्थिति ।
- τ छोटा ग्रीक टाउ किमी समष्टि में अनुपस्थितियों का अनुपात ।
- x $\lambda - \Delta$
- X X श्रेणी का मान ।
- Y समान्तर माध्य । अध्याय 9 देखिए ।
- Δ_d निर्दिष्ट माध्य अध्याय 9 देखिए ।
- Δ लघु नमूनेगणको की श्रेणी का समान्तर माध्य ।
- x लघु लघु $X - \Delta$ नमूने ।
- Y' आसन्नित वक्र की परिकल्पित कोटि ।
- Y_0 Δ पर प्रमामाय वक्र की परिकल्पित कोटि ।
- $\int_0^1 f(x) dx$ Δ से Y तक वक्रा तमन नानुपातिक क्षेत्र ।

अध्याय 24 में प्रयुक्त सकेत चिह्न

- β, β छोटा ग्रीक बीटा समष्टि में वषम्य ।
- $\beta_{1\Delta}$ Δ मूल्यों वाले प्रतिदश के विभाजन का वषम्य ।
- $\beta_{2\Delta}$ समष्टि में ककुदता ।
- $\beta_{3\Delta}$ मूल्यों वाले प्रतिदश के विभाजन की ककुदता ।
- D युग्मित मूल्यों के मध्य अंतर ।
- d विचलन वग अन्तरालों के सदिश में Δ_d से X का ।

$F \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$; देखिए अध्याय 26।

f बारम्बारता।

k प्रतिदर्शों की संख्या। k सामान्य रूप से K से अधिक छोटा होगा।

K एक समष्टि में प्रदत्त प्रकार के सम्भव प्रतिदर्शों की संख्या।

n : प्रतिदर्श में स्वतन्त्र अंग। जब दो प्रतिदर्श विचाराधीन हों, $n = n_1 + n_2$ ।

N प्रतिदर्श में मदों की संख्या।

P प्रायिकता, 0 से 1 तक विचरण करती है।

\mathcal{O} समष्टि में मदों की संख्या। पादांक के रूप में, \mathcal{O} का अर्थ है "समष्टि", इस प्रकार $\bar{X}_{\mathcal{O}}$ समष्टि का समांतर माध्य है।

r सहसंबंध गुणांक।

s प्रतिदर्श का मानक विचलन।

σ छोटा ग्रीक सिग्मा, समष्टि का मानक विचलन।

$\hat{\sigma}$ समष्टि का आकलित मानक विचलन, एक प्रतिदर्श से परिकलित। जिसका उल्लेख "सिग्मा कैरेट" अथवा "सिग्मा हैट" की तरह हुआ है।

$\hat{\sigma}_1$ प्रतिदर्श 1 पर आधारित आकलन।

$\hat{\sigma}_2$ प्रतिदर्श 2 पर आधारित आकलन।

$\hat{\sigma}_{1+2}$ आकलन है, जिसका दो प्रतिदर्शों की स्वातन्त्र्य-मात्रा और x^2 मूल्यों के एकत्रीकरण द्वारा परिकलन हुआ है।

$\hat{\sigma}_D$ D मूल्यों की श्रेणी के लिए आकलित समष्टि मानक त्रुटि।

$\sigma_{\bar{X}}$ \bar{X} की मानक त्रुटि। जब दो प्रतिदर्श विचाराधीन हों, तो हम प्रयोग करते हैं $\sigma_{\bar{X}_1}$ और $\sigma_{\bar{X}_2}$ ।

$\hat{\sigma}_{\bar{X}}$ \bar{X} की आकलित मानक त्रुटि।

$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1} - \hat{\sigma}_{\bar{X}_2}$ दो प्रतिदर्श समान्तर माध्यों के बीच आकलित मानक त्रुटि का अन्तर।

$\hat{\sigma}_{\bar{X}D}$ \bar{X}_D की आकलित मानक त्रुटि।

Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा, अर्थात् "योग लो"।

$t \frac{\bar{X} - \bar{X}_0}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}}, \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}, \text{ या } \frac{\bar{X}_D}{\hat{\sigma}_{\bar{X}D}}.$

x $X - \bar{X}$, साथ ही, $\bar{X} - \bar{X}_0$ व्यञ्जक $\frac{x}{\sigma}$ में, जो दीक्षता है।

x_1 : श्रेणी 1 में \bar{X}_1 से मूल्य का विचलन, $\Sigma x_1^2 = \Sigma (X_1 - \bar{X}_1)^2$ ।

x_2 : श्रेणी 2 में \bar{X}_2 से मूल्य का विचलन; $\Sigma x_2^2 = \Sigma (X_2 - \bar{X}_2)^2$ ।

\bar{X} : प्रतिदर्श में प्रेषित मान।

- X_1 : प्रतिदर्श 1 में प्रेक्षित मान ।
 X_2 : प्रतिदर्श 2 में प्रेक्षित मान ।
 \bar{X} : प्रतिदर्शों का समांतर माध्य ।
 \bar{X}_1 : प्रतिदर्श 1 का समांतर माध्य ।
 \bar{X}_2 : प्रतिदर्श 2 का समांतर माध्य ।
 \bar{X}_D : D मानों की श्रेणी का समांतर माध्य ।
 \bar{X}_g : समष्टि का समांतर माध्य ।
 \bar{X}_{g1} : \bar{X}_g की निम्न विश्वास्यता सीमा ।
 \bar{X}_{g2} : \bar{X}_g की उच्च विश्वास्यता सीमा ।

$\frac{s}{\sigma}$ विचलन अपनी मानक त्रुटि द्वारा विभाजित, उदाहरणार्थ $\frac{\bar{X} - \bar{X}_g}{\sigma}$

L^2 : छोटा ग्रीक काई देखिए । अध्याय 25 ।

अध्याय 25 में प्रयुक्त संकेत चिह्न

भाग 1 अनुपात

- a : प्रतिदर्शों में घटनाओं की संख्या ।
 a_1 : प्रतिदर्श 1 में घटनाओं की संख्या ।
 a_2 : प्रतिदर्श 2 में घटनाओं की संख्या ।
 α : छोटा ग्रीक अल्फा, समष्टि में घटनाओं की संख्या ।
 A : घटना का सूचक, A का कोई प्राकृतिक मान नहीं है ।
 b : प्रतिदर्शों में घटनाओं की संख्या ।
 β : छोटा ग्रीक बीटा, समष्टि में घटनाओं की संख्या ।
 B : घटना का सूचक, B का कोई प्राकृतिक मान नहीं है ।
 k : प्रतिदर्शों की संख्या ।
 N : प्रतिदर्शों में मदों की संख्या ।
 N_1 : प्रतिदर्श 1 में मदों की संख्या ।
 N_2 : प्रतिदर्श 2 में मदों की संख्या ।
 p : प्रतिदर्शों में घटनाओं का अनुपात ।
 p_k : k वे प्रतिदर्शों में घटनाओं का अनुपात ।
 p_1 : प्रतिदर्श 1 में घटनाओं का अनुपात ।
 p_2 : प्रतिदर्श दो में घटनाओं का अनुपात ।
 \bar{p} : दो प्रतिदर्शों पर आधारित π का आकलन, p_1 तथा p_2 की भारित औसत ।

P प्रायिकता, 0 से 1 तक घटती-बढ़ती है।

τ छोटी ग्रीक पाई, समष्टि में घटनाओं का अनुपात।

τ_1 τ की निचली विश्वाम्यता सीमा।

τ_2 τ की ऊपरी विश्वाम्यता सीमा।

q विभी प्रतिदर्श में घटनाओं का अनुपात, $q = 1 - p$

q_1 प्रतिदर्श 1 में घटनाओं का अनुपात।

q_2 प्रतिदर्श 2 में घटनाओं का अनुपात।

$q = 1 - p$

σ_a a की मानक त्रुटि।

σ_p p की मानक त्रुटि।

$\sigma_{\tau_1}, \sigma_{\tau_2}, \sigma_{\tau}$ तथा σ_p के बीच भिन्नता की साकलित मानक त्रुटि।

τ छोटा ग्रीक टाउ, समष्टि में घटनाओं का अनुपात $\tau = 1 - \tau$ ।

$\frac{1}{\sigma}$ अपनी मानक त्रुटि में विभाजित विचलन, उदाहरण के लिए

$$p = \frac{\pi}{\sigma_p} \text{ और } a = \frac{\tau - \lambda}{\sigma_a}$$

भाग 2 कार्द-वर्ग परीक्षण

a प्रतिदर्श में घटनाओं की संख्या।

a_1 किसी 2×2 सारणी के या, सामान्यतः, किसी भी $2 \times R$ सारणी के, ऊपरी बाएँ सेल में प्रेक्षित बारवारताओं की संख्या।

a_2 किसी $2 \times R$ सारणी के प्रथम स्तम्भ की दूसरी पक्ति में प्रेक्षित बारवारताओं की संख्या, किसी 2×2 सारणी के निचले बाएँ सेल में भी।

a_3 किसी $2 \times R$ सारणी के प्रथम स्तम्भ की तीसरी पक्ति में प्रेक्षित बारवारताओं की संख्या।

A घटना की सूचक, A का कोई आंकिक मान नहीं है।

b प्रतिदर्श में घटनाओं की संख्या।

b_1 किसी 2×2 सारणी के, या, सामान्यतः, किसी $2 \times R$ सारणी के ऊपरी दाएँ कोष्ठ में प्रेक्षित बारवारताओं की संख्या।

b_2 किसी $2 \times R$ सारणी के द्वितीय स्तम्भ की दूसरी पक्ति में प्रेक्षित बारवारताओं की संख्या, किसी $2 \times R$ सारणी के निचले दाएँ कोष्ठ में भी।

b_3 किसी $2 \times R$ सारणी के द्वितीय स्तम्भ की तीसरी पक्ति में प्रेक्षित बारवारताओं की संख्या।

- B घटना की सूचक B का कोई आंकिक मान नहीं है।
- C जिस कोई वस्तु साक्ष्य में हाशिये के बाग निश्चित है उसमें प्रेषित बारबारताया (योग का छाहकर) के स्मरणों की सख्या।
- f प्रेषित बारबारता।
- f_c परिकल्पित बारबारता।
- n स्वातंत्र्य के अंश।
- N प्रतिदर्श में सदों की सख्या। 2×2 तथा अन्य बड़ी मारणियां में N सम्पूर्ण साक्ष्यों की सदों की सख्या है।
- N_0 $2 \times R$ साक्ष्यों के प्रथम स्मरण में बारबारताया (सदों) का सख्या।
- N_1 $2 \times R$ साक्ष्यों के द्वितीय स्मरण में बारबारताया (सदों) की सख्या।
- N_1, N_2, \dots, N_r जहां $2 \times R$ साक्ष्यों की प्रथम द्वितीय तृतीय पक्ष में बारबारताया (सदों) की सख्या।
- p प्रतिदर्श में घटनाओं का अनुपात।
- p_1 प्रतिदर्श 1 में घटनाओं का अनुपात।
- p_2 प्रतिदर्श 2 में घटनाओं का अनुपात।
- P प्रायिकता 0 से 1 तक घटती बढ़ती है।
- \sim छोटी ग्रीक पाई समष्टि में घटनाओं का अनुपात।
- P : जिस कोई वस्तु के हाशिये के बाग निश्चित है, उसमें प्रेषित बारबारताया (योगों को छाह कर) की शक्तियों की सख्या।
- σ_0 समष्टि का प्रसरण।
- σ_1 समष्टि का कार्गनित प्रसरण।
- σ_2 σ की मानक त्रुटि।
- σ_p p की मानक त्रुटि।
- Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा इसका अर्थ है योगफल लो'।
- $\frac{x}{\sigma}$ मानक त्रुटि से विभाजित विचलन, उदाहरणार्थ, $\frac{p - \pi}{\sigma_p}$
- \sim कोई-वर्ग। यह सकेत चिह्न छोटी ग्रीक काई है।
- '' जम गुणित उदाहरणार्थ, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$

अध्याय 26 में प्रयुक्त सकेत चिह्न

प्रसरण

- F $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$
- G गुणोत्तर माध्य।
- h प्रतिदर्शों की सख्या।

L अनेक प्रसरणों के गुणोत्तर माध्य का उनके समांतर माध्य से अनुपात ।

n स्वातन्त्र्य-संख्या ।

n_1, n_2, n_3 क्रमशः, प्रतिदर्श 1, 2, 3... n_k में स्वातन्त्र्य-संख्या जिनका उल्लेख k प्रतिदर्श की स्वातन्त्र्य-संख्याओं में होता है ।

N प्रतिदर्श में मदों की संख्या ।

N_1, N_2, N_3 क्रमशः प्रतिदर्श 1, 2, 3... N_k में मदों की संख्या जिनका उल्लेख k प्रतिदर्श की संख्या में होता है ।

N_i आकार के अनेक प्रतिदर्शों में से किसी भी एक की मदों की संख्या दिखाने के लिए L के सम्बन्ध में प्रयुक्त हुआ है ।

P प्राधिकता 0 में 1 तक विचरती है ।

s^2 प्रतिदर्श का प्रसरण ।

s_1^2 प्रतिदर्श 1 का प्रसरण ।

s_2^2 प्रतिदर्श 2 का प्रसरण ।

σ^2 समष्टि का प्रसरण ।

σ_1^2 σ^2 की निम्न विश्वास्यता सीमाएँ ।

σ_2^2 σ^2 की उच्च विश्वास्यता सीमाएँ ।

$\hat{\sigma}^2$ प्रतिदर्श से प्राप्त समष्टि का आकलित प्रसरण ।

$\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_3^2$ क्रमशः, प्रतिदर्श 1, 2, 3 $\hat{\sigma}_k^2$ के समष्टि प्रसरण का आकलन, जिसका उल्लेख k प्रतिदर्श में होता है ।

Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा अर्थात् "योग लो" ।

x $X - \bar{X}$

x_1 प्रतिदर्श में विचलन का मान 1 से \bar{X}_1 , $\Sigma x_1^2 = \Sigma (x_1 - \bar{X}_1)^2$

x_2 प्रतिदर्श में विचलन का मान 2 से \bar{X}_2 , $\Sigma x_2^2 = \Sigma (x_2 - \bar{X}_2)^2$

\bar{X}_1 प्रतिदर्श 1 का समांतर माध्य ।

\bar{X}_2 प्रतिदर्श 2 का समांतर माध्य ।

X^2 देखिए अध्याय 25 । सकेत चिह्न छोटे ग्रीक सिग्मा का है ।

∞ अनन्त चिह्न ।

प्रसरण का विस्तरेण

F σ^2 के दो अनुमानों का अनुपात ।

k_b वक्त्रों की संख्या ।

k_c स्तम्भों की संख्या ।

k_r पंक्तियों की संख्या ।

- n स्वातन्त्र्य कोटिया ।
- n_1 स्वातन्त्र्य कोटियाँ F के मूल में सम्बन्धित ।
- n_1 स्वातन्त्र्य कोटियाँ F के हर में सम्बन्धित ।
- N सभी पक्षितियों सभी स्तम्भों या सभी बक्सों में मदों की संख्या ।
- N_0 बक्स में मदों की संख्या ।
- N_s स्तम्भ में मदों की संख्या ।
- N_p पक्षि में मदों की संख्या ।
- N_1, N_2, V_3 क्रमशः स्तम्भ 1, 2, 3 में मदों की संख्या ।
- P प्रायिकता 0 से 1 तक बिचरची है ।
- $\hat{\theta}$ समष्टि प्रसरण का प्रयुक्त अनुमान $\sum_{i=1}^V (\lambda_i - \bar{\lambda})^2$ का प्रयोग करते हुए ।
- Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा भागित योग को ।
- $\sum_{i=1}^{\lambda_0}$ बक्सों λ_0 के ऊपर सकलन ।
- $\sum_{i=1}^{\lambda_0}$ स्तम्भों λ_0 के ऊपर सकलन ।
- $\sum_{i=1}^{\lambda_p}$ पक्षियों λ_p के ऊपर सकलन ।
- $\sum_{i=1}^V$ सभी मदों के ऊपर सकलन । Σ के समान ।
- $\sum_{i=1}^{N_0}$ बक्स की मदों λ_0 के ऊपर सकलन ।
- $\sum_{i=1}^{N_s}$ स्तम्भ की मदों λ_s के ऊपर सकलन ।
- $\sum_{i=1}^{N_p}$ पक्षि की मदों N_p के ऊपर सकलन ।
- t देखिए अध्याय 24 : $t = \sqrt{F}$ जब $n_1 \rightarrow 1$
- X प्रेक्षित मान ।
- \bar{X} सभी मदों का समानतर माध्य "महामाध्य" ।
- \bar{X}_0 बक्स का समानतर माध्य ।
- \bar{X}_s स्तम्भ का समानतर माध्य ।
- \bar{X}_p पक्षि का समानतर माध्य ।

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ क्रमशः स्तम्भ 1, 2, 3 का समान्तर माध्य ।

F काइ वग, देखिए अध्याय 25 । $\frac{X^2}{n} = F$ जब $N \rightarrow \infty$

वैषम्य और ककुदता

β_1 छोटा ग्रीक बीटा प्रतिदश म वैषम्य का माप । देखिए अध्याय 10 ।

β छोटा ग्रीक बीटा प्रतिदश म ककुदता का माप । देखिए अध्याय 10 ।

N प्रतिदश म मदा की मर्या ।

सहसम्बन्ध गुणांक

b अनुमानित समीकरण $Y = a + bX$ का ढाल ।

F दो अनुमानित प्रसरण का अनुपात ।

r_{yx}^2 छोटा ग्रीक ईटा स्तम्भ माध्या पर आधारित सहसम्बन्ध अनुपात का वग (देखिए अध्याय 20) कभी कभी निर्धारण के अनुपात के रूप में उल्लिखित किया है ।

r_{yx}^2 छोटा ग्रीक ईटा r_{yx}^2 का समष्टि अनुमान ।

m अनुमानित समीकरण में अचरो की संख्या । सहसम्बन्ध समीकरण r_{yx} के लिए m स्तम्भों की संख्या है ।

n स्वातन्त्र्य काटियाँ ।

n और n क्रमशः F व ग्रथ और हर से सम्बन्धित स्वातन्त्र्य काटियाँ ।

V प्रतिदश म मदों की संख्या । दो चर रेखिक अथवा अरेखिक सहसम्बन्ध में N मदों के जोड़ों की संख्या है । बहु अथवा आंशिक सहसम्बन्ध में, N प्रेक्षण समुच्चयों की संख्या है ।

N_1 और N_2 क्रमशः मदों के जोड़ों की संख्या जिनसे r_1 और r_2 की गणना की गई थी ।

P प्रायिकता, 0 से 1 तक विचरती है ।

r प्रतिदश सहसम्बन्ध का गुणांक दो चरों का रेखिक सहसम्बन्ध । जब दो प्रतिदश विचाराधीन हों तो हम r_1 और r_2 का प्रयोग करते हैं ।

r_g समष्टि सहसम्बन्ध गुणांक दो चरों का एक घात सहसम्बन्ध ।

r_{g1} r_g की निम्न विश्वसनीय सीमा ।

r_{g2} r_g की ऊपरी विश्वसनीय सीमा ।

\hat{r} प्रतिदश में प्राप्त r_g का अनुमानित मान ।

r^2 गुणांक का आंशिक निर्धारण । देखिए अध्याय 21 ।

r_{1m}^2 23 (m-1) m चरों के लिए सामान्य प्रकार के गुणांक का आंशिक निर्धारण ।

r_{1m}^2 23 (m-1) r_{1m}^2 23 (1-1) का अनुमानित समष्टि मान ।

r_{12}^2 34, r_{13}^2 24, r_{14}^2 34 चार चरों के लिए गुणांक के आंशिक निर्धारण के तीन प्रकार, जब X_1 आश्रित चर हो ।

r_{YX}^2 आंशिक निर्धारण का गुणांक, X^2 द्वारा व्याख्या किये हुए Y में अतिरिक्त विचरण Y के अनुपात के विचरण में प्रकट हुआ था जिसकी व्याख्या X के द्वारा नहीं हुई थी ।

r_{YX}^2 X और Y के लिए निर्धारण का गुणांक आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cY^2$ का प्रयोग किया था ।

r_{YX}^2 X^2 r_{YX}^2 का समष्टि प्राकलन ।

r_{YX}^2 X^2 आंशिक निर्धारण का गुणांक, X^2 द्वारा व्याख्यात Y में अतिरिक्त विचरण, Y के अनुपात के विचरण में अभिव्यक्त जिसकी व्याख्या X और X^2 के द्वारा नहीं हुई थी ।

r_{YX}^2 X^2 X और Y के लिए निर्धारण का गुणांक, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dY^2$ प्रयुक्त हुआ था ।

R_{123}^2 बहुगुण निर्धारण का गुणांक, X_1 में चर का अनुपात जिसकी व्याख्या X_2 और X_3 के द्वारा हुई थी ।

R_{1234}^2 बहुगुण निर्धारण का गुणांक, Y_1 में चर का अनुपात जिसकी व्याख्या X_2 , X_3 और X_4 के द्वारा हुई थी ।

R_{1234}^2 m चरों के लिए बहुगुण निर्धारण का सामान्य प्रकार का गुणांक ।

\hat{R}_{1234}^2 m R_{1234}^2 का आकलित समष्टि मान ।

s_1^2 Y श्रेणी का कुल प्रसरण ।

s_1^2 : आकलन समीकरण $Y_c = a + bY$ के लिए आकलन की मानक त्रुटि का वर्ग, अव्याख्यात प्रसरण ।

σ^2 समष्टि में आकलित प्रसरण ।

σ_1^2 Y श्रेणी का आकलित समष्टि प्रसरण (कुल प्रसरण) ।

σ_1^2 अव्याख्यात प्रसरण का समष्टि आकलन, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप ।

σ_2 : Z की मानक त्रुटि ।

$\sigma_{x_1-x_2}$: $x_1 - x_2$ की मानक त्रुटि ।

Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा, अर्थात् "योग लो" ।

Σx_1^2 कुल प्रसरण X_1 श्रेणी में ।

Σx_{c1}^2 : व्याख्यात प्रसरण आकलन समीकरण $X_{c1} = a_{12} + b_{12}X_2 + b_{12.2}X_3$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप ।

ΣX_{c1}^2 3 4 व्याख्यात प्रसरण आकलन समीकरण $X_{c1} = a_{1234} + b_{1234}X_2 + b_{1324}X_3 + b_{1423}X_4$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप ।

ΣX_{c1}^2 3 4 सामान्य रूप व्याख्यात प्रसरण आकलन समीकरण $X_{c1} = a_{1234} + b_{1234}X_2 + b_{1324}X_3 + b_{1423}X_4 + \dots + b_{1m23}X_m$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप ।

ΣX_{c1}^2 2 3 4 (m-1) व्याख्यात प्रसरण आकलन समीकरण $X_{c1} = a_{1234} + b_{1234}X_2 + b_{1324}X_3 + b_{1423}X_4 + \dots + b_{1(m-1)23}X_{(m-1)}$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप ।

ΣX_{c1}^2 व्याख्यात प्रसरण ΣX_{c1}^2 3 के लिए दिखाए गए आकलन समीकरण के प्रयोग के परिणामस्वरूप ।

ΣX_{c1}^2 3 4 व्याख्यात प्रसरण ΣX_{c1}^2 2 3 4 के लिए दिखाए गए आकलन समीकरण के प्रयोग के परिणामस्वरूप ।

ΣX_{c1}^2 3 4 सामान्य रूप व्याख्यात प्रसरण ΣX_{c1}^2 2 3 4 के लिए दिखाए गए आकलन समीकरण के प्रयोग के परिणामस्वरूप ।

ΣX_{c1}^2 2 3 4 (m-1) व्याख्यात प्रसरण ΣX_{c1}^2 3 4 के लिए दिखाए गए आकलन समीकरण के प्रयोग के परिणामस्वरूप ।

Σy^2 Y श्रृंखला का कुल प्रसरण ।

Σy_c^2 व्याख्यात प्रसरण, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप ।

Σy_c^2 XX^2 व्याख्यात प्रसरण आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2$ के प्रयोग के परिणाम स्वरूप ।

Σy_c^2 XX^2X^3 व्याख्यात प्रसरण, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप ।

Σy_c^2 : व्याख्यात प्रसरण, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप ।

Σy_c^2 XX^2 व्याख्यात प्रसरण, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप ।

Σy_c^2 XX^2X^3 व्याख्यात प्रसरण, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ के प्रयोग के परिणाम स्वरूप ।

$t = \frac{\sqrt{r^2(N-m)}}{1-r^2}$, अथवा तुल्य व्यंजक (देखिए टिप्पणी 15) । r^2 निर्धारण का द्विचर रेखिक गुणांक अथवा निर्धारण का आंशिक गुणांक हो सकता है ।

$\frac{\bar{x}}{s}$ अपनी मानक त्रुटि से विभाजित विचलन, उदाहरणार्थ, $\frac{\bar{x}-O}{s}$ अथवा

$$\frac{z_1 - z_2}{s_{z_1 - z_2}}$$

X : X श्रेणी में प्रेक्षित मान, X श्रेणी भी ।

X_1, X_2, X_3, X_4 , क्रमशः X_1, X_2, X_3, X_4 , श्रेणियाँ, इन श्रेणियों में प्रेक्षित मान भी । इस प्रकार, हम उल्लेख कर सकते हैं X_1 को X_2, X_3, X_4 में सहसम्बन्धित करते हुए परन्तु $\subseteq X_1$ का अर्थ है, “ X_1 श्रेणी में मानों का योग दो” ।

\bar{X} : X श्रेणी का समांतर माध्य ।

y : $Y - \bar{Y}$

$y_c = Y_c - \bar{Y} \sum_j^2$ और अनिश्चित घटोलेख सहित \sum_j^2 को भी देखिए ।

$y_s = Y - Y_c \sum_j$ और अनिश्चित घटोलेख सहित \sum_j^2 को भी देखिए ।

Y : Y श्रेणी में प्रेक्षित मान Y श्रेणी भी ।

\bar{Y} : Y श्रेणी का समांतर माध्य ।

Y_c परिकल्पित Y मान ।

$r = 1.15129$ लघु $\frac{1+r}{1-r}$ जब दो प्रतिदर्श विचाराधीन हों, तो हम r_2 तथा

r_3 से भ्रमति के लिए z_1 तथा z_2 का प्रयोग करते हैं ।

$z_2 = 1.15129$ लघु $\frac{1+r_2}{1-r_2}$

z_{21}, z_2 की निम्न विश्वाम्यता सीमा ।

z_{21}, z_2 की ऊपरी विश्वाम्यता सीमा ।

परिशिष्ट ख

प्रथम 50 प्राकृतिक संख्याओं की प्रथम

छः घातो के योग

$M=1$ से $M=50$ तक की पहली M प्राकृतिक संख्याओं की पहली छः घातो के योग को बताने वाली निम्न सारणी, काल थैली पर उपनिविष्ट रेखा को घातजित करने के लिए बार-बार काम में आयेगी। उस प्रकार के प्रमेय के लिए परिकल्पन सारणी में प्रयुक्त X का उच्चतम पान M है। जब λ मूलबिन्दु X मानों के कन्द्र में लिया गया हो तब हम

M	$\sum X$	$\sum X^2$	$\sum X^3$	$\sum X^4$	$\sum X^5$	$\sum X^6$
1	1	1	1	1	1	1
2	3	5	9	17	27	65
3	6	14	36	95	276	794
4	10	30	100	354	1 300	4 890
5	15	55	225	679	4 425	20 515
6	21	91	441	2 275	12 201	87 171
7	28	140	784	4 676	29 408	184 820
8	36	204	1 296	8 772	61 776	448 984
9	45	285	2 025	15 333	120 675	878 408
10	55	385	3 025	25 333	220 625	1 978 405
11	66	506	4 356	39 974	341 874	3 749 906
12	78	650	6 084	60 710	620 095	6 735 950
13	91	819	8 281	89 271	1 001 011	11 562 759
14	105	1 015	11 025	127 687	1 539 825	19 082 495
15	120	1 440	14 400	1 8 312	2 299 260	30 482 920
16	136	1 896	18 496	243 488	3 347 776	47 260 136
17	153	2 385	23 409	32 369	4 777 633	71 397 705
18	171	2 909	29 241	432 345	6 657 201	105 409 929
19	190	3 610	36 100	562 666	9 133 300	152 455 810
20	210	4 410	44 100	722 666	12 333 300	216 455 810
21	231	5 311	53 361	917 147	16 417 401	302 221 931
22	253	6 385	64 009	1 151 403	21 571 043	415 601 835
23	276	7 624	76 176	1 431 244	28 007 376	543 637 724
24	300	9 000	90 000	1 763 020	35 970 000	754 740 700
25	325	10 525	105 625	2 163 645	45 735 625	998 851 825
26	351	12 321	123 201	2 610 621	57 617 001	1 307 707 101
27	378	14 262	142 684	3 142 062	71 965 908	1 695 217 590
28	406	16 496	164 836	3 756 719	89 146 276	2 177 107 804
29	435	18 925	189 225	4 463 999	109 697 425	2 771 931 215
30	465	21 625	216 225	5 273 999	131 987 425	3 500 931 215
31	496	24 606	246 016	6 197 520	162 616 544	4 388 434 896
32	528	27 872	278 784	7 246 096	196 171 009	5 462 176 720
33	561	31 461	314 771	8 432 017	235 306 401	6 751 644 689
34	595	35 405	354 075	9 763 353	280 741 625	8 293 449 105
35	630	39 910	399 900	11 268 948	333 263 700	10 136 714 730
36	666	44 606	443 536	12 949 504	393 729 576	12 313 497 068
37	703	49 209	494 209	14 822 755	463 813 633	14 879 223 475
38	741	54 961	549 051	16 907 591	542 309 001	17 890 150 859
39	780	60 840	604 400	19 221 332	632 531 200	21 498 803 620
40	820	66 840	672 400	21 781 332	734 913 200	25 904 903 620
41	861	72 921	741 321	24 607 093	850 789 401	30 243 497 851
42	903	79 145	815 409	27 718 789	981 490 633	35 744 039 605
43	946	85 516	874 316	31 137 590	1 129 459 076	42 065 402 654
44	990	92 040	950 100	34 885 665	1 291 405 300	49 371 716 510
45	1 035	98 725	1 025 625	38 996 311	1 477 933 425	57 625 452 135
46	1 081	105 561	1 168 561	43 463 767	1 683 896 401	67 099 779 031
47	1 128	112 644	1 272 384	48 343 444	1 911 241 409	77 578 924 369
48	1 176	119 876	1 392 976	53 661 584	2 164 015 344	90 109 584 524
49	1 225	127 225	1 530 625	59 416 665	2 440 570 675	103 910 82 075
50	1 275	135 025	1 625 625	65 666 665	2 763 020 625	119 575 672 025

सारणी में दिये हुए सूक्तों को दो में गुणा करना आवश्यक है। जब मूलबिन्दु काव श्रेणी में प्रथम X मान पर लिया गया हो तब प्रामाण्य समीकरणों में प्रयुक्त हुआ N $M+1$ के बराबर है, जब मूल बिन्दु का काल श्रेणी में X मानों के केन्द्र में लिया गया हो, तो N का मान $2M+1$ है।

पहली M प्राकृतिक सख्याओं की पहली छ पाँचों के योग निम्न व्यंजकों से प्राप्त किये जा सकते हैं :

$$\sum_{i=1}^M X = \frac{M(M+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^M X^2 = \left(\frac{3M^2 + 3M - 1}{5} \right) \sum_{i=1}^M X$$

$$\sum_{i=1}^M X^2 = \left(\frac{2M+1}{3} \right) \sum_{i=1}^M X$$

$$\sum_{i=1}^M X^2 = \left(\frac{2M^2 + 2M - 1}{3} \right) \sum_{i=1}^M X$$

$$\sum_{i=1}^M X^2 = \left(\sum_{i=1}^M X \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^M X^2 = \left(\frac{3M^3 + 6M^2 - 3M + 1}{7} \right) \sum_{i=1}^M X^2$$

पहली 100 प्राकृतिक सख्याओं की पहली 7 पाँचों के योगों की सारणी ई० एम० पियर्सन तथा एच० ओ० हार्टने, बायोमीट्रिका टेबल्स फॉर स्टैटिस्टीशियस, खण्ड 1, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लंदन, 1954, पृष्ठ 224—225, तथा कार्ल पियर्सन, टेबल्स फॉर स्टैटिस्टी-शियस एन्ड बायोमेट्रीशियस, तृतीय संस्करण, भाग I, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लंदन, 1948, पृष्ठ 40—41 में मिल सकती है। यह पहले संस्करणों में भी इन्हीं पृष्ठों पर प्रकाशित हुई थी।

परिशिष्ट ग

प्रथम 50 विषम प्राकृतिक संख्याओं की पहली छः घातों के योग

निम्न सारणी $M_0 = 1$ से $M_0 = 50$ तक की पहली M_0 विषम प्राकृतिक संख्याओं की पहली छः घातों के योगों को प्रकट करती है। ध्यान दीजिए कि जब $M_0 = 2$, तब विषम प्राकृतिक संख्याएँ 1 तथा 3 होती हैं, जब $M_0 = 3$, तब 1, 3, तथा 5 की मोर संकेत होता है, जब $M_0 = 4$, तब 1, 3, 5, तथा 7 अभिप्रेत होते हैं; मोर इसी तरह

उत्क्रमसंवि व प्राकृतिक न०	M_0	$\sum x_1$	$\sum x_2$	$\sum x_3$	$\sum x_4$	$\sum x_5$	$\sum x_6$
1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	4	10	28	82	244	730
5	3	9	35	153	707	3 309	18 350
7	4	16	84	496	3 108	20 176	134 004
9	5	25	165	1 225	9 609	79 225	665 445
11	6	36	286	2 856	24 310	240 270	2 437 008
13	7	49	455	4 753	52 871	611 609	7 263 815
15	8	64	680	8 176	103 496	1 370 844	18 631 440
17	9	81	969	13 041	187 017	2 790 801	42 732 009
19	10	100	1 330	19 900	317 338	5 266 900	89 837 890
21	11	121	1 771	29 161	511 819	9 351 001	175 604 011
23	12	144	2 300	41 376	91 660	15 787 344	373 603 900
25	13	169	2 925	56 953	1 182 785	25 562 909	507 780 529
27	14	196	3 654	76 632	1 713 726	39 901 876	835 201 014
29	15	225	4 485	101 025	2 421 007	60 413 025	1 550 024 335
31	16	256	5 456	130 816	3 344 328	89 042 116	2 437 524 016
33	17	289	6 545	166 253	4 530 449	125 17 509	3 728 995 955
35	18	324	7 770	209 624	6 031 074	190 699 444	5 607 201 810
37	19	361	9 139	260 251	7 905 236	260 043 401	8 137 093 019
39	20	400	10 660	319 600	10 218 6 6	340 267 600	11 631 731 80
41	21	441	12 341	388 521	13 044 417	450 123 801	16 401 836 071
43	22	484	14 190	468 076	16 463 238	603 132 244	23 723 100 0 0
45	23	529	16 215	559 153	20 563 863	81 660 310	31 976 954 035
47	24	576	18 474	662 9 7	25 443 341	1 017 035 3 7	41 607 160 074
49	25	625	20 975	780 675	31 205 316	1 299 450 625	53 647 467 225
51	26	676	23 624	913 276	37 973 546	1 644 505 8 11	73 241 756 026
53	27	729	26 429	1 062 153	45 604 027	2 062 701 309	95 408 110 155
55	28	784	29 2 0	1 228 578	55 014 652	2 566 955 744	123 035 752 760
57	29	841	32 509	1 413 771	65 5 0 653	3 167 677 801	157 356 204 079
59	30	900	35 990	1 619 100	7 683 014	3 852 002 100	199 836 737 6 7
61	31	961	39 711	1 846 061	91 533 856	4 727 193 401	251 096 112 031
63	32	1 024	43 650	2 096 178	107 256 816	5 719 634 844	313 600 014 240
65	33	1 089	47 905	2 370 753	136 1 7 441	6 848 975 569	385 078 504 805
67	34	1 156	52 394	2 671 916	165 285 562	8 120 070 678	4 9 187 857 034
69	35	1 225	57 155	3 000 075	197 835 683	9 794 082 075	587 405 050 118
71	36	1 296	62 196	3 357 936	231 317 364	11 595 311 376	715 505 334 036
73	37	1 369	67 5 11	3 746 953	271 766 605	13 671 352 969	866 733 367 925
75	38	1 444	73 153	4 169 828	313 406 220	16 044 179 844	1 044 818 0 5 950
77	39	1 521	79 0 9	4 625 361	358 559 271	19 751 214 001	1 253 240 456 039
79	40	1 600	85 370	5 115 400	407 509 352	21 825 270 400	1 496 347 011 560
81	41	1 681	91 851	5 649 841	470 556 073	25 315 604 801	1 775 505 334 036
83	42	1 764	98 770	6 221 478	533 014 394	29 204 095 444	2 105 607 821 410
85	43	1 849	105 905	6 835 753	603 215 019	33 691 118 569	2 452 847 337 636
87	44	1 936	113 564	7 491 256	677 504 780	38 675 357 776	2 916 473 538 044
89	45	2 025	1 1 455	8 199 225	759 217 021	44 259 417 225	3 413 454 629 005
91	46	2 116	129 766	8 952 796	838 821 982	50 499 773 676	3 981 324 081 046
93	47	2 209	139 415	9 757 153	923 677 193	57 456 622 379	4 623 314 264 455
95	48	2 304	147 440	10 614 528	1 015 077 898	65 194 411 744	5 363 406 155 120
97	49	2 401	156 849	11 527 201	1 113 607 089	73 781 772 001	6 196 378 160 049
99	50	2 500	167 650	12 497 500	1 225 666 690	83 291 672 500	7 137 858 309 450

भागे भी समझना चाहिए। सुविधा के लिए यह सारणी उच्चतम विषम प्राकृतिक संख्या तथा M_0 दोनों को ही प्रकट करती है। यहाँ दिखाये हुए योग लगभग केवल उन काल श्रेणी पर उपनति रेखा का आसजित करने के सम्बन्ध में काम में लाये जाएँगे, जिस श्रेणी में वर्षों (या दूसरे कालों) की सम संख्या है और जहाँ मूल बिन्दु दो केन्द्र X मानों के बीच लिया गया है। इन परिस्थितियों के अन्तर्गत (1) परिकल्पन सारणी में दिखाया हुआ सबसे बड़ा X मान उच्चतम विषम प्राकृतिक संख्या है और $M_0 = (\text{उच्चतम विषम प्राकृतिक संख्या} + 1) - 2$, (2) सारणी से पड़े हुए योगों को 2 से घटाय गुणा करना चाहिए; तथा (3) N जैसा कि वह प्रसामान्य समीकरणों में काम में लाया गया है, $2M_0$ है। X_0 का अभिप्राय है '1 का विषम मान'।

पहली M_0 विषम प्राकृतिक संख्याओं की पहली छ पातों के योग निम्न व्यंजकों से प्राप्त किये जा सकते हैं

$$\begin{aligned} \frac{M_0}{\sum_1 X_0} &= M_0^2 & \frac{M_0}{\sum_1 X_0^4} &= \left(\frac{12M_0^2 - 7}{5} \right) \frac{M_0}{\sum_1 X_0^2} \\ \frac{M_0}{\sum_1 X_0^2} &= \frac{4M_0^3 - M_0}{3} & \frac{M_0}{\sum_1 X_0^3} &= \left(\frac{16M_0^4 - 20M_0^2 + 7}{3} \right) \frac{M_0}{\sum_1 X_0} \\ \frac{M_0}{\sum_1 X_0^3} &= (2M_0^2 - 1) \frac{M_0}{\sum_1 X_0} & \frac{M_0}{\sum_1 X_0^6} &= \left(\frac{48M_0^4 - 72M_0^2 + 31}{7} \right) \frac{M_0}{\sum_1 X_0^2} \end{aligned}$$

पहली 100 विषम प्राकृतिक संख्याओं की पहली छ पातों के योगों की सारणी जर्नल ऑफ बिथमरिक्न स्टैटिस्टिकल एनोसिएशन मार्च 1925 पृष्ठ 75—79 पर प्रकाशित रैंक ए० रीस द्वारा लिखित 'फार्मूला फॉर कैलीसिटेटिंग कॉम्पुटेन्स इन दायम सीरीज अनैलिसिस' में दी गई है।

परिशिष्ट घ प्रसामान्य वक्र की कोटियाँ

\bar{X} से $\frac{x}{s}$ दूरियों पर स्थापित महत्तम कोटि Y_0 की वनमसब भिन्नों के रूप में प्रस्तुत महत्तम कोटि का निम्न व्यञ्जक से परिकलन किया जाता है

$$Y_0 = \frac{Ni}{s\sqrt{2\pi}} = \frac{Ni}{2.5066s}$$

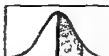
नीचे सारणी में दिये हुए मान $\frac{-1.3}{2.5}$ व्यञ्जक को हल करने से प्राप्त होते हैं।

X अक्ष पर किसी प्रदत्त मान पर प्रस्थापित की जाने वाली कोटि की आनुपातिक ऊँचाई, x (माध्य से दिये हुए मान का विचलन) का निर्धारण करके तथा $\frac{x}{s}$ का परिकलन करके, सारणी से पढ़ी जा सकती है। हम प्रकार यदि $\bar{X} = 25.00$ डॉलर $s = 4.00$ डॉलर $Y_0 = 1950$ और 23.00 डॉलर पर छड़ी की जाने वाली कोटि की ऊँचाई निर्दिष्ट करना वांछनीय है तो $x = 2.00$ डॉलर और $\frac{x}{s} = \frac{2.00 \text{ डॉलर}}{4.00 \text{ डॉलर}} = 0.50$ । सारणी से कोटि महत्तम कोटि Y_0 की 88250, या $0.88250 \times 1950 = 1721$ पता चलती है।

परिशिष्ट ड प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्र

समान्तर माध्य से $\frac{\lambda}{s}$ या $\frac{x}{\sigma}$ दूरियों* तक उस समान्तर माध्य से, जिसे कुल क्षेत्र 1.0000 के दशमलव भिन्नो के रूप में प्रकट किया गया है

यह सारणी काल
क्षेत्र दर्शाती है।



$\frac{x}{s}$ या $\frac{x}{\sigma}$	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0.0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0237	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1025	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0.7	2580	2612	2643	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3769	3789	3809	3828
1.2	3849	3869	3889	3907	3926	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4685	4692	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4755	4761	4767
2.0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4978	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4986	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
3.1	4990	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3.2	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993
3.3	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993
3.4	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993
3.5	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993
3.6	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993
3.7	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993
3.8	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993
3.9	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993
4.0	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993
4.5	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993
5.0	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993	4993

* $\frac{x}{s}$ जबकि प्रसामान्य वक्र आसजित करते समय काम में लाया जाता है, $\frac{x}{\sigma}$ तब काम में लाया जाता है, जब सांख्यिकी की वह परीक्षा की जा रही हो, जिसमें समष्टि तथा प्रसामान्य वक्र मानक विचलन अन्तर्निहित है।

यह सारणी मुख्यतः प्रकाशकों, हाफ्टन मिक्लिन् कम्पनी लि. तथा प्रबन्ध से, रण के स्टैटिस्टिकल मॅथड्स एप्लाइड टु एजुकेशन से (बोधन करके) ली गई है। प्रसामान्य वक्र क्षेत्रों की एक अधिक विस्तृत सारणी जो समान्तर माध्य से दो दिशाओं में फॅडरल वर्क्स एजेंसी, वर्ल्ड प्रोबेक्ट्स ऐडमिनिस्ट्रेशन ऑर दि सिटी ऑफ न्यूयार्क, टेबल्स ऑफ प्रोबेबिलिटी फ़ंक्शन्स, नेशनल ब्यूरो ऑफ स्टैटिस्टिक्स, न्यूयार्क, 1942, चण्ड 2, पृष्ठ 2—338 पर दी गई है।

परिशिष्ट च

$F\left(\frac{x}{s}\right)$ के मान

इस प्रकार के त्रुटि को ध्यानपूर्वक करने में प्रयोग के लिए

$$Y = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2s^2}} - \left\{ \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2s^2}} \left[\frac{\alpha_1}{2} \left(\frac{x}{s} - \frac{x^3}{3s^3} \right) \right] \right\} = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2s^2}} \left[1 - \frac{\alpha_1}{2} \left(\frac{x}{s} - \frac{x^3}{3s^3} \right) \right]$$

$\frac{x}{s}$	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0	00000	00001	00004	00009	00016	00025	00036	00049	00064	00081
1	00097	00114	00131	00147	00164	00181	00197	00214	00231	00247
2	00264	00281	00297	00314	00331	00347	00364	00381	00397	00414
3	00431	00447	00464	00481	00497	00514	00531	00547	00564	00581
4	00597	00614	00631	00647	00664	00681	00697	00714	00731	00747
5	00764	00781	00797	00814	00831	00847	00864	00881	00897	00914
6	00931	00947	00964	00981	01000	01016	01031	01047	01064	01081
7	01097	01114	01131	01147	01164	01181	01197	01214	01231	01247
8	01264	01281	01297	01314	01331	01347	01364	01381	01397	01414
9	01431	01447	01464	01481	01497	01514	01531	01547	01564	01581
10	01597	01614	01631	01647	01664	01681	01697	01714	01731	01747
11	01764	01781	01797	01814	01831	01847	01864	01881	01897	01914
12	01931	01947	01964	01981	02000	02016	02031	02047	02064	02081
13	02097	02114	02131	02147	02164	02181	02197	02214	02231	02247
14	02264	02281	02297	02314	02331	02347	02364	02381	02397	02414
15	02431	02447	02464	02481	02497	02514	02531	02547	02564	02581
16	02597	02614	02631	02647	02664	02681	02697	02714	02731	02747
17	02764	02781	02797	02814	02831	02847	02864	02881	02897	02914
18	02931	02947	02964	02981	03000	03016	03031	03047	03064	03081
19	03097	03114	03131	03147	03164	03181	03197	03214	03231	03247
20	03264	03281	03297	03314	03331	03347	03364	03381	03397	03414
21	03431	03447	03464	03481	03497	03514	03531	03547	03564	03581
22	03597	03614	03631	03647	03664	03681	03697	03714	03731	03747
23	03764	03781	03797	03814	03831	03847	03864	03881	03897	03914
24	03931	03947	03964	03981	04000	04016	04031	04047	04064	04081
25	04097	04114	04131	04147	04164	04181	04197	04214	04231	04247
26	04264	04281	04297	04314	04331	04347	04364	04381	04397	04414
27	04431	04447	04464	04481	04497	04514	04531	04547	04564	04581
28	04597	04614	04631	04647	04664	04681	04697	04714	04731	04747
29	04764	04781	04797	04814	04831	04847	04864	04881	04897	04914
30	04931	04947	04964	04981	05000	05016	05031	05047	05064	05081
31	05097	05114	05131	05147	05164	05181	05197	05214	05231	05247
32	05264	05281	05297	05314	05331	05347	05364	05381	05397	05414
33	05431	05447	05464	05481	05497	05514	05531	05547	05564	05581
34	05597	05614	05631	05647	05664	05681	05697	05714	05731	05747
35	05764	05781	05797	05814	05831	05847	05864	05881	05897	05914
36	05931	05947	05964	05981	06000	06016	06031	06047	06064	06081
37	06097	06114	06131	06147	06164	06181	06197	06214	06231	06247
38	06264	06281	06297	06314	06331	06347	06364	06381	06397	06414
39	06431	06447	06464	06481	06497	06514	06531	06547	06564	06581
40	06597	06614	06631	06647	06664	06681	06697	06714	06731	06747

यह तालिका डी वैन नास्ट्रेड कंपनी इन्फॉर्मेटिव तथा बेस टेनीकोन लैबोरेट्रीज के सौजन्य से द्रव्यु० ए० स्प्रुट्ट, ईकार्गिक कटोल ग्रॉफ नवानिरी ग्रॉफ मैन्युफैक्चर प्रॉडक्ट, डी० वैन नास्ट्रेड कंपनी, ग्रिन्थम, एन० जे०, 1931, पृष्ठ 91 से ली गई है।

साहये ऊपर दिखाये गए परिचर से परे $F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ के मानों के लिए निम्न सूत्रक काम में

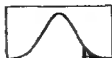
$$F_2\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{x}{s} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} - \frac{1}{15036} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{x}{s} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{3}{2}}$$

के मान सुविधापूर्वक परिशिष्ट घ में दी हुई प्रसामान्य त्रुटि को कोटियों की भांति में पाई गई। एन० विपर्सन तथा एन० डी० हार्टने बायोमीट्रिका टेबल्स फॉर स्टैटिस्टिशियन्स खण्ड I कोम्बिन यूनिवर्सिटी प्रेंस, लंदन, 1954, पृष्ठ 104—110 पर तथा कारने विपर्सन, टेबल्स फॉर स्टैटिस्टिशियन्स एन्ड बायोमीट्रिकल तृतीय संस्करण, भाग I, यूनिवर्सिटी प्रेंस, लंदन 1948 पृष्ठ 2—8 में दी हुई अधिक विस्तृत सारणी में पढ़े जा सकते हैं। सारणी दो सारणियों में दिखाये हुए Z के मानों को जब 25066 से गुणा किया जाता है तो तब

परिशिष्ट छ

समान्तर माध्य से $\frac{x}{s}$ या $\frac{x}{\sigma}$ के चुने हुए मानों* पर
निर्मित प्रसामान्य वक्र के एक सिरے में विद्यमान क्षेत्र

यह सारणी काला
क्षेत्र दिखनाती है



अथवा



$\frac{x}{s}$ or $\frac{x}{\sigma}$	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0 0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
0 1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4285	4247
0 2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
0 3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
0 4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
0 5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
0 6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
0 7	2420	2389	2358	2327	2296	2266	2236	2206	2177	2148
0 8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
0 9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
1 0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
1 1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
1 2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	985
1 3	968	951	934	918	901	885	869	853	838	823
1 4	808	793	778	764	749	735	721	708	694	681
1 5	668	655	643	630	618	606	594	582	571	559
1 6	548	537	526	516	505	495	485	475	465	455
1 7	446	436	427	418	409	401	392	384	375	367
1 8	359	351	344	336	329	322	314	307	301	294
1 9	287	281	274	268	263	256	250	244	239	233
2 0	228	222	217	212	207	202	197	192	188	183
2 1	179	174	170	166	162	158	154	150	146	143
2 2	139	136	132	129	125	122	119	116	113	110
2 3	107	104	102	099	096	093	091	088	086	084
2 4	082	079	077	075	073	071	069	067	065	063
2 5	062	060	058	057	055	053	052	050	049	048
2 6	046	045	044	042	041	040	039	037	036	035
2 7	034	033	032	031	030	029	028	028	027	026
2 8	025	024	024	023	023	022	022	021	021	020
2 9	019	019	018	018	017	017	016	016	015	015

$\frac{x}{s}$ or $\frac{x}{\sigma}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	00135	00968	00687	00483	00337	00233	00159	00108	00723	00481
4	00317	00207	00133	00084	00051	00034	00021	00013	00007	00004
5	00287	00170	00096	00057	00033	00019	00010	00005	00003	00002
6	00987	00530	00282	00149	00077	00040	00020	00010	00005	00002

*परिशिष्ट क की पाठ द्विपक्षी देखिए।

यह सारणी टेबल ऑफ़ एरियाज़ इन टू टेल्स एन्ड इन वन टेल् ऑफ़ दि नार्मल कर्व,
वेब्स फ्रॉम द ० फॉक्टरी से ली गई है। इस पुस्तक का प्रतिनिधित्वकार, 1949, प्रिन्टिंग हॉल, इन्फो
रेंट की अनुज्ञा से है।

परिशिष्ट ज

समान्तर माध्य से $\frac{x}{s}$ या $\frac{z}{\sigma}$ के चुने हुए मानों* पर निर्मित प्रसामान्य वक्र के दोनों सिरों में विद्यमान क्षेत्र

यह सारणी काप क्षेत्रों की दिशान्वी है



$\frac{x}{s}$ या $\frac{z}{\sigma}$	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0 0	1 0000	0000	0040	0076	0109	0140	0169	0196	0222	0248
0 1	0203	0224	0245	0266	0287	0308	0329	0350	0370	0391
0 2	0415	0437	0459	0481	0503	0525	0547	0569	0591	0613
0 3	0642	0664	0686	0708	0729	0751	0773	0795	0817	0839
0 4	0862	0884	0906	0928	0949	0971	0993	1015	1037	1059
0 5	1081	1103	1125	1147	1169	1191	1213	1235	1257	1279
0 6	1301	1323	1345	1367	1389	1411	1433	1455	1477	1499
0 7	1521	1543	1565	1587	1609	1631	1653	1675	1697	1719
0 8	1741	1763	1785	1807	1829	1851	1873	1895	1917	1939
0 9	1961	1983	2005	2027	2049	2071	2093	2115	2137	2159
1 0	2181	2203	2225	2247	2269	2291	2313	2335	2357	2379
1 1	2401	2423	2445	2467	2489	2511	2533	2555	2577	2599
1 2	2621	2643	2665	2687	2709	2731	2753	2775	2797	2819
1 3	2841	2863	2885	2907	2929	2951	2973	2995	3017	3039
1 4	3061	3083	3105	3127	3149	3171	3193	3215	3237	3259
1 5	3281	3303	3325	3347	3369	3391	3413	3435	3457	3479
1 6	3501	3523	3545	3567	3589	3611	3633	3655	3677	3699
1 7	3721	3743	3765	3787	3809	3831	3853	3875	3897	3919
1 8	3941	3963	3985	4007	4029	4051	4073	4095	4117	4139
1 9	4161	4183	4205	4227	4249	4271	4293	4315	4337	4359
2 0	4381	4403	4425	4447	4469	4491	4513	4535	4557	4579
2 1	4601	4623	4645	4667	4689	4711	4733	4755	4777	4799
2 2	4821	4843	4865	4887	4909	4931	4953	4975	4997	5019
2 3	5041	5063	5085	5107	5129	5151	5173	5195	5217	5239
2 4	5261	5283	5305	5327	5349	5371	5393	5415	5437	5459
2 5	5481	5503	5525	5547	5569	5591	5613	5635	5657	5679
2 6	5701	5723	5745	5767	5789	5811	5833	5855	5877	5899
2 7	5921	5943	5965	5987	6009	6031	6053	6075	6097	6119
2 8	6141	6163	6185	6207	6229	6251	6273	6295	6317	6339
2 9	6361	6383	6405	6427	6449	6471	6493	6515	6537	6559

$\frac{x}{s}$ or $\frac{z}{\sigma}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	00270	00194	00137	00097	00067	00046	00031	00021	00014	00009
4	00063	00043	00029	00019	00013	00009	00006	00004	00003	00002
5	00017	00011	00007	00005	00003	00002	00001	00001	00000	00000
6										

*परिशिष्ट ड की वाद टिप्पणी देखिये।

यह सारणी टेबल ऑफ एरियाज इन दू टेलस एन्ड इन वन टेल ऑफ दि नार्मल कर्व, लेखक फ्रीड्रिच ई० कास्टनर से ली गई है। इस पुस्तक का प्रतिलिप्यधिकार, 1949, ब्रिटिश हॉल, इन्फो-रेटिड की अनुज्ञा से है।

स्वातन्त्र्य कोटिर्धों (n) के लिए तथा

यह सारणी काले क्षेत्र

n	साक्षरता (P) का स्तर							
	90	80	70	60	50	40	30	25
1	158	325	510	727	1 000	1 376	1 963	2 414
2	142	289	445	617	816	1 061	1 386	1 604
3	137	277	424	584	765	978	1 250	1 423
4	134	271	414	569	741	941	1 190	1 344
5	132	267	408	559	727	920	1 156	1 301
6	131	265	404	553	718	906	1 134	1 273
7	130	263	402	549	711	896	1 119	1 254
8	130	262	399	546	706	889	1 108	1 240
9	129	261	398	543	703	883	1 100	1 230
10	129	260	397	542	700	879	1 093	1 221
11	129	260	396	540	697	876	1 088	1 214
12	128	259	395	539	695	873	1 083	1 209
13	128	259	394	538	694	870	1 079	1 204
14	128	258	393	537	692	868	1 076	1 200
15	128	258	393	536	691	866	1 074	1 197
16	128	258	392	535	690	865	1 071	1 194
17	128	257	392	534	689	863	1 069	1 191
18	127	257	392	534	688	862	1 067	1 189
19	127	257	391	533	688	861	1 066	1 187
20	127	257	391	533	687	860	1 064	1 185
21	127	257	391	532	686	859	1 063	1 183
22	127	256	390	532	686	858	1 061	1 182
23	127	256	390	532	685	858	1 060	1 180
24	127	256	390	531	685	857	1 059	1 179
25	127	256	390	531	684	856	1 058	1 178
26	127	256	390	531	684	856	1 058	1 177
27	127	256	389	531	684	855	1 057	1 176
28	127	256	389	530	683	855	1 056	1 175
29	127	256	389	530	683	854	1 055	1 174
30	127	256	389	530	683	854	1 055	1 173
40	126	255	388	529	681	851	1 050	1 167
60	126	254	387	527	679	848	1 046	1 162
120	126	254	386	526	677	845	1 041	1 156
∞	126	253	385	524	674	842	1 036	1 150

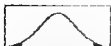
इस सारणी के मान आर० ए० फिशर तथा ए० वेट्स द्वारा लिखित तथा बालियर एंड बायड, एडिनबरा, द्वारा प्रकाशित स्टैटिस्टिकल टेबल्स फॉर बायोलॉजिकल एग्रीकल्चरल एंड मेडिकल रिसर्च से तथा बायोमेट्रिका थर्ड XXXII अप्रैल 1942 पृष्ठ 300 पर हकलित तथा मैक्सिम मेरिटन द्वारा लिखित टेबल आफ प्रसिडेंट प्वायट्स ऑफ दि टी डिस्ट्रीब्यूशन से अनुज्ञा लेकर लिये गए हैं।

आ

मान

सापेक्षता (ρ) के निश्चित स्तरों पर

दर्शाती है



सापेक्षता (ρ) का स्तर									n
20	10	05	025	02	01	005	001		
3 078	6 314	12 706	25 452	31 821	63 657	127 32	636 619		1
1 886	2 929	4 303	6 205	8 965	9 925	14 099	31 598		2
1 638	2 353	3 162	4 176	4 841	5 841	7 453	12 941		3
1 533	2 132	2 776	3 495	3 747	4 604	5 538	8 610		4
1 476	2 015	2 571	3 163	3 385	4 032	4 773	6 850		5
1 440	1 943	2 447	2 969	3 143	3 707	4 317	5 959		6
1 415	1 895	2 365	2 841	2 993	3 499	4 029	5 405		7
1 397	1 800	2 306	2 752	2 896	3 355	3 832	5 041		8
1 383	1 833	2 262	2 685	2 821	3 250	3 690	4 781		9
1 372	1 812	2 228	2 634	2 764	3 167	3 581	4 587		10
1 363	1 786	2 201	2 593	2 718	3 106	3 497	4 457		11
1 356	1 782	2 179	2 560	2 691	3 055	3 428	4 318		12
1 350	1 771	2 160	2 534	2 650	3 012	3 372	4 221		13
1 345	1 761	2 145	2 510	2 621	2 977	3 326	4 140		14
1 341	1 753	2 131	2 490	2 602	2 947	3 286	4 073		15
1 337	1 746	2 120	2 473	2 583	2 921	3 250	4 015		16
1 333	1 740	2 110	2 458	2 567	2 908	3 222	3 965		17
1 330	1 734	2 101	2 445	2 552	2 878	3 194	3 922		18
1 328	1 729	2 093	2 433	2 539	2 861	3 174	3 883		19
1 325	1 724	2 086	2 423	2 528	2 845	3 153	3 850		20
1 323	1 721	2 080	2 414	2 518	2 831	3 135	3 819		21
1 321	1 717	2 074	2 406	2 508	2 819	3 119	3 792		22
1 310	1 714	2 060	2 398	2 500	2 807	3 104	3 767		23
1 318	1 711	2 054	2 391	2 492	2 797	3 093	3 745		24
1 316	1 708	2 050	2 385	2 485	2 787	3 078	3 725		25
1 315	1 706	2 050	2 379	2 479	2 779	3 067	3 707		26
1 314	1 703	2 052	2 373	2 473	2 771	3 056	3 690		27
1 313	1 701	2 048	2 368	2 467	2 763	3 047	3 674		28
1 311	1 699	2 045	2 364	2 462	2 756	3 038	3 659		29
1 310	1 697	2 042	2 360	2 457	2 750	3 030	3 646		30
1 303	1 684	2 021	2 329	2 423	2 704	2 971	3 551		40
1 296	1 671	2 007	2 299	2 390	2 660	2 915	3 460		60
1 289	1 658	1 989	2 270	2 358	2 617	2 860	3 373		120
1 282	1 645	1 969	2 241	2 327	2 576	2 807	3 291		∞

ध्यान में धारण करें की सारणी में की और मान से 1 तक (एक लाख में) और $n=1$ से $n=20$ तक के लिए 1 घटन के क्षत्रों को धारण करने वाली 1 की सारणी में V बक 3 (1925), के पृष्ठ 114—118 पर सम्बन्धित "छात्र" द्वारा लिखित 'बू टबल फॉर स्टैटिस्टिक सिम्प्लिफिकेड' में सम्बन्धित है।

परिशिष्ट

४ के

प्रदत्त स्वातन्त्र्य कोटियों

यह सारणी काना
क्षेत्र दर्शाती है



$n=1$ तथा $n=2$ के लिए

n	P का मान										
	999	995	99	98	975	95	90	80	75	70	50
1	0.137	0.393	0.957	0.628	0.982	0.0393	0.158	0.642	1.02	1.48	4.55
2	0.0200	0.100	0.201	0.404	0.06	1.03	2.11	4.46	5.75	7.13	1.388
3	0.243	0.717	1.15	1.85	2.16	3.52	5.84	1.005	1.213	1.424	2.366
4	0.908	2.07	2.97	4.79	4.84	7.11	1.064	1.642	1.923	2.193	3.337
5	2.10	4.12	5.54	7.52	8.71	1.145	1.610	2.343	2.673	3.000	4.35
6	3.81	6.76	8.72	1.134	1.277	1.635	2.204	3.070	3.455	3.828	5.348
7	5.98	8.89	1.239	1.364	1.690	2.167	2.833	3.871	4.255	4.671	6.345
8	8.57	1.344	1.646	2.032	2.180	2.733	3.490	4.324	5.071	5.527	7.344
9	1.13	1.735	2.068	2.532	2.700	3.325	4.168	5.350	5.897	6.393	8.343
10	1.47	2.156	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	6.179	6.737	7.257	9.342
11	1.834	2.603	3.053	3.609	3.817	4.575	5.578	6.985	7.584	8.145	10.341
12	2.214	3.074	3.571	4.18	4.404	5.226	6.304	7.807	8.438	9.034	11.340
13	2.617	3.585	4.107	4.765	5.009	5.822	7.047	8.634	9.299	9.976	12.340
14	3.041	4.075	4.660	5.368	5.620	6.571	7.790	9.467	10.165	10.821	13.339
15	3.483	4.601	5.223	5.985	6.262	7.261	8.567	10.307	11.030	11.721	14.339
16	3.942	5.142	5.812	6.614	6.908	7.962	9.312	11.152	11.912	12.624	15.338
17	4.416	5.697	6.408	7.255	7.564	8.672	10.085	12.002	12.792	13.531	16.338
18	4.905	6.265	7.015	7.906	8.211	9.390	10.865	12.857	13.675	14.440	17.338
19	5.407	6.844	7.633	8.567	8.907	10.117	11.651	13.716	14.562	15.357	18.338
20	5.921	7.434	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	14.578	15.452	16.266	19.337
21	6.447	8.034	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	15.445	16.344	17.182	20.337
22	6.983	8.643	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	16.314	17.240	18.101	21.337
23	7.529	9.260	10.196	11.293	11.638	13.091	14.848	17.187	18.137	19.021	22.337
24	8.085	9.886	10.856	11.999	12.401	13.848	15.659	18.067	19.037	19.943	23.337
25	8.649	10.520	11.544	12.697	13.120	14.611	16.473	18.940	19.935	20.867	24.337
26	9.222	11.160	12.198	13.409	13.844	15.379	17.292	19.820	20.843	21.797	25.336
27	9.803	11.806	12.870	14.125	14.72	16.11	18.114	20.703	21.749	22.719	26.336
28	10.391	12.461	13.573	14.847	15.308	16.928	18.939	21.58	22.657	23.647	27.336
29	10.986	13.121	14.296	15.574	16.047	17.708	19.768	22.47	23.56	24.577	28.336
30	11.588	13.787	14.993	16.306	16.701	18.493	20.599	23.364	24.478	25.488	29.336

$n > 30$ के मानों के लिए, χ^2 के सन्निकट मान निम्न व्यंजक से प्राप्त किय जा सकते हैं

$$n \left[1 - \frac{2}{9n} \pm \frac{x}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{9n}} \right]$$

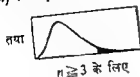
जिसमें $\frac{x}{\sigma}$ प्रमाणाय विचलन है जो प्रमाणाय बटन के समान सिद्ध हो जायता है। यदि $\frac{x}{\sigma}$ को

0.02 स्तर पर इस प्रकार लिया जाता है कि प्रत्येक निरे से प्रमाणाय बटन का 0.01 है, तो पत्रक II 99 तथा 0.01 बिन्दुओं पर γ परिणाम दर्शाता है। II के बहुत बड़ा माना के लिए $\sqrt{2/9n}$ का परिकलन करना पर्याप्त ठीक है जिसका बटन $\sqrt{2n-1}$ के माध्य के आसपास और 1 के मानक विचलन के साथ सन्निकट रूप से प्रमाणाय है।

अ

मान

(n) के लिए तथा P के निश्चित मानों के लिए



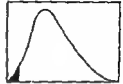
P का मान												n
30	25	20	15	10	05	025	02	01	005	001		
1 074	1 323	1 642	2 006	2 404	2 841	3 314	3 824	4 372	4 956	5 574	6 226	1
2 409	2 771	3 219	3 745	4 345	4 991	5 684	6 424	7 212	8 048	8 932	9 864	2
3 602	4 108	4 642	5 204	5 792	6 415	7 072	7 764	8 492	9 256	10 056	10 892	3
4 678	5 388	6 089	6 779	7 459	8 128	8 786	9 434	10 072	10 700	11 318	11 926	4
5 654	6 466	7 269	8 062	8 845	9 618	10 381	11 134	11 877	12 610	13 333	14 046	5
7 211	7 841	8 558	9 262	9 954	10 634	11 302	11 959	12 606	13 243	13 870	14 488	6
8 383	9 037	9 680	10 312	10 934	11 546	12 148	12 740	13 322	13 895	14 458	15 012	7
9 524	10 210	10 880	11 534	12 182	12 824	13 460	14 090	14 714	15 332	15 945	16 553	8
10 636	11 389	12 142	12 895	13 648	14 399	15 148	15 895	16 639	17 280	17 918	18 553	9
11 781	12 540	13 342	14 145	14 948	15 751	16 554	17 357	18 159	18 960	19 760	20 559	10
12 809	13 701	14 611	15 549	16 486	17 422	18 358	19 294	20 230	21 166	22 102	23 038	11
14 011	14 845	15 812	16 749	17 686	18 622	19 558	20 494	21 430	22 366	23 302	24 238	12
15 179	15 984	16 980	17 917	18 854	19 791	20 727	21 664	22 600	23 536	24 472	25 408	13
16 292	17 117	18 151	19 088	20 025	20 962	21 899	22 836	23 772	24 709	25 645	26 581	14
17 322	18 245	19 311	20 348	21 385	22 422	23 459	24 496	25 533	26 569	27 606	28 643	15
18 418	19 369	20 405	21 442	22 479	23 516	24 553	25 590	26 627	27 664	28 701	29 738	16
19 511	20 480	21 515	22 552	23 589	24 626	25 663	26 700	27 737	28 774	29 811	30 848	17
20 601	21 605	22 660	23 707	24 754	25 801	26 848	27 895	28 942	29 989	31 036	32 083	18
21 690	22 718	23 800	24 882	25 964	27 046	28 128	29 210	30 292	31 374	32 456	33 538	19
22 775	23 823	24 908	25 990	27 072	28 154	29 236	30 318	31 400	32 482	33 564	34 646	20
23 858	24 935	26 017	27 099	28 181	29 263	30 345	31 427	32 509	33 591	34 673	35 755	21
24 930	26 010	27 092	28 174	29 256	30 338	31 420	32 502	33 584	34 666	35 748	36 830	22
26 018	27 141	28 223	29 305	30 387	31 469	32 551	33 633	34 715	35 797	36 879	37 961	23
27 096	28 241	29 323	30 405	31 487	32 569	33 651	34 733	35 815	36 897	37 979	39 061	24
28 172	29 339	30 421	31 503	32 585	33 667	34 749	35 831	36 913	37 995	39 077	40 159	25
29 248	30 434	31 516	32 598	33 680	34 762	35 844	36 926	38 008	39 090	40 172	41 254	26
30 310	31 528	32 610	33 692	34 774	35 856	36 938	38 020	39 102	40 184	41 266	42 348	27
31 381	32 601	33 683	34 765	35 847	36 929	38 011	39 093	40 175	41 257	42 339	43 421	28
32 441	33 711	34 793	35 875	36 957	38 039	39 121	40 203	41 285	42 367	43 449	44 531	29
33 5 0 134 800	34 800	35 882	36 964	38 046	39 128	40 210	41 292	42 374	43 456	44 538	45 620	30

यह सारणी आर० ए० फिशर तथा एक० वेल्ड द्वारा निश्चित तथा सॉलिवर एंड बॉयड, एडिनबरा द्वारा प्रकाशित स्टैटिस्टिकल टेबल फॉर बायोलॉजिकल, एथोलॉजिकल, एंड मेडिकल रिसर्च की सारणी IV के, बायोमेट्रिका, खंड 32, में तकमिन कैपेरिन एंड० बॉयसोन द्वारा तैयार "टेबल ऑफ परसेंटेज प्रॉबेबिलिटी ऑफ दि/2 डिस्ट्रिब्यूशन", पृष्ठ 187—191 के, तथा बायोमेट्रिका खंड 40 में तकमिन तथा टी० नूडन द्वारा लिखित "99.9 एंड 0.1% प्रॉबेबिलिटी ऑफ दि/1 डिस्ट्रिब्यूशन", पृष्ठ 421 के एथोलॉजिकल तैयार, की गई है। मिस्र प्रॉबेबिलिटी की सारणी में दिखाए गए मान (और 0.001 बिंदु पर के मान भी) ई० एम० प्रॉबेबिलिटी तथा ए० ब० हार्टले, बायोमेट्रिका टेबल फॉर स्टैटिस्टीशियन्स खंड 1, कैम्ब्रिज एनिवर्सिटी प्रेस, लंदन, 1954, पृष्ठ 130—131 पर भी मिल सकते हैं।

परिशिष्ट

σ^2 की प्रतिदर्शी सीमाओं का निर्धारण करने

यह सारणी काले क्षेत्र दर्शाती है



n	निम्न बिन्दु							
	001	005	01	025	05	10	25	50
1	0.157	0.3927	0.1571	0.9821	0.00032	0.1579	1015	4549
2	0.01090	0.05019	0.0093	0.532	0.5129	1034	2877	6931
3	0.00899	0.0391	0.0328	0.7153	1.173	1948	4042	7887
4	0.2270	0.5175	0.7428	1.211	1.777	28.9	4806	8392
5	0.4204	0.8335	1.109	1.662	2.291	3223	5349	8708
6	0.6351	1.126	1.453	2.062	2.728	3674	5758	8914
7	0.8550	1.413	1.770	2.414	3.096	4047	6078	9085
8	1.071	1.681	2.058	2.725	3.416	4362	6338	9180
9	1.280	1.928	2.320	3.000	3.693	4631	6554	9270
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4865	6737	9383
11	1.667	2.367	2.776	3.469	4.170	5071	6895	9401
12	1.845	2.562	2.975	3.670	4.375	5253	7032	9430
13	2.013	2.742	3.159	38.3	4.52	5417	7153	9492
14	2.172	2.910	3.329	40.21	4.693	5564	7261	9528
15	2.322	3.067	3.486	41.73	4.841	5698	7358	9559
16	2.464	3.214	3.633	43.17	4.976	5820	7445	9587
17	2.598	3.351	3.769	44.50	5.101	5932	7525	9611
18	2.725	3.480	3.897	45.73	5.217	6036	7597	9632
19	2.846	3.602	4.017	46.89	5.325	6132	7664	9651
20	2.961	3.717	4.130	47.95	5.425	6221	7726	9669
21	3.070	3.826	4.237	48.97	5.520	6305	7783	9684
22	3.174	3.929	4.337	49.92	5.608	6382	7836	9699
23	3.274	4.026	4.433	50.82	5.692	6456	7886	9712
24	3.369	4.119	4.524	51.67	5.770	6524	7932	9724
25	3.460	4.208	4.610	52.48	5.845	6589	7976	9735
26	3.547	4.292	4.692	53.25	5.915	6651	8017	9743
27	3.631	4.373	4.770	53.98	5.982	6709	8055	9754
28	3.711	4.450	4.845	54.67	6.046	6764	8092	9763
29	3.788	4.525	4.916	55.33	6.106	6816	8128	9771
30	3.863	4.598	4.984	55.97	6.164	6866	8159	9779
40	4.479	5.177	5.541	61.08	6.627	7263	8415	9834
50	4.935	5.598	5.941	64.71	6.932	7539	8688	9867
60	5.290	5.972	6.247	67.47	7.198	7743	8726	9889
70	5.577	6.182	6.492	69.63	7.391	7904	8814	9905
80	5.815	6.396	6.632	71.44	7.549	8035	8893	9917
90	6.017	6.577	6.862	72.94	7.681	8143	8958	9926
100	6.192	6.733	7.006	74.22	7.793	8236	9013	9933
n	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000
$\frac{z}{\sigma}$	-3 0902	-2 5758	-2 3263	-1 9600	-1 6449	-1 2816	- 6743	0

* Where

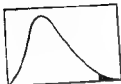
* जब $n > 30$, तब $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma}$ के मान निम्न व्यंजक के प्रयोग से भूमिकट रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं

$$\left(\frac{9n-2 + \frac{x}{\sigma} \sqrt{18n}}{9n} \right)^2$$

ट

के प्रयोग के लिए $\frac{u}{\sigma}$ के मान

तथा

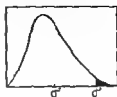


उत्तरों बिना

25	10	05	025	01	005	001	n
1 323	2 706	3 841	5 074	6 635	7 879	10 827	1
1 365	2 703	3 896	5 074	6 605	7 898	10 809	2
1 369	2 694	3 903	5 116	6 782	7 979	10 823	3
1 376	2 685	3 917	5 158	6 869	8 061	10 836	4
1 385	2 677	3 931	5 200	6 956	8 145	10 849	5
1 395	2 669	3 945	5 242	7 043	8 226	10 862	6
1 406	2 661	3 959	5 284	7 130	8 307	10 875	7
1 417	2 653	3 973	5 326	7 217	8 388	10 888	8
1 429	2 645	3 987	5 368	7 304	8 469	10 901	9
1 441	2 637	4 001	5 410	7 391	8 550	10 914	10
1 453	2 629	4 015	5 452	7 478	8 631	10 927	11
1 465	2 621	4 029	5 494	7 565	8 712	10 940	12
1 477	2 613	4 043	5 536	7 652	8 793	10 953	13
1 489	2 605	4 057	5 578	7 739	8 874	10 966	14
1 501	2 597	4 071	5 620	7 826	8 955	10 979	15
1 513	2 589	4 085	5 662	7 913	9 036	10 992	16
1 525	2 581	4 099	5 704	8 000	9 117	11 005	17
1 537	2 573	4 113	5 746	8 087	9 198	11 018	18
1 549	2 565	4 127	5 788	8 174	9 279	11 031	19
1 561	2 557	4 141	5 830	8 261	9 360	11 044	20
1 573	2 549	4 155	5 872	8 348	9 441	11 057	21
1 585	2 541	4 169	5 914	8 435	9 522	11 070	22
1 597	2 533	4 183	5 956	8 522	9 603	11 083	23
1 609	2 525	4 197	6 000	8 609	9 684	11 096	24
1 621	2 517	4 211	6 042	8 696	9 765	11 109	25
1 633	2 509	4 225	6 084	8 783	9 846	11 122	26
1 645	2 501	4 239	6 126	8 870	9 927	11 135	27
1 657	2 493	4 253	6 168	8 957	10 008	11 148	28
1 669	2 485	4 267	6 210	9 044	10 089	11 161	29
1 681	2 477	4 281	6 252	9 131	10 170	11 174	30
1 693	2 469	4 295	6 294	9 218	10 251	11 187	40
1 705	2 461	4 309	6 336	9 305	10 332	11 200	50
1 717	2 453	4 323	6 378	9 392	10 413	11 213	60
1 729	2 445	4 337	6 420	9 479	10 494	11 226	70
1 741	2 437	4 351	6 462	9 566	10 575	11 239	80
1 753	2 429	4 365	6 504	9 653	10 656	11 252	90
1 765	2 421	4 379	6 546	9 740	10 737	11 265	100
1 777	2 413	4 393	6 588	9 827	10 818	11 278	-
1 789	2 405	4 407	6 630	9 914	10 899	11 291	-
1 801	2 397	4 421	6 672	10 001	10 980	11 304	-
1 813	2 389	4 435	6 714	10 088	11 061	11 317	-
1 825	2 381	4 449	6 756	10 175	11 142	11 330	-
1 837	2 373	4 463	6 798	10 262	11 223	11 343	-
1 849	2 365	4 477	6 840	10 349	11 304	11 356	-
1 861	2 357	4 491	6 882	10 436	11 385	11 369	-
1 873	2 349	4 505	6 924	10 523	11 466	11 382	-
1 885	2 341	4 519	6 966	10 610	11 547	11 395	-
1 897	2 333	4 533	7 008	10 697	11 628	11 408	-
1 909	2 325	4 547	7 050	10 784	11 709	11 421	-
1 921	2 317	4 561	7 092	10 871	11 790	11 434	-
1 933	2 309	4 575	7 134	10 958	11 871	11 447	-
1 945	2 301	4 589	7 176	11 045	11 952	11 460	-
1 957	2 293	4 603	7 218	11 132	12 033	11 473	-
1 969	2 285	4 617	7 260	11 219	12 114	11 486	-
1 981	2 277	4 631	7 302	11 306	12 195	11 499	-
1 993	2 269	4 645	7 344	11 393	12 276	11 512	-
1 995	2 261	4 659	7 386	11 480	12 357	11 525	-
1 997	2 253	4 673	7 428	11 567	12 438	11 538	-
1 999	2 245	4 687	7 470	11 654	12 519	11 551	-
1 999	2 237	4 701	7 512	11 741	12 600	11 564	-
1 999	2 229	4 715	7 554	11 828	12 681	11 577	-
1 999	2 221	4 729	7 596	11 915	12 762	11 590	-
1 999	2 213	4 743	7 638	12 002	12 843	11 603	-
1 999	2 205	4 757	7 680	12 089	12 924	11 616	-
1 999	2 197	4 771	7 722	12 176	13 005	11 629	-
1 999	2 189	4 785	7 764	12 263	13 086	11 642	-
1 999	2 181	4 799	7 806	12 350	13 167	11 655	-
1 999	2 173	4 813	7 848	12 437	13 248	11 668	-
1 999	2 165	4 827	7 890	12 524	13 329	11 681	-
1 999	2 157	4 841	7 932	12 611	13 410	11 694	-
1 999	2 149	4 855	7 974	12 698	13 491	11 707	-
1 999	2 141	4 869	8 016	12 785	13 572	11 720	-
1 999	2 133	4 883	8 058	12 872	13 653	11 733	-
1 999	2 125	4 897	8 100	12 959	13 734	11 746	-
1 999	2 117	4 911	8 142	13 046	13 815	11 759	-
1 999	2 109	4 925	8 184	13 133	13 896	11 772	-
1 999	2 101	4 939	8 226	13 220	13 977	11 785	-
1 999	2 093	4 953	8 268	13 307	14 058	11 798	-
1 999	2 085	4 967	8 310	13 394	14 139	11 811	-
1 999	2 077	4 981	8 352	13 481	14 220	11 824	-
1 999	2 069	4 995	8 394	13 568	14 301	11 837	-
1 999	2 061	5 009	8 436	13 655	14 382	11 850	-
1 999	2 053	5 023	8 478	13 742	14 463	11 863	-
1 999	2 045	5 037	8 520	13 829	14 544	11 876	-
1 999	2 037	5 051	8 562	13 916	14 625	11 889	-
1 999	2 029	5 065	8 604	14 003	14 706	11 902	-
1 999	2 021	5 079	8 646	14 090	14 787	11 915	-
1 999	2 013	5 093	8 688	14 177	14 868	11 928	-
1 999	2 005	5 107	8 730	14 264	14 949	11 941	-
1 999	2 000	5 121	8 772	14 351	15 030	11 954	-
1 999	2 000	5 135	8 814	14 438	15 111	11 967	-
1 999	2 000	5 149	8 856	14 525	15 192	11 980	-
1 999	2 000	5 163	8 898	14 612	15 273	11 993	-
1 999	2 000	5 177	8 940	14 699	15 354	12 006	-
1 999	2 000	5 191	8 982	14 786	15 435	12 019	-
1 999	2 000	5 205	9 024	14 873	15 516	12 032	-
1 999	2 000	5 219	9 066	14 960	15 597	12 045	-
1 999	2 000	5 233	9 108	15 047	15 678	12 058	-
1 999	2 000	5 247	9 150	15 134	15 759	12 071	-
1 999	2 000	5 261	9 192	15 221	15 840	12 084	-
1 999	2 000	5 275	9 234	15 308	15 921	12 097	-
1 999	2 000	5 289	9 276	15 395	16 002	12 110	-
1 999	2 000	5 303	9 318	15 482	16 083	12 123	-
1 999	2 000	5 317	9 360	15 569	16 164	12 136	-
1 999	2 000	5 331	9 402	15 656	16 245	12 149	-
1 999	2 000	5 345	9 444	15 743	16 326	12 162	-
1 999	2 000	5 359	9 486	15 830	16 407	12 175	-
1 999	2 000	5 373	9 528	15 917	16 488	12 188	-
1 999	2 000	5 387	9 570	16 004	16 569	12 201	-
1 999	2 000	5 401	9 612	16 091	16 650	12 214	-
1 999	2 000	5 415	9 654	16 178	16 731	12 227	-
1 999	2 000	5 429	9 696	16 265	16 812	12 240	-
1 999	2 000	5 443	9 738	16 352	16 893	12 253	-
1 999	2 000	5 457	9 780	16 439	16 974	12 266	-
1 999	2 000	5 471	9 822	16 526	17 055	12 279	-
1 999	2 000	5 485	9 864	16 613	17 136	12 292	-
1 999	2 000	5 499	9 906	16 700	17 217	12 305	-
1 999	2 000	5 513	9 948	16 787	17 298	12 318	-
1 999	2 000	5 527	9 990	16 874	17 379	12 331	-
1 999	2 000	5 541	10 032	16 961	17 460	12 344	-
1 999	2 000	5 555	10 074	17 048	17 541	12 357	-
1 999	2 000	5 569	10 116	17 135	17 622	12 370	-
1 999	2 000	5 583	10 158	17 222	17 703	12 383	-
1 999	2 000	5 597	10 200	17 309	17 784	12 396	-
1 999	2 000	5 611	10 242	17 396	17 865	12 409	-
1 999	2 000	5 625	10 284	17 483	17 946	12 422	-
1 999	2 000	5 639	10 326	17 570	18 027	12 435	-
1 999	2 000	5 653	10 368	17 657	18 108	12 448	-
1 999	2 000	5 667	10 410	17 744	18 189	12 461	-
1 999	2 000	5 681	10 452	17 831	18 270	12 474	-
1 999	2 000	5 695	10 494	17 918	18 351	12 487	-
1 999	2 000	5 709	10 536	18 005	18 432	12 499	-
1 999	2 000	5 723	10 578	18 092	18 513	12 512	-
1 999	2 000	5 737	10 620	18 179	18 594	12 525	-
1 999	2 000	5 751	10 662	18 266	18 675	12 538	-
1 999	2 000	5 765	10 704	18 353	18 756	12 551	-
1 999	2 000	5 779	10 746	18 440	18 837	12 564	-
1 999	2 000	5 793	10 788	18 527	18 918	12 577	-
1 999	2 000	5 807	10 830	18 614	19 000	12 589	-
1 999	2 000	5 821	10 872	18 701	19 081	12 602	-
1 999	2 000	5 835	10 914	18 788	19 162	12 615	-
1 999	2 000	5 849	10 956	18 875	19 243	12 628	-
1 999	2 000	5 863	11 000	18 962	19 324	12 641	-
1 999	2 000	5 877					

की प्रतिदर्शी सीमाओं का निर्धारण करने के प्रयोग

यह सारणी काले क्षेत्र दिखनाती है



निम्नली सीमाएँ

n	0.01	0.05	0.1	0.5	0.9	1.0	2.5	5.0
1	0.924	1.269	1.507	1.990	2.603	3.096	7.07	2.198
2	1.448	1.857	2.171	2.711	3.338	4.343	7.713	1.443
3	1.844	2.337	2.644	3.209	3.839	4.759	8.07	1.709
4	2.166	2.692	3.013	3.590	4.216	5.142	8.48	1.919
5	2.437	2.985	3.314	3.896	4.517	5.413	8.746	1.149
6	2.672	3.235	3.569	4.152	4.763	5.637	8.929	1.122
7	2.878	3.452	3.769	4.372	4.976	5.81	9.106	1.103
8	3.067	3.644	3.952	4.562	5.159	5.987	9.279	1.089
9	3.248	3.813	4.154	4.731	5.319	6.149	9.441	1.079
10	3.380	3.970	4.309	4.882	5.462	6.295	9.599	1.070
11	3.516	4.111	4.449	5.018	5.591	6.428	9.749	1.064
12	3.646	4.240	4.577	5.142	5.707	6.549	9.893	1.058
13	3.769	4.369	4.695	5.256	5.811	6.659	10.027	1.054
14	3.876	4.470	4.801	5.360	5.911	6.764	10.151	1.050
15	3.979	4.573	4.900	5.457	6.001	6.864	10.269	1.046
16	4.078	4.669	5.000	5.547	6.088	6.956	10.381	1.043
17	4.168	4.759	5.096	5.631	6.162	7.043	10.487	1.041
18	4.244	4.844	5.172	5.710	6.235	7.126	10.589	1.038
19	4.330	4.925	5.250	5.783	6.303	7.204	10.684	1.036
20	4.414	5.000	5.321	5.853	6.367	7.279	10.771	1.034
21	4.497	5.072	5.394	5.919	6.428	7.351	10.851	1.033
22	4.579	5.141	5.460	5.981	6.485	7.419	10.927	1.031
23	4.662	5.206	5.524	6.041	6.539	7.484	11.001	1.030
24	4.739	5.268	5.584	6.097	6.591	7.546	11.071	1.028
25	4.811	5.327	5.642	6.151	6.640	7.601	11.139	1.027
26	4.880	5.384	5.697	6.202	6.688	7.651	11.201	1.026
27	4.947	5.439	5.749	6.251	6.731	7.699	11.261	1.025
28	5.012	5.491	5.800	6.298	6.774	7.746	11.319	1.024
29	5.074	5.541	5.848	6.343	6.814	7.791	11.374	1.023
30	5.135	5.590	5.895	6.386	6.856	7.834	11.429	1.022
40	5.449	5.921	6.280	6.741	7.174	7.71	11.819	1.017
50	5.770	6.206	6.566	7.001	7.407	7.16	12.013	1.013
60	6.044	6.479	6.849	7.263	7.657	7.60	12.181	1.011
70	6.321	6.717	7.070	7.507	7.891	8.04	12.331	1.010
80	6.598	6.954	7.302	7.743	8.119	8.47	12.471	1.009
90	6.875	7.191	7.534	7.979	8.347	8.91	12.601	1.007
100	7.152	7.428	7.766	8.215	8.575	9.34	12.721	1.007
∞	7.429	7.666	7.998	8.451	8.803	9.77	12.841	1.006
z	+3.0907	+2.5758	+2.3263	+1.9600	+1.6449	+1.2816	+0.6745	0

*जब $n > 30$ तब σ के मान स्थिर व्यंजक के प्रयोग से सन्निकट रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं

$$1 \left[9n - 2 + \frac{x}{\sigma} \sqrt{18n} \right]$$

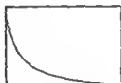
परिशिष्ट ड

F के मान

प्रदत्त स्वतन्त्र कोटियों (n_1 तथा n_2) के लिए तथा चुने हुए उपरले बिन्दुओं पर मगत निचले बिन्दुओं के लिए F के मान n_1 तथा n_2 के मानों का म्यातांतरण

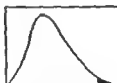
करके तथा $\frac{1}{F}$ का परिक्रमण करके प्राप्त किए जा सकन हैं।

यह मागणी काले
क्षेत्रों को दर्शाती है



$n_1 = 1$

तथा $n_2 \geq 2$ के लिए



$n_1 \geq 3$

के लिए

n_1	$n_2 = 1$					$n_2 = 2$				
	10	05	025	01	001	10	05	025	01	001
1	39.864	181.45	64.77	4.05*	2	42.500	192.52	72.92	4.922	300.000
2	8.526	19.13	39.595	9.903	999.5	9.000	19.000	39.595	99.000	999.0
3	5.584	10.129	17.443	34.115	187.0	5.452	9.552	15.041	33.817	145.5
4	4.845	7.709	12.018	21.198	78.11	4.725	8.944	13.019	23.070	81.25
5	4.350	6.608	10.007	15.258	47.19	4.350	8.345	11.254	17.17	57.15
6	3.982	5.854	8.913	13.715	35.51	3.982	7.750	10.000	15.000	50.000
7	3.707	5.351	8.073	12.245	29.25	3.707	7.250	9.250	14.000	45.000
8	3.484	5.013	7.571	11.259	25.47	3.484	6.857	8.643	13.250	41.25
9	3.300	4.717	7.121	10.501	22.47	3.300	6.500	8.125	12.625	38.125
10	3.153	4.464	6.817	10.000	20.00	3.153	6.182	7.727	12.121	35.727
11	3.038	4.244	6.574	9.645	18.67	3.038	5.900	7.400	11.700	33.700
12	2.941	4.047	6.354	9.333	17.51	2.941	5.643	7.125	11.375	32.125
13	2.860	3.869	6.151	9.064	16.47	2.860	5.400	6.889	11.111	30.778
14	2.792	3.707	5.962	8.832	15.52	2.792	5.171	6.671	10.909	29.556
15	2.735	3.559	5.795	8.633	14.73	2.735	4.954	6.471	10.714	28.429
16	2.686	3.424	5.646	8.465	14.06	2.686	4.750	6.286	10.538	27.381
17	2.644	3.300	5.513	8.323	13.50	2.644	4.557	6.114	10.377	26.400
18	2.607	3.186	5.393	8.199	13.03	2.607	4.375	5.952	10.227	25.483
19	2.574	3.082	5.283	8.090	12.63	2.574	4.200	5.800	10.087	24.625
20	2.545	2.987	5.181	7.995	12.28	2.545	4.032	5.657	9.956	23.822
21	2.519	2.899	5.090	7.912	11.98	2.519	3.875	5.521	9.833	23.071
22	2.495	2.818	5.008	7.840	11.72	2.495	3.727	5.393	9.717	22.369
23	2.473	2.743	4.934	7.777	11.49	2.473	3.586	5.271	9.607	21.714
24	2.452	2.673	4.867	7.722	11.28	2.452	3.450	5.156	9.500	21.107
25	2.432	2.608	4.806	7.673	11.09	2.432	3.319	5.046	9.400	20.544
26	2.413	2.547	4.750	7.629	10.91	2.413	3.192	4.941	9.307	20.021
27	2.395	2.489	4.698	7.589	10.74	2.395	3.069	4.841	9.219	19.536
28	2.378	2.434	4.650	7.552	10.58	2.378	2.950	4.745	9.135	19.087
29	2.362	2.381	4.605	7.518	10.43	2.362	2.835	4.653	9.055	18.671
30	2.347	2.330	4.563	7.486	10.29	2.347	2.724	4.565	8.978	18.277
40	2.253	2.155	4.374	7.314	9.61	2.253	2.445	4.301	8.75	17.25
60	2.171	2.071	4.285	7.177	9.17	2.171	2.292	4.157	8.57	16.75
120	2.114	2.020	4.225	7.083	8.83	2.114	2.187	4.075	8.45	16.32
∞	2.086	2.000	4.191	7.031	8.63	2.086	2.100	4.025	8.38	16.17

0.10, 0.05, 0.025, तथा 0.01 बिन्दुओं पर F के मान वायोमोटिका, भाग XXIII,

परिशिष्ट ड-वितत

F के मान

प्रदत्त स्वातन्त्र्य कोटियों (n_1 तथा n_2) के लिए तथा चुने हुए उपरसे बिन्दुओं पर

मगन निम्न बिन्दुओं के लिए F के मान n_1 तथा n_2 के मानों का स्थानांतरण

करके तथा $\frac{1}{F}$ का परिकलन करके प्राप्त किये जा सकते हैं।

n ₁	n ₂					n ₂ = 4				
	10	05	01	01	001	10	05	01	001	
1	53.503	5.1	5.16	5.163	5.163	53.503	5.1	5.16	5.163	562.500
2	18.51	15.164	39.165	99.166	999.2	9.213	19.167	39.218	99.219	999.2
3	5.391	9.21	15.439	29.457	117.1	5.343	9.177	15.301	29.710	137.1
4	4.191	6.591	9.9.9	16.624	56.18	4.107	6.358	9.694	15.9.7	63.44
5	3.870	5.4.0	7.14	11.060	33.30	3.570	5.397	7.358	11.397	31.09
6	3.592	4.17	6.589	9.7.9	23.70	3.191	4.534	6.227	9.119	21.97
7	3.0.4	4.317	5.890	8.451	15.77	2.960	4.120	5.523	7.817	17.00
8	2.974	4.068	5.410	7.591	13.83	2.808	3.835	5.053	7.006	14.39
9	2.8.3	3.893	5.078	6.907	13.90	2.693	3.633	4.719	6.4.7	12.56
10	2.78	3.68	4.696	6.357	12.85	2.605	3.4.8	4.468	5.974	11.29
11	2.680	3.577	4.639	6.217	11.56	2.535	3.357	4.375	5.658	10.35
12	2.604	3.491	4.4.4	5.953	10.80	2.470	3.259	4.171	5.412	9.63
13	2.560	3.410	4.317	5.739	10.21	2.414	3.1.7	3.926	5.105	9.07
14	2.522	3.344	4.242	5.664	9.73	2.371	3.112	3.872	5.035	8.6
15	2.490	3.287	4.153	5.617	9.36	2.361	3.066	3.844	4.893	8.15
16	2.462	3.249	4.077	5.592	8.90	2.333	3.007	3.779	4.771	7.94
17	2.437	3.157	4.011	5.585	8.73	2.308	2.945	3.665	4.669	7.69
18	2.416	3.150	3.931	5.592	8.49	2.296	2.929	3.608	4.5.9	7.46
19	2.39	3.127	3.903	5.610	8.28	2.266	2.895	3.559	4.500	7.25
20	2.380	3.015	3.859	6.938	8.10	2.249	2.866	3.515	4.421	7.10
21	2.365	3.0.2	3.819	6.874	7.94	2.233	2.840	3.475	4.369	6.95
22	2.351	3.019	3.82	6.877	7.60	2.219	2.817	3.440	4.213	6.81
23	2.339	3.0.9	3.750	6.765	7.67	2.206	2.795	3.408	4.264	6.69
24	2.32	2.929	3.771	6.713	7.55	2.195	2.778	3.379	4.219	6.59
25	2.31	2.941	3.691	6.678	7.45	2.184	2.769	3.353	4.177	6.49
26	2.304	2.9.3	3.6.0	6.637	7.28	2.174	2.713	3.329	4.140	6.41
27	2.297	2.960	3.647	6.603	7.27	2.166	2.728	3.307	4.106	6.33
28	2.291	2.947	3.6.5	6.565	7.13	2.157	2.714	3.286	4.074	6.26
29	2.283	2.934	3.607	6.539	7.12	2.149	2.7.1	3.267	4.045	6.19
30	2.2.5	2.927	3.589	6.510	7.05	2.162	2.690	3.250	4.018	6.13
40	2.226	2.822	3.463	6.313	6.69	2.091	2.606	3.126	3.579	5.70
50	2.173	2.7.4	3.342	6.126	6.17	2.041	2.573	3.008	3.449	5.31
100	2.130	2.650	3.227	5.949	5.9.9	1.997	2.44	2.894	3.190	4.93
∞	2.041	2.605	3.115	5.792	5.47	1.945	2.3.2	2.748	3.139	4.68

अप्रैल 1943 में लखनऊ तथा मैकमीन मेरिडन और मैकरीन ह्म० बीम्स द्वारा शोधन * डबल माफ परस्पर स्वार्थम आप वि ह्मि- बीटा (F) डिस्ट्रिब्यूशन, पृष्ठ 73—78 से अवलोकन लिए गए थे। 0.001 त्र- पर F के मान 77.0 ए० 1कृत्र तथा एक० वरस स्टैटिस्टिकल टेबल्स फॉर बायोला जिकल एग्ज-चन्स एंड मडिकल रिसर्च, जानिवर एंड वनशड लिब्रिटड, एंडनबरा 1919 की सारणी Y त लवको तथाअननन का अनुज्ञा से, लिए गए थ। जो सारणीय मूल रूप से बायोमेट्रिका में प्रकाशित हुई थी ते ई० ए० विमन तथा एच० बी० हाटन, बायोमेट्रिका टवल्स फॉर स्टैटिस्टी- शिय स लवड] रेनियन मुनिवर्सिगे प्रैस, लंदन, 1954, पृष्ठ 157—163 में भी विन मन्ती है। इस योन म 0.001 वि डु पर मानों के लिए 14 शोधन प्रस्तुत किए गए।

पारशिष्ट ड-वितल

F के मान

प्रदत्त स्वातन्त्र्य कोटियों (m_1 तथा n) के लिए तय्यारुने हुए उपरले बिन्दुओ पर
मगन निचल बिन्दुओ के लिए F के मान m_1 तथा n क मानो का स्थानांतरण

काक तथा $\frac{1}{F}$ का पत्रिकलन करके प्राप्त किये जा सकत है ।

m ₁	n = 5					n = 10				
	0	05	025	01	001	10	05	01	001	001
1	3.1	2.30	1.85	1.53	1.405	5.8	2.74	2.33	1.93	1.85
2	4.1	3.19	2.59	2.19	2.09	9.7	3.76	3.33	2.93	2.93
3	5.0	4.09	3.41	2.91	2.81	13.6	4.78	4.33	3.93	3.93
4	5.8	4.81	4.25	3.75	3.65	17.5	5.79	5.33	4.93	4.93
5	6.6	5.63	5.10	4.60	4.50	21.4	6.80	6.33	5.93	5.93
6	7.4	6.45	5.95	5.45	5.35	25.3	7.81	7.33	6.93	6.93
7	8.2	7.27	6.77	6.27	6.17	29.2	8.82	8.33	7.93	7.93
8	9.0	8.09	7.59	7.09	6.99	33.1	9.83	9.33	8.93	8.93
9	9.8	8.91	8.41	7.91	7.81	37.0	10.84	10.33	9.93	9.93
10	10.6	9.73	9.23	8.73	8.63	40.9	11.85	11.33	10.93	10.93
11	11.4	10.55	10.05	9.55	9.45	44.8	12.86	12.33	11.93	11.93
12	12.2	11.37	10.87	10.37	10.27	48.7	13.87	13.33	12.93	12.93
13	13.0	12.19	11.69	11.19	11.09	52.6	14.88	14.33	13.93	13.93
14	13.8	13.01	12.51	12.01	11.91	56.5	15.89	15.33	14.93	14.93
15	14.6	13.83	13.33	12.83	12.73	60.4	16.90	16.33	15.93	15.93
16	15.4	14.65	14.15	13.65	13.55	64.3	17.91	17.33	16.93	16.93
17	16.2	15.47	14.97	14.47	14.37	68.2	18.92	18.33	17.93	17.93
18	17.0	16.29	15.79	15.29	15.19	72.1	19.93	19.33	18.93	18.93
19	17.8	17.11	16.61	16.11	16.01	76.0	20.94	20.33	19.93	19.93
20	18.6	17.93	17.43	16.93	16.83	79.9	21.95	21.33	20.93	20.93
21	19.4	18.75	18.25	17.75	17.65	83.8	22.96	22.33	21.93	21.93
22	20.2	19.57	19.07	18.57	18.47	87.7	23.97	23.33	22.93	22.93
23	21.0	20.39	19.89	19.39	19.29	91.6	24.98	24.33	23.93	23.93
24	21.8	21.21	20.71	20.21	20.11	95.5	25.99	25.33	24.93	24.93
25	22.6	22.03	21.53	21.03	20.93	99.4	27.00	26.33	25.93	25.93
26	23.4	22.85	22.35	21.85	21.75	103.3	28.01	27.33	26.93	26.93
27	24.2	23.67	23.17	22.67	22.57	107.2	29.02	28.33	27.93	27.93
28	25.0	24.49	23.99	23.49	23.39	111.1	30.03	29.33	28.93	28.93
29	25.8	25.31	24.81	24.31	24.21	115.0	31.04	30.33	29.93	29.93
30	26.6	26.13	25.63	25.13	25.03	118.9	32.05	31.33	30.93	30.93
40	30.2	30.2	30.2	30.2	30.2	141.8	36.06	35.33	34.93	34.93
50	33.8	33.8	33.8	33.8	33.8	164.7	40.07	39.33	38.93	38.93
60	37.4	37.4	37.4	37.4	37.4	187.6	44.08	43.33	42.93	42.93
70	41.0	41.0	41.0	41.0	41.0	210.5	48.09	47.33	46.93	46.93
80	44.6	44.6	44.6	44.6	44.6	233.4	52.10	51.33	50.93	50.93
90	48.2	48.2	48.2	48.2	48.2	256.3	56.11	55.33	54.93	54.93
100	51.8	51.8	51.8	51.8	51.8	279.2	60.12	59.33	58.93	58.93

परिशिष्ट ड-वितत

F के मान

प्रदत्त स्वातन्त्र्य कोटियों (n_1 तथा n_2) के लिए तथा चुने हुए उपरले बिन्दुमा पर समत निचले बिन्दुमा के लिए F के मान n_1 तथा n_2 के माना का स्यानातरण करके तथा $\frac{1}{F}$ का परिकलन करके प्राप्त किए जा सकते हैं ।

n ₁	n ₂ = 8					n ₂ = 12				
	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30
1	59.429	235.45	954.65	5.951.6	598.144	69.05	243.9	954.71	6.105.3	610.657
2	9.567	19.3.1	55.3.3	89.374	900.4	9.405	19.413	55.415	89.418	900.4
3	5.252	8.645	14.640	2.459	430.6	5.216	8.745	14.637	2.452	428.8
4	3.355	6.041	8.980	14.788	49.06	3.879	5.913	8.731	14.374	47.41
5	2.420	4.818	6.757	10.289	37.64	2.261	4.6.8	6.525	9.888	25.42
6	2.033	4.147	5.600	8.189	19.03	1.905	4.000	5.368	7.718	17.90
7	1.732	3.728	4.899	6.840	11.83	1.653	3.5.5	4.686	6.459	13.71
8	1.567	3.435	4.435	6.079	12.04	1.507	3.284	4.200	5.607	11.19
9	1.459	3.230	4.107	5.467	10.37	1.3.4	3.073	3.868	5.111	9.87
10	1.37	3.072	3.855	5.057	9.20	1.294	2.913	3.621	4.608	8.45
11	1.304	2.948	3.664	4.745	8.35	1.200	2.788	3.430	4.397	7.63
12	1.245	2.849	3.512	4.490	7.71	1.147	2.687	3.277	4.155	7.00
13	1.195	2.77	3.38	4.302	7.21	1.097	2.604	3.153	3.960	6.52
14	1.154	2.699	3.285	4.140	6.80	1.054	2.534	3.050	3.800	6.19
15	1.118	2.641	3.199	4.001	6.47	1.017	2.475	2.963	3.668	5.81
16	1.088	2.591	3.125	3.890	6.18	1.985	2.425	2.879	3.553	5.55
17	1.061	2.549	3.061	3.791	5.96	1.954	2.381	2.825	3.455	5.32
18	1.038	2.5.0	3.005	3.704	5.78	1.932	2.342	2.780	3.371	5.17
19	1.017	2.4.7	2.956	3.631	5.61	1.912	2.303	2.720	3.296	4.97
20	1.000	2.447	2.913	3.561	5.44	1.892	2.2.8	2.6.6	3.231	4.82
21	1.982	2.421	2.874	3.504	5.31	1.8.5	2.290	2.637	3.173	4.70
22	1.967	2.397	2.839	3.452	5.19	1.859	2.265	2.602	3.121	4.58
23	1.953	2.3.5	2.808	3.404	5.09	1.845	2.204	2.5.0	3.074	4.48
24	1.941	2.335	2.779	3.362	4.99	1.832	2.183	2.541	3.032	4.39
25	1.929	2.327	2.752	3.324	4.91	1.820	2.165	2.515	2.993	4.31
26	1.919	2.321	2.729	3.288	4.83	1.809	2.148	2.491	2.959	4.24
27	1.909	2.305	2.707	3.256	4.76	1.792	2.132	2.468	2.926	4.17
28	1.900	2.291	2.687	3.226	4.69	1.780	2.118	2.448	2.896	4.11
29	1.892	2.278	2.669	3.199	4.64	1.768	2.104	2.430	2.869	4.05
30	1.884	2.266	2.651	3.173	4.58	1.773	2.092	2.412	2.843	4.00
40	1.840	2.180	2.579	2.993	4.21	1.715	2.004	2.288	2.665	3.84
50	1.7.5	2.097	2.472	2.821	3.87	1.657	1.917	2.189	2.495	3.71
60	1.622	2.016	2.359	2.663	3.55	1.601	1.804	2.035	2.336	3.62
70	1.6.0	1.926	2.1.2	2.511	3.27	1.546	1.752	1.945	2.193	3.54

परिशिष्ट ड-समाप्त F के मान

प्रदत्त स्वातन्त्र्य कोटियों (n_1 तथा n_2) के लिए तथा चुने हुए उपरल बिन्दुओं पर सन् निचले बिन्दुओं के लिए F के मान n_1 तथा n_2 क माना का स्थानान्तरण का के तथा $\frac{1}{F}$ परिवर्तन करके प्राप्त किय जा सकत हैं ।

n_1	$n_2 = 1$					$n_2 = 2$				
	0	.05	.10	.15	.20	0	.05	.10	.15	.20
1	22.00	24.00	25.00	26.00	27.00	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00
2	18.51	19.51	20.51	21.51	22.51	16.51	17.51	18.51	19.51	20.51
3	16.69	17.69	18.69	19.69	20.69	14.69	15.69	16.69	17.69	18.69
4	15.52	16.52	17.52	18.52	19.52	13.52	14.52	15.52	16.52	17.52
5	14.85	15.85	16.85	17.85	18.85	12.85	13.85	14.85	15.85	16.85
6	14.35	15.35	16.35	17.35	18.35	12.35	13.35	14.35	15.35	16.35
7	13.95	14.95	15.95	16.95	17.95	11.95	12.95	13.95	14.95	15.95
8	13.62	14.62	15.62	16.62	17.62	11.62	12.62	13.62	14.62	15.62
9	13.35	14.35	15.35	16.35	17.35	11.35	12.35	13.35	14.35	15.35
10	13.12	14.12	15.12	16.12	17.12	11.12	12.12	13.12	14.12	15.12
11	12.93	13.93	14.93	15.93	16.93	10.93	11.93	12.93	13.93	14.93
12	12.77	13.77	14.77	15.77	16.77	10.77	11.77	12.77	13.77	14.77
13	12.63	13.63	14.63	15.63	16.63	10.63	11.63	12.63	13.63	14.63
14	12.51	13.51	14.51	15.51	16.51	10.51	11.51	12.51	13.51	14.51
15	12.40	13.40	14.40	15.40	16.40	10.40	11.40	12.40	13.40	14.40
16	12.31	13.31	14.31	15.31	16.31	10.31	11.31	12.31	13.31	14.31
17	12.23	13.23	14.23	15.23	16.23	10.23	11.23	12.23	13.23	14.23
18	12.16	13.16	14.16	15.16	16.16	10.16	11.16	12.16	13.16	14.16
19	12.10	13.10	14.10	15.10	16.10	10.10	11.10	12.10	13.10	14.10
20	12.05	13.05	14.05	15.05	16.05	10.05	11.05	12.05	13.05	14.05
21	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00
22	11.96	12.96	13.96	14.96	15.96	9.96	10.96	11.96	12.96	13.96
23	11.92	12.92	13.92	14.92	15.92	9.92	10.92	11.92	12.92	13.92
24	11.89	12.89	13.89	14.89	15.89	9.89	10.89	11.89	12.89	13.89
25	11.86	12.86	13.86	14.86	15.86	9.86	10.86	11.86	12.86	13.86
26	11.83	12.83	13.83	14.83	15.83	9.83	10.83	11.83	12.83	13.83
27	11.81	12.81	13.81	14.81	15.81	9.81	10.81	11.81	12.81	13.81
28	11.79	12.79	13.79	14.79	15.79	9.79	10.79	11.79	12.79	13.79
29	11.77	12.77	13.77	14.77	15.77	9.77	10.77	11.77	12.77	13.77
30	11.75	12.75	13.75	14.75	15.75	9.75	10.75	11.75	12.75	13.75
40	11.60	12.60	13.60	14.60	15.60	9.60	10.60	11.60	12.60	13.60
60	11.45	12.45	13.45	14.45	15.45	9.45	10.45	11.45	12.45	13.45
120	11.30	12.30	13.30	14.30	15.30	9.30	10.30	11.30	12.30	13.30
∞	11.15	12.15	13.15	14.15	15.15	9.15	10.15	11.15	12.15	13.15

परिशिष्ट द

N , तथा k के निर्दिष्ट मानों के लिए 0.05 तथा 0.01

बिन्दुओं पर L के मान, जब $N_1 = N_2 = \dots = N_k = N$

यदि परिवर्तनीय आकार के प्रतिदर्शों में L का परीक्षण किया गया है तो N_k को $N_1 + N_2 + \dots + N_k$ के बराबर लो, भर्त यह है कि कोई भी प्रतिदर्श 15 या 20 मद्दों से कम का नहीं होना चाहिए।



यह सारणी काम, क्षेत्र दर्शाती है

k	N = 3		N = 4		N = 5		N = 6		N = 7		N = 8		N = 9	
	05	01	05	01	05	01	05	01	05	01	05	01	05	01
2	314	141	478	394	585	729	636	689	709	801	745	803	775	843
3	304	162	470	326	578	629	648	814	707	878	739	828	789	867
4	315	188	460	345	585	639	656	842	707	864	744	832	774	889
6	328	210	491	370	605	684	665	714	634	751	751	876	780	904
8	330	230	502	391	624	706	673	721	641	757	761	881	784	920
7	350	246	512	409	612	620	680	727	644	763	763	897	790	930
9	359	260	520	424	620	634	684	733	648	768	768	907	795	940
9	367	272	527	437	626	645	691	740	654	772	772	915	798	947
10	374	284	534	448	631	656	696	742	658	776	776	923	802	953
12	387	303	545	467	641	672	704	749	666	782	782	934	807	964
14	397	318	554	481	649	685	711	755	668	787	787	944	812	973
16	405	331	561	493	655	696	718	759	674	791	791	951	818	979
18	412	343	567	504	660	704	722	762	678	795	795	954	819	984
20	419	352	573	512	665	713	725	767	682	798	798	957	822	988
22	424	360	577	520	669	719	728	770	686	800	800	958	824	992
24	428	367	581	526	672	724	731	772	688	802	802	959	826	993
26	433	373	585	532	675	729	734	775	690	805	805	962	828	995
28	437	378	589	537	678	734	736	777	694	807	807	963	829	998
30	441	386	592	543	681	739	739	779	696	809	809	964	831	998

k	N = 10		N = 12		N = 15		N = 20		N = 30		N = 60		N = ∞	
	05	01	05	01	05	01	05	01	05	01	05	01	05	01
2	798	678	813	720	859	723	902	828	925	880	968	945	1.000	1.000
3	792	699	826	758	863	728	908	848	933	892	967	949	1.000	1.000
4	797	719	832	768	866	823	900	859	931	894	967	953	1.000	1.000
6	802	738	838	779	870	828	903	867	936	911	968	956	1.000	1.000
8	808	745	841	789	873	832	906	874	938	916	969	958	1.000	1.000
7	812	747	844	798	876	839	908	879	939	920	970	960	1.000	1.000
8	816	764	848	808	879	844	910	884	941	922	971	962	1.000	1.000
9	819	773	851	811	881	848	912	887	942	923	971	963	1.000	1.000
10	822	779	853	816	883	853	913	890	943	927	972	964	1.000	1.000
12	828	789	857	824	887	860	916	894	944	921	973	965	1.000	1.000
14	832	796	861	831	890	865	918	900	946	923	973	967	1.000	1.000
16	835	802	863	834	892	870	920	902	947	926	974	968	1.000	1.000
18	838	807	866	840	894	873	921	905	949	927	974	969	1.000	1.000
20	840	811	868	844	896	876	922	908	949	929	975	970	1.000	1.000
22	843	814	870	847	897	878	924	909	950	940	975	970	1.000	1.000
24	844	817	872	850	898	880	924	911	950	941	975	971	1.000	1.000
26	846	820	873	853	899	882	925	912	951	942	976	971	1.000	1.000
28	848	823	874	854	900	884	926	914	951	943	976	972	1.000	1.000
30	849	827	876	856	901	886	927	916	952	944	976	972	1.000	1.000

यह सारणी स्टैटिस्टिकल रिश्चें मेमोरियल, खण्ड I (1936) में सन्निहित तथा पी० पी० एन० नंबर द्वारा लिखित "एन इन्वैस्टिगेशन इन्टु दि रिलेशनशिप आफ समान एंड डिफरेंट L टैस्ट, बिद टवन्-म आफ परसेन्टेज लिमिट्स", पृष्ठ 38—51 की एक सारणी का आधार पर, बहुत बड़े नमूना से बनायी गई है। इन स्वरूप की एक बहुत ही सारणी सांख्यिकी इन्वियन जर्नल आफ स्टैटिस्टिक्स, खण्ड 1, भाग I (जून 1933) में सन्निहित तथा पी० पी० स्टैटिस्टिकल द्वारा लिखित 'टेबल ऑफ दि रिलेशनशिप आफ L -टैस्ट्स', पृष्ठ 109—122 पर दी गई है।

परिशिष्ट ण

β_1 की उपरली 0.10 तथा 0.02 सीमाएँ जब वे प्रसामान्य समष्टि से लिए गये यादृच्छिक प्रतिदर्शों से परिकलित हों

यह सारणी काला क्षेत्र दर्शाती है



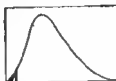
N	0.10	0.02
50	235	619
75	198	424
100	152	321
125	123	258
150	103	216
175	089	185
200	078	162
250	063	130
300	053	109
350	045	093
400	040	081
450	035	072
500	032	065
550	029	059
600	027	054
650	025	050
700	023	046
750	021	043
800	020	041
850	019	039
900	018	036
950	017	034
1000	016	032
1200	013	027
1400	012	023
1600	010	020
1800	009	018
2000	008	016
2500	006	013
3000	005	011
3500	005	009
4000	004	008
4500	004	007
5000	003	006

यह सारणी बायोमेट्रिका, खण्ड XXII में मन्लिन तथा ईगन एस० पियर्सन द्वारा लिखित लेख "ए. वे फदर डिफेनियम-ट ग्राफ टस्टिंग ग्राफ नॉर्मैलिटी", पृष्ठ 239 एवं अनुवर्ती में दी हुई सारणी में, अनुहा लेकर, ली गई है। $\sqrt{\beta_1}$ के लिए एक इसी तरह की सारणी ई० एम० पियर्सन तथा एब० ओ० हाग्वे, बायोमेट्रिका टेबल्स फार स्टैटिस्टीशियन्स, खण्ड 1, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लन्दन, 1954, पृष्ठ 183 पर दी हुई है।

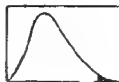
परिशिष्ट त

५. की उपरली तथा निचली 0.05 तथा 0.01 सीमाएं जब वे प्रसामान्य समष्टि से लिए गये यादृच्छिक प्रतिदर्शों से परिकलित हो

यह सारणी काने क्षेत्र दिखलाती है



तथा



N	निचली सीमाएं		उपरली सीमाएं	
	0.01	0.05	0.05	0.01
100	2.18	2.33	3.00	4.39
125	2.24	2.40	3.00	4.24
150	2.29	2.44	3.00	4.14
175	2.33	2.48	3.01	4.05
200	2.37	2.51	3.01	3.98
250	2.42	2.55	3.02	3.87
300	2.46	2.59	3.07	3.79
350	2.50	2.62	3.11	3.72
400	2.52	2.64	3.11	3.67
450	2.55	2.66	3.13	3.63
500	2.57	2.67	3.13	3.60
550	2.59	2.69	3.13	3.57
600	2.60	2.70	3.14	3.54
650	2.61	2.71	3.14	3.52
700	2.62	2.72	3.14	3.50
750	2.64	2.73	3.15	3.48
800	2.65	2.74	3.15	3.46
850	2.66	2.74	3.15	3.45
900	2.66	2.75	3.15	3.43
950	2.67	2.76	3.15	3.42
1000	2.68	2.76	3.15	3.41
1200	2.71	2.78	3.16	3.37
1400	2.72	2.80	3.16	3.34
1600	2.74	2.81	3.16	3.32
1800	2.76	2.82	3.16	3.30
2000	2.77	2.83	3.16	3.28
2500	2.79	2.85	3.16	3.25
3000	2.81	2.86	3.16	3.22
3500	2.82	2.87	3.16	3.21
4000	2.83	2.88	3.16	3.19
4500	2.84	2.88	3.16	3.18
5000	2.85	2.89	3.16	3.17

यह सारणी वायोमीट्रिका बन्ध XXII, वे सकलित तथा ईन्त एम० पिपर्वन द्वारा निश्चित क्षेत्र ए फर्दर डिजिटलपेन्ट आफ टेस्टस आफ नॉर्मैलिटी पृष्ठ 239 एवं अनुबन्धी के दो हुई सारणी के, अनुज्ञा लेकर, ली गई है। इस तबद्ध की एम० सारणी ई० एम० पिपर्वन तथा एम० जी० हॉटने, वायोमीट्रिका टेबल्स फॉर स्टैटिस्टीशियन्स खण्ड-1, दोनबद यूनिवर्सिटी प्रेस लन्दन 1954 पर 184 पर दो हुई है।

परिशिष्ट थ

वर्ग, वर्गमूल, तथा व्युत्क्रम, 1-1,000

वर्ग	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम	वर्ग	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम
1	1	1 000000	1 000000	51	2 01	7 141474	01 00 43
2	4	1 414 136	0 50000000	52	2 04	7 211107	01 02 30
3	9	1 732 003	33333333	53	2 09	7 280109	01 05 56
4	16	2 000000	0 000000	54	2 16	7 3484692	01 05 15
5	25	2 236 067	0 000000	55	2 25	7 461885	01 05 15
6	36	2 449 47	1644	56	3 13	7 453148	01 05 13
7	49	2 64 013	147 7143	57	3 49	7 5495344	01 05 35
8	64	2 800 000	100 0000	58	3 64	7 615 31	01 07 41
9	81	3 000000	11111111	59	3 81	7 651145	01 09 15
10	100	3 162 277	10000000	60	3 60	7 450 67	01 05 66
11	121	3 316 64	00000001	61	3 71	7 810 437	01 05 34
12	144	3 464 1016	05333333	62	3 54	7 840 079	01 06 03
13	169	3 605 13	0 69239	63	3 69	7 93 2630	01 05 30
14	196	3 7416 4	0 142 1	64	4 04	7 000 000	01 05 30
15	225	3 500 333	06000667	65	4 25	7 00 22 7	01 05 30
16	256	4 000000	06 000000	66	4 36	7 140 354	01 05 15
17	289	4 123 10	0 5523 0	67	4 49	7 155 25	01 05 30
18	324	4 164 07	0 5555 00	68	4 64	7 210 113	01 05 30
19	361	4 355 89	0 6 1 7	69	4 81	7 300 239	01 05 30
20	400	4 472 10	0 000000	70	4 90	7 366 003	01 05 30
21	441	4 552 707	04 619045	71	5 01	7 401 438	01 05 30
22	484	4 694 158	0454 4545	72	5 14	7 428 14	01 05 30
23	529	4 70 5315	0434 3 1	73	5 29	7 541 003	01 05 30
24	576	4 895 90	0416 6666	74	5 46	7 602 333	01 05 30
25	625	5 000000	04000000	75	5 69	7 660 240	01 05 30
26	676	5 090 190	03516153	76	5 76	7 719 9	01 05 30
27	729	5 190 15	03 03 03	77	5 99	7 796 44	01 05 30
28	784	5 291 506	03 14 7	78	6 04	7 831 609	01 05 30
29	841	5 350 1645	03 03 03	79	6 21	7 855 1944	01 05 30
30	900	5 4 77 0	03 333333	80	6 40	7 944 2719	01 05 30
31	961	5 56 77644	0322 0000	81	6 61	7 900 000	01 05 30
32	1024	5 600 4	0315 0000	82	6 74	7 900 000	01 05 30
33	1089	5 744 620	0 03 3300	83	6 89	7 1104 336	01 05 30
34	1156	5 830 1	0 0411 1	84	7 06	7 1651 14	01 05 30
35	1225	5 916 07	0 05 14 7	85	7 25	7 190 115	01 05 30
36	1300	6 000 000	0 0 0 0	86	7 46	7 23 150	01 05 30
37	1369	6 057 6	0 0 0 0	87	7 69	7 30 01	01 05 30
38	1444	6 164 1140	0 0 1 0	88	7 94	7 30 315	01 05 30
39	1521	6 149 950	0 0 1 0	89	8 21	7 439 511	01 05 30
40	1600	6 324 333	0 0 000000	90	8 40	7 456 330	01 05 30
41	1681	6 4031 47	0 0 1397 44	91	8 61	7 539 970	01 05 30
42	1764	6 480 7407	0 0 0 0	92	8 84	7 591 430	01 05 30
43	1849	6 557 435	0 0 0 11	93	8 69	7 6435 08	01 05 30
44	1936	6 633 196	0 0 0 0	94	8 96	7 693 30	01 05 30
45	2025	6 68 039	0 0 0 0	95	9 04	7 746 943	01 05 30
46	2116	6 723 300	0 0 1 0	96	9 16	7 79 9590	01 05 30
47	2209	6 805 640	0 0 12 0 6	97	9 49	7 84 80 3	01 05 30
48	2304	6 825 00	0 0 0 0	98	9 64	7 899 940	01 05 30
49	2401	7 000 000	0 0 0 0	99	9 81	7 949 5744	01 05 30
50	2500	7 0 10678	0 0 000000	100	1 00 00	10 000 000	01 05 30

संख्या	वर्ग	वर्गमान	वर्गमान	संख्या	वर्ग	वर्गमान	वर्गमान
101	1 02 01	10 010 000	990 000	151	2 20 01	12 200 000	600 000
102	1 01 01	10 000 000	990 000	152	2 21 01	12 210 000	600 000
103	1 00 00	10 000 000	990 000	153	2 22 00	12 220 000	600 000
104	1 05 10	10 050 000	990 000	154	2 23 10	12 230 000	600 000
105	1 10 20	10 100 000	990 000	155	2 24 20	12 240 000	600 000
106	1 12 30	10 120 000	990 000	156	2 25 30	12 250 000	600 000
107	1 14 40	10 140 000	990 000	157	2 26 40	12 260 000	600 000
108	1 16 50	10 160 000	990 000	158	2 27 50	12 270 000	600 000
109	1 18 51	10 180 000	990 000	159	2 28 51	12 280 000	600 000
110	1 21 00	10 210 000	990 000	160	2 29 00	12 290 000	600 000
111	1 23 21	10 230 000	990 000	161	2 30 21	12 300 000	600 000
112	1 25 41	10 250 000	990 000	162	2 31 41	12 310 000	600 000
113	1 27 60	10 270 000	990 000	163	2 32 60	12 320 000	600 000
114	1 29 01	10 290 000	990 000	164	2 33 01	12 330 000	600 000
115	1 30 20	10 300 000	990 000	165	2 34 20	12 340 000	600 000
116	1 31 40	10 310 000	990 000	166	2 35 40	12 350 000	600 000
117	1 32 50	10 320 000	990 000	167	2 36 50	12 360 000	600 000
118	1 33 51	10 330 000	990 000	168	2 37 51	12 370 000	600 000
119	1 34 51	10 340 000	990 000	169	2 38 51	12 380 000	600 000
120	1 35 51	10 350 000	990 000	170	2 39 51	12 390 000	600 000
121	1 36 51	10 360 000	990 000	171	2 40 51	12 400 000	600 000
122	1 37 51	10 370 000	990 000	172	2 41 51	12 410 000	600 000
123	1 38 51	10 380 000	990 000	173	2 42 51	12 420 000	600 000
124	1 39 51	10 390 000	990 000	174	2 43 51	12 430 000	600 000
125	1 40 51	10 400 000	990 000	175	2 44 51	12 440 000	600 000
126	1 41 51	10 410 000	990 000	176	2 45 51	12 450 000	600 000
127	1 42 51	10 420 000	990 000	177	2 46 51	12 460 000	600 000
128	1 43 51	10 430 000	990 000	178	2 47 51	12 470 000	600 000
129	1 44 51	10 440 000	990 000	179	2 48 51	12 480 000	600 000
130	1 45 51	10 450 000	990 000	180	2 49 51	12 490 000	600 000
131	1 46 51	10 460 000	990 000	181	2 50 51	12 500 000	600 000
132	1 47 51	10 470 000	990 000	182	2 51 51	12 510 000	600 000
133	1 48 51	10 480 000	990 000	183	2 52 51	12 520 000	600 000
134	1 49 51	10 490 000	990 000	184	2 53 51	12 530 000	600 000
135	1 50 51	10 500 000	990 000	185	2 54 51	12 540 000	600 000
136	1 51 51	10 510 000	990 000	186	2 55 51	12 550 000	600 000
137	1 52 51	10 520 000	990 000	187	2 56 51	12 560 000	600 000
138	1 53 51	10 530 000	990 000	188	2 57 51	12 570 000	600 000
139	1 54 51	10 540 000	990 000	189	2 58 51	12 580 000	600 000
140	1 55 51	10 550 000	990 000	190	2 59 51	12 590 000	600 000
141	1 56 51	10 560 000	990 000	191	3 00 51	13 000 000	600 000
142	1 57 51	10 570 000	990 000	192	3 01 51	13 010 000	600 000
143	1 58 51	10 580 000	990 000	193	3 02 51	13 020 000	600 000
144	1 59 51	10 590 000	990 000	194	3 03 51	13 030 000	600 000
145	2 00 51	11 000 000	990 000	195	3 04 51	13 040 000	600 000
146	2 01 51	11 010 000	990 000	196	3 05 51	13 050 000	600 000
147	2 02 51	11 020 000	990 000	197	3 06 51	13 060 000	600 000
148	2 03 51	11 030 000	990 000	198	3 07 51	13 070 000	600 000
149	2 04 51	11 040 000	990 000	199	3 08 51	13 080 000	600 000
150	2 05 51	11 050 000	990 000	200	3 09 51	13 090 000	600 000

क्रमांक	वर्ग	वर्गमूल	अन्तरमूल	क्रमांक	वर्ग	वर्गमूल	अन्तरमूल
201	4 01 01	14 1774469	4975124	251	6 30 01	15 8129795	3994064
202	4 08 04	14 2128704	4950494	252	6 35 04	15 8715079	3968254
203	4 12 09	14 2478068	4926108	253	6 40 09	15 9059737	3952569
204	4 16 16	14 2528569	4901961	254	6 45 16	15 9373775	3937008
205	4 20 25	14 3178211	4875019	255	6 50 25	15 9687194	3921560
206	4 24 36	14 3327001	4854469	256	6 55 36	16 0000020	3906220
207	4 28 49	14 3571946	4830018	257	6 60 49	16 0312195	3891051
208	4 32 64	14 4222051	4804692	258	6 65 64	16 0623784	3875969
209	4 36 81	14 4563223	4781689	259	6 70 81	16 0934709	3861004
210	4 41 00	14 4913767	4761905	260	6 76 00	16 1245155	3846154
211	4 45 21	14 5263390	4739736	261	6 81 21	16 1554914	3831418
212	4 49 44	14 5602198	4716951	262	6 86 44	16 1864141	3816791
213	4 53 69	14 5945195	4691936	263	6 91 69	16 2172747	3802281
214	4 57 96	14 6287355	4672997	264	6 96 96	16 2480768	3787879
215	4 62 25	14 6628783	4651163	265	7 02 25	16 2788206	3773585
216	4 66 56	14 6969385	4629630	266	7 07 56	16 3095064	3759398
217	4 70 89	14 7309190	4608295	267	7 12 89	16 3401316	3745319
218	4 75 24	14 7648231	4587156	268	7 18 24	16 3707055	3731343
219	4 79 61	14 7986496	4566210	269	7 23 61	16 4012195	3717472
220	4 84 00	14 8323370	4545433	270	7 29 00	16 4316767	3703704
221	4 88 41	14 8658687	4524857	271	7 34 41	16 4620776	3690037
222	4 92 84	14 8996644	4504505	272	7 39 84	16 4924225	3676471
223	4 97 29	14 9331845	4484305	273	7 45 29	16 5227116	3663004
224	5 01 76	14 9666295	4464286	274	7 50 76	16 5529454	3649635
225	5 06 25	15 0000000	4444444	275	7 56 25	16 5831240	3636364
226	5 10 76	15 0332964	4424779	276	7 61 76	16 6132477	3623188
227	5 15 29	15 0665192	4405286	277	7 67 29	16 6433170	3610108
228	5 19 84	15 0996689	4385965	278	7 72 84	16 6733320	3597122
229	5 24 41	15 1327460	4366812	279	7 78 41	16 7032931	3584229
230	5 29 00	15 1657500	4347826	280	7 84 00	16 7332005	3571429
231	5 33 61	15 1986842	4329064	281	7 89 61	16 7630546	3558719
232	5 38 24	15 2315462	4310445	282	7 95 24	16 7928550	3546099
233	5 42 89	15 2643375	4291915	283	8 00 89	16 8226038	3533669
234	5 47 46	15 2970585	4273504	284	8 06 56	16 8522935	3521127
235	5 52 25	15 3297097	4255219	285	8 12 25	16 8819430	3508772
236	5 56 96	15 3622915	4237058	286	8 17 96	16 9115545	3496503
237	5 61 60	15 3948013	4219109	287	8 23 69	16 9410743	3484321
238	5 66 14	15 4272486	4201681	288	8 29 14	16 9706027	3472222
239	5 71 21	15 4596218	4184400	289	8 35 21	17 0000000	3460208
240	5 76 00	15 4919331	4166667	290	8 41 00	17 0293864	3448276
241	5 80 81	15 5241717	4149378	291	8 46 81	17 0587221	3436426
242	5 85 64	15 5563492	4132231	292	8 52 64	17 0880075	3424658
243	5 90 49	15 5884573	4115226	293	8 58 49	17 1172429	3412969
244	5 95 36	15 6204994	4098361	294	8 64 36	17 1464282	3401361
245	6 00 25	15 6524758	4081633	295	8 70 25	17 1755640	3389831
246	6 05 16	15 6843971	4065041	296	8 76 16	17 2046505	3378378
247	6 10 09	15 7162336	4048583	297	8 82 09	17 2336879	3367003
248	6 15 04	15 7480157	4032258	298	8 88 04	17 2626765	3355705
249	6 20 01	15 7797338	4016064	299	8 94 01	17 2916165	3344482
250	6 25 00	15 8113853	4000000	300	9 00 00	17 3205081	3333333

संख्या	वर्ग	वर्गसूचक	संख्या	वर्ग	वर्गसूचक	संख्या	वर्ग	वर्गसूचक
301	9 2 2 0 2	17 3 1 2 1 0 6	351	12 12 0 1	18 7 4 7 0 1 0	351	12 12 0 1	18 7 4 7 0 1 0
302	9 12 0 1	17 3 1 2 1 0 6	352	12 29 0 1	18 7 6 1 0 6 3 0	352	12 29 0 1	18 7 6 1 0 6 3 0
303	9 15 0 9	17 4 0 0 5 9 0 2	353	12 46 0 9	18 7 6 5 2 0 1 2	353	12 46 0 9	18 7 6 5 2 0 1 2
304	9 24 1 6	17 4 3 5 9 5 5 9	354	12 53 1 6	18 8 1 4 5 8 7 7	354	12 53 1 6	18 8 1 4 5 8 7 7
305	9 30 2 5	17 4 6 1 2 1 0 2	355	12 60 2 5	18 8 1 4 4 3 3 7	355	12 60 2 5	18 8 1 4 4 3 3 7
306	9 36 3 6	17 4 9 2 5 0 0 7	356	12 67 3 6	18 8 2 2 9 0 2 3	356	12 67 3 6	18 8 2 2 9 0 2 3
307	9 42 4 4	17 5 2 1 5 1 5 5	357	12 74 4 9	18 8 2 4 4 1 3 6	357	12 74 4 9	18 8 2 4 4 1 3 6
308	9 48 0 4	17 5 4 9 0 0 4 3	358	12 81 0 4	18 8 2 5 5 7 9	358	12 81 0 4	18 8 2 5 5 7 9
309	9 54 8 1	17 5 7 6 3 0 5 3	359	12 88 5 1	18 8 2 6 6 3	359	12 88 5 1	18 8 2 6 6 3
310	9 61 0 0	17 6 0 6 1 1 6 9	360	12 96 0 0	18 8 2 6 6 6 0	360	12 96 0 0	18 8 2 6 6 6 0
311	9 67 2 1	17 6 3 1 1 1 2 1	361	13 03 2 1	19 0 0 0 0 0 0 0	361	13 03 2 1	19 0 0 0 0 0 0 0
312	9 73 4 4	17 6 6 0 0 2 1 7	362	13 10 4 1	19 0 2 1 9 7 6	362	13 10 4 1	19 0 2 1 9 7 6
313	9 79 0 9	17 6 9 1 0 6 6 0	363	13 17 7 0	19 0 5 2 5 9 9	363	13 17 7 0	19 0 5 2 5 9 9
314	9 85 0 6	17 7 2 0 0 1 1 1	364	13 24 7 0	19 0 7 3 4 6 0	364	13 24 7 0	19 0 7 3 4 6 0
315	9 92 2 5	17 7 4 9 2 3 7 3	365	13 32 5 5	19 0 9 4 0 3 2	365	13 32 5 5	19 0 9 4 0 3 2
316	9 99 5 0	17 7 7 6 3 5 5 5	366	13 39 5 6	19 1 1 4 2 5 5	366	13 39 5 6	19 1 1 4 2 5 5
317	10 01 8 3	17 8 0 4 1 0 0 4	367	13 46 5 9	19 1 3 4 3 4 1	367	13 46 5 9	19 1 3 4 3 4 1
318	10 08 2 8	17 8 3 2 1 0 0 0	368	13 54 2 1	19 1 5 4 5 2 4	368	13 54 2 1	19 1 5 4 5 2 4
319	10 15 0 1	17 8 6 0 5 1 5 1	369	13 61 6 1	19 1 7 4 6 3 7	369	13 61 6 1	19 1 7 4 6 3 7
320	10 21 0 7	17 8 8 8 4 1 5 1	370	13 69 0 1	19 1 9 4 7 4 1	370	13 69 0 1	19 1 9 4 7 4 1
321	10 28 4 1	17 9 1 6 3 2 9 3	371	13 76 4 1	19 2 1 4 8 5 5	371	13 76 4 1	19 2 1 4 8 5 5
322	10 36 8 4	17 9 4 4 5 5 4 4	372	13 83 8 4	19 2 3 4 9 6 9	372	13 83 8 4	19 2 3 4 9 6 9
323	10 43 2 2	17 9 7 2 8 0 7 8	373	13 91 2 4	19 2 5 5 0 8 3	373	13 91 2 4	19 2 5 5 0 8 3
324	10 49 7 6	18 0 0 0 0 1 0 0	374	13 98 7 6	19 2 7 5 1 9 7	374	13 98 7 6	19 2 7 5 1 9 7
325	10 56 2 5	18 0 2 7 7 5 0 4	375	14 06 2 5	19 2 9 5 3 1 1	375	14 06 2 5	19 2 9 5 3 1 1
326	10 63 7 0	18 0 5 5 4 7 0 1	376	14 13 7 0	19 3 1 5 4 2 5	376	14 13 7 0	19 3 1 5 4 2 5
327	10 70 2 9	18 0 8 3 1 9 1 3	377	14 21 2 9	19 3 3 5 5 3 9	377	14 21 2 9	19 3 3 5 5 3 9
328	10 75 5 4	18 1 1 0 7 7 0 3	378	14 28 5 4	19 3 5 5 6 5 3	378	14 28 5 4	19 3 5 5 6 5 3
329	10 82 4 1	18 1 3 8 5 1 5 1	379	14 36 4 1	19 3 7 5 7 6 7	379	14 36 4 1	19 3 7 5 7 6 7
330	10 89 0 0	18 1 6 6 0 0 0 1	380	14 44 0 0	19 3 9 5 8 8 1	380	14 44 0 0	19 3 9 5 8 8 1
331	10 95 0 1	18 1 9 3 1 0 0 1	381	14 51 0 1	19 4 1 5 9 9 5	381	14 51 0 1	19 4 1 5 9 9 5
332	11 02 2 1	18 2 2 0 1 6 7 2	382	14 58 2 1	19 4 3 6 1 0 9	382	14 58 2 1	19 4 3 6 1 0 9
333	11 08 5 9	18 2 4 8 2 5 7 6	383	15 06 5 9	19 4 5 6 2 2 3	383	15 06 5 9	19 4 5 6 2 2 3
334	11 15 7 0	18 2 7 6 3 4 7 9	384	15 14 7 0	19 4 7 6 3 3 7	384	15 14 7 0	19 4 7 6 3 3 7
335	11 22 2 5	18 3 0 4 4 3 8 2	385	15 22 2 5	19 4 9 6 4 5 1	385	15 22 2 5	19 4 9 6 4 5 1
336	11 28 0 6	18 3 3 2 5 2 8 5	386	15 30 0 6	19 5 1 6 5 6 5	386	15 30 0 6	19 5 1 6 5 6 5
337	11 35 0 9	18 3 6 0 6 1 8 8	387	15 37 0 9	19 5 3 6 6 7 9	387	15 37 0 9	19 5 3 6 6 7 9
338	11 42 4 4	18 3 8 8 7 0 9 1	388	15 45 4 4	19 5 5 6 7 9 3	388	15 45 4 4	19 5 5 6 7 9 3
339	11 49 2 1	18 4 1 6 7 9 0 4	389	15 53 2 1	19 5 7 6 9 0 7	389	15 53 2 1	19 5 7 6 9 0 7
340	11 56 0 0	18 4 4 4 8 8 1 7	390	16 01 0 0	19 5 9 7 0 2 1	390	16 01 0 0	19 5 9 7 0 2 1
341	11 62 8 1	18 4 7 2 9 7 2 0	391	16 08 8 1	19 6 1 7 1 3 5	391	16 08 8 1	19 6 1 7 1 3 5
342	11 69 6 1	18 5 0 1 0 6 3 3	392	16 16 6 1	19 6 3 7 2 4 9	392	16 16 6 1	19 6 3 7 2 4 9
343	11 76 4 9	18 5 2 9 1 5 3 6	393	16 24 4 9	19 6 5 7 3 6 3	393	16 24 4 9	19 6 5 7 3 6 3
344	11 83 3 6	18 5 5 7 2 4 3 9	394	16 32 3 6	19 6 7 7 4 7 7	394	16 32 3 6	19 6 7 7 4 7 7
345	11 90 2 5	18 5 8 5 3 3 4 2	395	16 40 2 5	19 6 9 7 5 9 1	395	16 40 2 5	19 6 9 7 5 9 1
346	11 97 1 0	18 6 1 3 4 2 4 5	396	16 48 1 0	19 7 1 7 7 0 5	396	16 48 1 0	19 7 1 7 7 0 5
347	12 04 0 3	18 6 4 1 5 1 4 8	397	16 56 0 3	19 7 3 7 8 1 9	397	16 56 0 3	19 7 3 7 8 1 9
348	12 11 0 1	18 6 6 9 6 0 5 1	398	17 04 0 1	19 7 5 7 9 3 3	398	17 04 0 1	19 7 5 7 9 3 3
349	12 18 0 1	18 6 9 7 6 9 5 4	399	17 12 0 1	19 7 7 8 0 4 7	399	17 12 0 1	19 7 7 8 0 4 7
350	12 25 0 0	18 7 2 5 7 8 6 7	400	17 20 0 0	19 7 9 8 1 6 1	400	17 20 0 0	19 7 9 8 1 6 1

संख्या	वर्ष	वर्ग	मूल्य	संख्या	वर्ष	वर्ग	मूल्य	
401	16 03 01	20	0249844	2193766	451	20 34 01	21 2367606	2217295
402	16 16 04	20	0199177	2157562	452	20 43 04	21 2602916	2212359
403	16 24 09	20	0749599	2491390	453	20 44 09	21 2837967	2207506
404	16 32 16	20	0997512	2475248	454	20 61 16	21 3072758	2202643
405	16 40 25	20	1246118	2469136	455	20 70 25	21 3307290	2197502
406	16 48 36	20	1494117	2463054	456	20 79 36	21 3541565	2192982
407	16 56 49	20	1742410	2457002	457	20 88 40	21 3775583	2188184
408	16 64 64	20	1990099	2450050	458	20 97 64	21 4009346	2183406
409	16 73 81	20	2237454	2444988	459	21 06 81	21 4242853	2178649
410	16 81 00	20	2494567	2439024	460	21 16 00	21 4478106	2173013
411	16 89 21	20	2731349	2433090	461	21 25 21	21 4709100	2169197
412	16 97 44	20	2977631	2427184	462	21 34 44	21 4941683	2164502
413	17 05 69	20	3224014	2421308	463	21 43 69	21 5174349	2159827
414	17 13 96	20	3469599	2415459	464	21 52 96	21 5406592	2155172
415	17 22 25	20	3715493	2409639	465	21 62 25	21 5638587	2150535
416	17 30 56	20	3960781	2403846	466	21 71 56	21 5870331	2145923
417	17 38 89	20	4205779	2398052	467	21 80 89	21 6101823	2141328
418	17 47 24	20	4450493	2392244	468	21 90 24	21 6333077	2136752
419	17 55 61	20	4694693	2386435	469	21 99 61	21 6564078	2132106
420	17 64 00	20	4939045	2380623	470	22 09 00	21 6794834	2127660
421	17 72 41	20	5182845	2375297	471	22 18 41	21 7025344	2123142
422	17 80 84	20	5426356	2369668	472	22 27 84	21 7255810	2118641
423	17 89 29	20	5669639	2364006	473	22 37 29	21 7486532	2114165
424	17 97 76	20	5912603	2358191	474	22 46 76	21 7715411	2109705
425	18 06 25	20	6155281	2352941	475	22 56 25	21 7944947	2105263
426	18 14 76	20	6397674	2347418	476	22 65 76	21 8174242	2100940
427	18 23 29	20	6639783	2341920	477	22 75 29	21 8403297	2096436
428	18 31 84	20	6881609	2336449	478	22 84 81	21 8632111	2092050
429	18 40 41	20	7123152	2331002	479	22 94 41	21 8860686	2087663
430	18 49 00	20	7364414	2325591	480	23 04 00	21 9089023	2083333
431	18 57 61	20	7605395	2320156	481	23 13 61	21 9317122	2079002
432	18 66 24	20	7846097	2314815	482	23 23 24	21 9544984	2074689
433	18 74 89	20	8086520	2309469	483	23 32 89	21 9772610	2070393
434	18 83 56	20	8326667	2304147	484	23 42 56	22 0000000	2066116
435	18 92 25	20	8566536	2298851	485	23 52 25	22 0227155	2061856
436	19 00 96	20	8806130	2293578	486	23 61 96	22 0454077	2057613
437	19 09 19	20	9045450	2288330	487	23 71 09	22 0680765	2053348
438	19 18 44	20	9284495	2283105	488	23 81 41	22 0907220	2049180
439	19 27 21	20	9523268	2277904	489	23 91 21	22 1133441	2044990
440	19 36 00	20	9761770	2272727	490	24 01 00	22 1359436	2040816
441	19 44 81	21	0000000	2267574	491	24 10 81	22 1585193	2036660
442	19 53 64	21	0237960	2262443	492	24 20 61	22 1810730	2032520
443	19 62 49	21	0475652	2257336	493	24 30 49	22 2036883	2028398
444	19 71 36	21	0713075	2252252	494	24 40 36	22 2261108	2024201
445	19 80 25	21	0950231	2247191	495	24 50 25	22 2485055	2020002
446	19 89 16	21	1187121	2242152	496	24 60 16	22 2710575	2016129
447	19 98 09	21	1423745	2237136	497	24 70 09	22 2934963	2012072
448	20 07 04	21	1660105	2232143	498	24 80 04	22 3159136	2008032
449	20 16 01	21	1898201	2227171	499	24 90 01	22 3383079	2004005
450	20 25 00	21	2132034	2222222	500	25 00 00	22 3606798	2000000

परिशिष्ट घ

क्रमांक	वर्ग	वर्गमूल	व्यक्तिक को	क्रमांक	वर्ग	वर्गमूल	व्यक्तिक को
501	25 10 01	22 330293	1946009	551	30 36 01	23 4733892	1814982
502	25 20 04	22 403345	1942012	552	30 17 04	23 4946802	1811594
503	25 20 03	22 4270615	1948002	553	30 58 09	23 5159520	1803318
504	25 40 18	22 4193417	1944127	554	30 09 16	23 5372046	1805054
505	25 50 25	22 4722051	1940118	555	30 80 25	23 5581350	1801803
506	25 60 36	22 4941433	1946285	556	30 91 36	23 5796522	1798561
507	25 70 19	22 5166005	1942387	557	31 02 49	23 6003474	1795332
508	25 80 64	22 5385511	1945501	558	31 13 61	23 6220236	1792115
509	25 90 81	22 5610283	1946437	559	31 24 81	23 6431508	1788909
510	26 01 00	22 5831795	1960781	560	31 36 00	23 6643191	1785714
511	26 11 21	22 6053091	1950947	561	31 47 21	23 6854386	1782531
512	26 21 41	22 6274170	1953125	562	31 58 41	23 7065792	1779339
513	26 31 59	22 6495033	1949319	563	31 69 09	23 7276210	1776199
514	26 41 96	22 6715691	1945525	564	31 80 96	23 7496842	1773050
515	26 52 25	22 6930114	1941748	565	31 92 25	23 7697256	1769912
516	26 62 56	22 7156334	1937984	566	32 03 66	23 7907545	1766784
517	26 72 59	22 7370340	1934216	567	32 14 89	23 8117618	1763605
518	26 83 24	22 7596134	1930002	568	32 26 24	23 8327500	1760463
519	26 93 61	22 7815715	1926782	569	32 37 61	23 8537209	1757469
520	27 04 00	22 8035055	1923077	570	32 49 00	23 8746728	1754386
521	27 14 41	22 8254211	1919356	571	32 60 41	23 8956003	1751313
522	27 24 54	22 8473197	1915709	572	32 71 84	23 9165215	1748252
523	27 35 29	22 8691931	1912016	573	32 83 29	23 9374184	1745201
524	27 45 76	22 8910463	1908397	574	32 94 76	23 9582971	1742160
525	27 56 25	22 9129785	1904762	575	33 06 25	23 9791576	1739130
526	27 66 76	22 9348590	1901141	576	33 17 76	23 0000000	1736111
527	27 77 29	22 9567406	1897533	577	33 29 29	23 0208243	1733102
528	27 87 81	22 9786206	1893930	578	33 40 84	23 0416308	1730104
529	27 98 41	23 0005000	1890352	579	33 52 41	23 0624189	1727116
530	28 09 00	23 0217259	1886792	580	33 64 00	23 0831991	1724138
531	28 19 61	23 0431372	1883239	581	33 75 61	23 1039416	1721170
532	28 30 21	23 0641252	1879699	582	33 87 21	23 1246762	1718213
533	28 40 83	23 0857028	1876173	583	33 98 89	23 1453929	1715266
534	28 51 46	23 1064400	1872659	584	34 10 56	23 1660919	1712329
535	28 62 25	23 1270770	1869159	585	34 22 25	23 1867732	1709402
536	28 72 90	23 1476725	1865672	586	34 33 96	23 2074369	1706486
537	28 83 69	23 1682605	1862197	587	34 45 69	23 2280929	1703578
538	28 94 44	23 1888736	1858736	588	34 57 44	23 2487113	1700650
539	29 05 21	23 2094735	1855288	589	34 69 21	23 2693222	1697783
540	29 16 00	23 2299001	1851852	590	34 81 00	23 2899150	1694915
541	29 26 81	23 2504067	1848429	591	34 92 81	23 3104916	1692047
542	29 37 04	23 2709035	1845018	592	35 04 64	23 3310501	1689189
543	29 48 49	23 2914011	1841621	593	35 16 49	23 3515913	1686341
544	29 59 36	23 3119076	1838235	594	35 28 36	23 3721152	1683502
545	29 70 25	23 3324351	1834862	595	35 40 25	23 3926218	1680672
546	29 81 16	23 3529429	1831502	596	35 52 16	23 4131112	1677852
547	29 92 04	23 3734511	1828154	597	35 64 09	23 4335834	1675042
548	30 03 04	23 3939998	1824818	598	35 76 04	23 4540385	1672231
549	30 14 01	23 4145490	1821494	599	35 88 01	23 4744765	1669449
550	30 25 00	23 4350783	1818182	600	36 00 00	23 4948974	1666667

क्र.सं.	वर्ग	वर्गसूचक	प्र.सं.	क्र.सं.	वर्ग	वर्गसूचक	प्र.सं.
601	38 1 01	21 513013	106394	651	42 29 01	25 514 010	136008
602	36 21 01	21 53 5 3	1061130	652	42 1 04	25 531 907	1533 42
603	36 6 07	21 550053	1653 3	653	42 61 09	25 5525647	1531391
604	36 49 10	21 5 61113	16 5679	654	42 77 16	25 5 31237	159052
605	36 60 21	21 57 4 5	16 533	655	42 90 3	25 59 90 8	15 6 18
606	36 72 36	21 61 06 3	16 010	656	43 03 36	25 6121033	15 1390
607	36 94 49	21 63 3 00	164 410	657	43 16 42	25 63 0112	15 0 0
608	36 36 61	21 63 6 9	161 57	658	43 29 61	25 63 1107	1510757
609	37 03 61	21 67 9 31	164 036	659	43 4 81	25 6 00933	151 451
610	37 21 00	21 69 1 61	16 9 14	660	43 56 00	25 690400	1515152
611	37 33 21	21 14114	16 061	661	43 63 21	25 699 035	151 509
612	3 4 41	21 33635	16359 7	662	43 8 44	25 29300	15100 4
613	37 5 60	21 5 1 9	16313 1	663	43 20 09	25 745 01	1509 06
614	37 19 96	21 11 31	16 5 61	664	44 09 36	25 615 0	1 00 4
615	3 8 25	21 9 1 30	16 0016	665	44 2 3	25 6 0330	15 3 20
616	37 94 56	21 61931 3	16 33 7	666	41 30 56	25 309 38	1501 02
617	38 06 59	21 53454	16 0 46	667	41 48 31	25 5 3131	149 50
618	38 19 24	21 5 003	16151 3	668	41 6 24	25 8400360	149 006
619	38 31 61	21 5 9 106	161 509	669	41 50 61	25 80 0343	1494 08
620	38 44 00	21 500 907	161 273	670	41 59 00	25 841 8	149 337
621	38 56 41	21 5195 16	1610300	671	42 0 41	25 90000 7	1490313
622	38 68 54	21 9399 3	160 17	672	45 15 84	25 9 9 3	1489025
623	38 81 29	21 9 096 9	160 136	673	45 3 30	25 94 435	14 554
624	38 93 6	21 9 309 0	160 304	674	45 42 76	25 9010100	1483680
625	39 06 20	2 0009090	16 0000	675	45 50 20	25 950 61	1481491
626	39 19 6	2 01 9	16 0 44	676	45 69 6	25 9000000	14 0290
627	39 31 29	2 03 903	1 94590	677	45 83 29	25 019 737	14 105
628	39 43 84	2 05 9 3	1 9 3 7	678	45 96 54	25 0354331	14 40 8
629	39 56 11	2 0 95 4	1 89 0	679	46 10 41	25 0 8 31	14 2 54
630	39 69 00	2 09 95008	1 87 0	680	46 24 00	25 0 68096	14 0053
631	39 81 61	2 110 134	1551 86	681	46 37 61	25 090 07	14684 99
632	39 91 21	2 13 6109	154 9 9	682	46 51 24	25 11 1 07	1466 8
633	40 06 59	2 15 1913	154 97 9	683	46 64 59	25 131 057	14641 9
634	40 19 6	2 1 9 66	1 2 7	684	46 78 56	25 13303	14 1955
635	40 3 3	2 1 1 3	1 4503	685	46 9 3	25 1 017	14 0504
636	40 41 06	2 1 10101	1 23 1	686	47 03 90	25 101001	115 20
637	40 5 69	2 2 539	1 60539	687	47 19 69	25 106 43	14 5604
638	40 19 11	2 3 1613	1 6 798	688	47 33 44	25 1 3 11	14 3458
639	40 30 1	2 3 5149	1501910	689	47 47 21	25 1485090	14 513 9
640	40 46 00	2 5 095 13	1 6 500	690	47 61 00	25 26 5 11	1440 5
641	41 05 51	2 5 31 9 8	1 6 00	691	47 74 51	25 2955 99	144 1 8
642	41 21 61	2 5 43 159	1 6 600	692	47 88 64	25 3055990	144 057
643	41 34 49	2 5 44 47	1 6 5 10	693	48 0 42	25 3 45293	144 3001
644	41 4 36	2 5 15 1	1 6 90	694	48 16 39	25 3475 97	144 0 2
645	41 60 3	2 5 365502	1 6 3358	695	48 30 20	25 36 5027	143 5510
646	41 31 6	2 5 41 3 11	151 958	696	48 44 16	25 3811119	143 5 1
647	41 11 03	2 5 43 1 1	1 1 9	697	48 58 09	25 401 5 0	1434 0
648	41 23 04	2 5 44 141	151 10	698	49 72 04	25 4196500	143 000
649	41 4 71	2 5 4 1 54	151053	699	49 86 01	25 4356001	143 0015
650	41 50	2 5 4 003 6	151 302	700	49 00 00	25 45 5131	14250 1

परिशिष्ट थ

नकाशा	वर्ग	समूह	व्य. क्रम	नकाशा	वर्ग	समूह	व्य. क्रम
701	49 11 01	26 4 6401	147634	71	56 40 01	27 4043792	1331558
702	49 10 04	26 19 7 6	1471 01	72	56 3 04	27 4776154	1329787
703	49 17 09	26 51114 2	1471 1 3	73	56 0 09	27 41094 3	1328021
704	49 0 16	26 5379953	1470155	74	56 85 16	27 4590004	1372650
705	49 0 73	26 5 17311	1415410	75	00 73	27 1 63	1374003
706	49 81 36	26 3 0000	1116431	76	57 15 36	27 450142	1372 51
707	49 08 49	26 5501716	1411177	77	30 49	27 5136330	1721004
708	50 12 61	26 608 691	141 129	78	57 45 61	27 521 998	1319261
709	50 20 81	26 6 8 3	1410437	79	00 51	27 5199346	1317523
710	50 41 00	26 61 8 3	1408451	80	76 00	27 5650975	1315789
711	50 5 71	26 661 833	11061 0	81	91 21	27 596 34	1314060
712	50 09 44	26 6533251	1401194	82	00 64	27 6013473	1317338
713	50 83 09	26 070 98	1407073	83	58 71 69	27 6774046	1310616
714	50 9 97	26 720 74	1400000	84	936 96	27 690499	1305901
715	51 17 23	26 394539	1395601	85	58 22 23	27 6083334	130 190
716	51 20 50	26 7051 63	1396648	86	58 67 56	27 6 6 000	130483
717	51 40 50	26 6507	1501 63	87	58 62 59	27 694 645	1303 81
718	51 50 71	26 905 0	139 98	88	58 98 24	27 71 5179	1307053
719	51 09 61	26 8151 31	1300571	89	59 13 61	27 7305497	1300390
720	51 51 00	26 85 517	1355550	90	59 70 00	27 745730	1295 01
721	51 03 41	26 8514132	1356963	91	59 44 41	27 605968	129 017
722	51 18 84	26 8 00577	135017	92	9 50 84	27 7815580	1293537
723	51 7 70	26 85093	1351 6	93	59 75 20	27 8078775	1293661
724	51 41 6	26 90 2181	1351 15	94	59 00 6	27 8205553	1291990
725	51 50 73	26 070740	13 410	95	60 06 25	27 835818	1290323
726	51 0 0	26 04438 7	13 410	96	60 21 6	27 8 6 00	1288560
727	51 85 29	26 96793 5	13 416	97	60 37 29	27 8 47107	128 001
728	51 09 84	26 9814751	13 3676	98	60 52 84	27 8970514	1285347
729	51 14 41	26 0000000	13 1 47	99	60 63 41	27 9107115	1283697
730	51 29 00	27 0185122	1305503	100	60 84 00	27 9234501	1282051
731	51 43 01	27 0370117	1367959	101	60 99 61	27 9463772	1280410
732	51 55 21	27 0370117	1366120	102	61 15 21	27 9647679	12 8772
733	51 28 89	27 0 39 27	1364206	103	61 30 89	27 9871372	1277139
734	51 87 56	27 0974314	1367393	104	61 46 56	28 0000000	1275510
735	51 0 75	27 1105544	1360114	105	61 62 23	28 01 8515	12 3885
736	51 16 96	27 1293199	1358606	106	61 7 96	28 0300915	1272265
737	51 31 09	27 14 7439	1356052	107	61 93 69	28 0535707	1270648
738	51 40 44	27 1661851	1350014	108	62 09 41	28 0 133 7	1269038
739	51 61 21	27 1845544	1353180	109	62 25 21	28 0501433	126 127
740	51 60 00	27 2074110	1351351	110	62 41 00	28 1069358	1265823
741	51 90 51	27 2713152	1349523	111	62 56 51	28 124 73	1264723
742	51 00 64	27 2396 69	1347 09	112	62 72 64	28 1429406	1262626
743	51 20 49	27 2507063	134895	113	62 88 49	28 1607070	1261004
744	51 3 30	27 2 63634	1344056	114	63 01 35	28 1 80030	1259416
745	51 50 23	27 2946831	1342282	115	63 20 25	28 1957444	125 882
746	51 65 16	27 3130006	1340453	116	63 36 16	28 2134720	1256281
747	51 80 03	27 3315007	1338688	117	63 57 09	28 2311534	1254705
748	51 90 04	27 3495837	1336839	118	63 69 04	28 2485033	1253173
749	51 10 01	27 3678644	1335113	119	63 84 01	28 2665581	1251564
750	51 20 00	27 38612 9	1333331	120	64 00 00	28 2842712	1250000

संख्या	वय	वयमूल	सं. क्रम	सं. क्रम	वय	वयमूल	सं. क्रम
901	२१ १५ ०१	३० ०१६६६२०	११०९५ ८	९५१	९० ४४ ०१	३० ९३८९९९	१०५१५२५
९०२	२१ ३६ ०४	३० ०३३३१४९	११०६०४७	९५२	९० ६३ ०४	३० ९३४४९२	१०५०४२०
९०३	२१ ५४ ०९	३० ०४९९०९१	११० ४९०	९५३	९० ६२ ०९	३० ९३०६९८१	१०४९३१८
९०४	२१ २२ १६	३० ०६६९९९९	११०६१३५	९५४	२१ ०१ १६	३० ९३६८००४	१०५१९१८
९०५	२१ २० २३	३० ०६३२१ ९	११०४९ २	९५५	२१ २० २३	३० ९३०३०७३	१०४७१२०
९०६	२२ ०३ ३६	३० ०९९९३३९	११०३ ३	९५६	२१ ३९ ३६	३० ९१९२४९७	१०४००३५
९०७	२२ २६ ४९	३० ११६४४०७	११०७५३६	९५७	२१ ३८ ४९	३० ९३५४१६६	१०४४०३२
९०८	२२ ४४ ६४	३० १३०३५५३	११०१३२२	९५८	२१ ७ ६४	३० ९३५५५५१	१०४३९४१
९०९	२२ ६२ ६१	३० १४९६ ६९	११००११०	९५९	२१ ९६ ६१	३० ९६७ २५१	१०४२ ५३
९१०	२२ ६१ ००	३० १६६९०६३	१०९९००१	९६०	२१ १६ ००	३० ९३९६६६८	१०४१६६७
९११	२२ ६९ २१	३० १८२७ २५	१०९ ६३३	९६१	२१ ३५ २१	३१ ००९००००	१०४०३९३
९१२	२३ १७ ४४	३० १९९३३ ७	१०९६१९१	९६२	२२ ५४ ४४	३१ ०१०१४८	१०३९५०१
९१३	२३ ३५ ६९	३० २१५५३०९	१०९५९०	९६३	२२ ३५ ६९	३१ ०३९९११३	१०३९४२२
९१४	२३ ३३ ०६	३० २३२१३ ९	१०९४०९७	९६४	२३ ०७ ०६	३१ ०४९३१९४	१०३ ३४४
९१५	२३ २ २३	३० २४५९०६९	१०९३५३६	९६५	२३ १ २३	३१ ०५४४४४१	१०३६२६९
९१६	२३ २० ५६	३० २६५४९१९	१०९१७०३	९६६	२३ ३१ ५६	३१ ०६०५५०३	१०३५१९७
९१७	२४ ०३ ६९	३० २८५०० ९	१०९०५१३	९६७	२३ ५० ६९	३१ ०७०६ ३०	१०३४१२०
९१८	२४ २७ २४	३० २९५५१४५	१०९९३२५	९६८	२३ ७० २४	३१ ११२०९५४	१०३००५९
९१९	२४ ४५ ६१	३० ३१५०१९३	१०८८१३९	९६९	२४ ६९ ६१	३१ १२८ ६४९	१०३१९९२
९२०	२४ ६४ ००	३० ३३१५०१३	१०८९०३३	९७०	२४ ०७ ००	३१ १४१६३००	१०३०९७९
९२१	२४ ६६ ४१	३० ३४९६१८	१०८९ ८	९७१	२४ २४ ४१	३१ १६०९२९	१०२९०६६
९२२	२५ ०० ८४	३० ३६४५५९९	१०८४५७९	९७२	२४ ४७ ८४	३१ १७६९१४५	१०२९००७
९२३	२५ १९ २९	३० ३८०९१५१	१०८३४ ४	९७३	२४ ६७ २९	३१ १८७९१ ९	१० ४९
९२४	२५ ३७ ७६	३० ३९ ३६३३	१०८ १	९७४	२४ ८६ ७६	३१ २०६९ ३१	१० ४०३४
९२५	२५ ५६ २३	३० ४१३५१२७	१०८१०९१	९७५	२५ ०६ २३	३१ २२४९९००	१०३०६४१
९२६	२५ ४ ६	३० ४३० ३५२	१० ७१४	९७६	२५ २५ ७६	३१ २४०९० ७	१० १५९०
९२७	२५ २५ २९	३० ४४६७७४७	१० ५ ४९	९७७	२५ ४५ २९	३१ २५०९३३९	१० ३५४१
९२८	२६ ११ ८४	३० ४६३०७७४	१०७५५६६	९७८	२५ ६४ ८४	३१ २ २९०१५	१०३१४९५
९२९	२६ ३० ४१	३० ४ ९५०१३	१० ६४७६	९७९	२६ ८४ ४१	३१ २५५० ६	१०२१४५०
९३०	२६ ४९ ००	३० ४९०९०१४	१०७३०७९	९८०	२६ ०४ ००	३१ ३०१९५१७	१०२०१०८
९३१	२६ ६७ ६१	३० ५१९९०७८	१०७४११४	९८१	२६ २३ ६१	३१ ३००९१९५	१०१९३६८
९३२	२६ ८६ २४	३० ५९९६ ००	१०७९०६१	९८२	२६ ४३ २४	३१ ३१८९ ९१	१०१८३३०
९३३	२७ ०४ ६९	३० ६४५०४९७	१०७१८११	९८३	२६ ६२ ६९	३१ ३५ ९३०८	१०१ २९४
९३४	२७ २३ ५६	३० ६६४४३३६	१०७०६६४	९८४	२६ ८२ ५६	३१ ३६८७७४३	१०१६२६०
९३५	२७ ४२ २३	३० ६ ७ ६९७	१०६९०३९	९८५	२७ ०२ २३	३१ ३९४ ०९७	१०१७२२८
९३६	२७ ६० ००	३० ६९४११७१	१०६८३७६	९८६	२७ २१ ९६	३१ ४००६३६९	१०१११९९
९३७	२७ ७९ ०९	३० ८१०४५५७	१०६ २७६	९८७	२७ ४१ ६९	३१ ४१६ ०६१	१०१३१७१
९३८	२७ ९४ ४४	३० ८२६ ५५७	१०६६०३९	९८८	२७ ६१ ४४	३१ ४३ १६ ३	१०१ १४६
९३९	२८ १७ २१	३० ८४३१०६९	१०६४९६३	९८९	२७ ८१ २१	३१ ४४३१ ६४	१०१११२२
९४०	२८ ३६ ००	३० ८५९४१०१	१०६३९३०	९९०	२८ ०१ ००	३१ ४६४७६३४	१०१०१०१
९४१	२८ ५४ ९१	३० ८ ७ ३३	१०६ ६०९	९९१	२८ ०८ ९१	३१ ४८०१५७५	१००९०९२
९४२	२८ ७३ ६४	३० ८७ ०१५५	१०६५५ १	९९२	२८ २४ ६४	३१ ४९०३१५	१००९०६५
९४३	२८ ९२ ४०	३० ८९३१०६१	१०६०४१५	९९३	२८ ६० ४०	३१ ५११०७५	१०० ०१९
९४४	२९ ११ ४६	३० ९२५३३०	१० ३	९९४	२८ ८० ३६	३१ ५ ३०७८	१००००३६
९४५	२९ ३० ७५	३० ९४५३ ३	१०५५ ०१	९९५	२९ ०० ७५	३१ ५४५६३०६	१००५०२५
९४६	२९ ४९ १६	३० ९६११३०	१० ०५७	९९६	२९ २० १६	३१ ५६०४६७७	१००४०१६
९४७	२९ ६८ ०९	३० ९७३३६१	१०५३००६	९९७	२९ ४० ०९	३१ ५७३०७८	१००३००९
९४८	२९ ८७ ०४	३० ९८००५६	१०५४६५२	९९८	२९ ६० ०४	३१ ५९११३९०	१०००००४
९४९	३० ०६ ०१	३० ९९५८४५६	१०५३७४१	९९९	३० ०६ ०१	३१ ६०९९६१३	१००१००१
९५०	३० २५ ००	३० ९९७० ००	१०५७६३९	१०००	३० २५ ००	३१ ६२२७७६	१००००००

परिशिष्ट द

संख्याओं के साधारण लघुगणक

किसी संख्या (सारणी में N) का प्रामाण्य लघुगणक वह घात है जिस तब N प्राप्त करने के लिए 10 को अवश्य बढ़ाया जाना चाहिए। 'प्रामाण्य' विशेषण यह सूचित करता है कि लघुगणक किसी दूसरे आधार की अपेक्षा आधार 10 के प्रति है — उदाहरण के लिए, $e = 2.71828$, जो 'प्राकृतिक लघुगणक' का आधार है। जब किसी विशेषण के बिना शब्द 'लघुगणक' शब्द का प्रयोग किया जाता है, तो सामान्यतया यह समझा जाता है कि लघुगणक से प्रामाण्य लघुगणक अभिप्रेत है। लघुगणक दो भागों से बनता है — (1) पूर्णांक, तथा (2) अपूर्णांक।

पूर्णांक हमेशा पूर्ण संख्या या शून्य होता है और इसका निर्धारण निम्न नियम से किया जाता है

यदि $N \geq 1$, तो पूर्णांक धनात्मक होता है और इसका मान N के उन अंकों की संख्या से एक कम होता है, जो दशमलव बिन्दु के बाईं ओर होते हैं। उदाहरणार्थ,

N	पूर्णांक
4568	3
456.8	2
45.68	1
4.568	0

यदि $N < 1$, तो पूर्णांक ऋणात्मक होता है, और इसका मान दशमलव बिन्दु के ठीक बाईं ओर के शून्यों की संख्या से एक अधिक होता है। उदाहरणार्थ,

N	पूर्णांक
0.4568	-1 या 9-10
0.04568	-2 या 8-10
0.004568	-3 या 7-10
0.0004568	-4 या 6-10

अपूर्णांक हमेशा दशमलव या शून्य होता है। यह बेंची सारणी से प्राप्त होता है जो यहाँ दी जा रही है। अंका के किसी भी दिए हुए समुच्चय के लिए अपूर्णांक एक ही होता है, भले ही दशमलव बिन्दु किसी भी स्थान पर क्यों न लगा दिया जाए। इस प्रकार, अभी जो पाठ N दिये गये हैं, उन सबका अपूर्णांक 0.659726 है।

पूर्णांक तथा अपूर्णांक का एकत्र करन से लघुगणक प्राप्त होता है। N के ऊपर दिये हुए पाठ मानों के लिए,

N	लघुगणक
4568	3.659726
456.8	2.659726
45.68	1.659726
4.568	0.659726
0.4568	9.659726-10
0.04568	8.659726-10
0.004568	7.659726-10
0.0004568	6.659726-10

N		1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
100	000000	000834	000868	001301	0017 4	002166	00 398	0030 9	003461	003891	432
1	43 1	4751	5181	5609	6038	6466	6894	7321	7748	8174	428
2	8600	90 6	9451	98 6	010300	010724	011147	011570	011993	012415	424
3	01 837	013259	013682	014100	4521	4340	5360	5779	6 97	6616	420
4	7033	7451	7868	8284	8700	9116	9532	9947	020361	020775	416
105	0 1189	0 1603	0.2016	0.24 8	0.2841	023 52	023664	024075	4186	4896	412
5	5306	5715	6125	6533	6942	7350	7757	8 64	8571	8978	408
6	9184	9783	030135	030500	031004	031408	031812	03 216	03 619	033021	404
7	033424	0338 6	4 7	46 8	50.9	5470	5830	6230	66 9	7028	400
8	7426	7825	8.3	86 0	9017	9414	9811	042 07	040602	040998	397
110	041393	041787	04 18	04 376	04 969	04336	043 111	044148	044540	044932	393
1	5323	5714	6 05	6495	6885	7 75	7664	8053	8442	8830	390
2	9 18	9606	9993	050380	050 66	051153	051538	0519 4	05 309	052694	386
3	051078	051463	051846	4 30	4613	4996	5378	5760	6142	6524	383
4	69.5	7286	7666	8046	8426	8805	9185	9563	9942	060320	379
115	060548	061075	061452	0618 9	062206	062582	062958	063333	063709	4283	376
5	44 8	483	5.06	5580	5957	63 6	6699	7071	7 43	7815	373
6	8 36	8552	89 8	9 98	9 68	0703 8	070407	070776	071145	071514	370
7	071882	07 240	072617	072985	0733 2	3718	4085	4451	4816	5182	366
8	547	591	6276	6640	7006	7368	7731	8094	8457	8819	363
120	075181	0 8543	0 9904	080 66	080826	080997	081347	081707	08 067	08 428	360
1	08 785	083 48	083503	3861	4 19	45 6	4934	5 91	6086	6404	357
2	6360	6 46	70 1	74 6	7 31	8 35	8592	89 5	9198	9552	353
3	9 405	090558	090931	090963	091345	09 667	09 018	09 370	09 721	093071	352
4	0934.2	3372	4122	4471	48 0	5169	5518	5866	6 5	6562	349
125	6910	7 37	7604	7959	8 99	8644	8980	9335	9681	100025	346
5	100371	100715	101059	101403	101747	102091	10 434	10 777	102119	102462	343
6	3804	4146	4487	48 8	5169	55 0	58 1	6141	6 1	6871	341
7	7210	7549	7888	8 27	8505	8903	9 41	9 79	10 17	110 11	338
8	110390	1109 8	111293	111599	111934	112270	11 605	112940	113 75	3609	335
130	113943	114 77	114611	114944	115 78	115611	115942	116276	116606	116940	331
1	7271	7609	7934	8 65	8535	89 6	9 58	9 95	10085	120.45	330
2	120574	120903	121231	121560	121889	12.16	12.514	12.871	123198	3525	3 8
3	3852	4178	4504	4830	5 56	5461	58 6	6131	6458	6781	325
4	7105	7429	7753	8076	8299	8722	9343	9368	9690	130012	323
135	130334	130655	130977	131298	131619	131939	132260	132580	132900	32 9	321
5	3539	3858	4177	4496	4814	5132	5.51	5 69	6086	6403	3 8
6	6721	7037	7354	7671	7987	8303	8618	89 4	9 49	9564	3 6
7	9879	140 94	14 08	1408 2	14 136	141 63	141 63	18 0 6	14 359	142702	314
8	143015	3327	3639	3951	4 63	4574	4885	5196	5507	5818	311
140	146128	146438	146748	147058	147367	147676	147985	148 94	148603	1489 1	309
1	9219	9577	9935	15014	150449	150756	151063	15 370	151676	151982	307
2	152288	152594	152900	3205	3510	38 5	41 3	44 4	4 8	5032	303
3	5336	5640	5943	6 26	6549	68 2	7154	74 7	7 59	8061	303
4	8362	8664	8965	9 66	9567	9868	160168	160469	160769	161068	301
145	161368	161667	161967	16 66	16 664	162863	3161	3160	3758	4055	299
5	4353	4650	4947	5244	554	5838	6134	6430	6726	7022	297
6	7317	7613	7909	8 03	8297	8592	9086	9380	9674	9969	295
7	170262	170555	170948	171341	171734	17212 6	172519	172911	17 603	177895	292
8	3186	3478	3769	4060	4351	4641	4932	5222	5512	5802	291
150	176091	176381	176670	176959	177 48	177326	177825	178113	178401	178689	289
1	8977	9 64	9557	9839	180126	180413	180699	180986	181272	18 558	287
2	181844	18 129	182115	182700	2985	3270	3555	3839	4123	4407	285
3	4951	4975	5 59	5542	58 5	6108	6381	6674	6955	7239	283
4	7321	7803	8284	8366	8647	89.8	9209	9490	9771	190051	281
155	190332	1906 2	190892	191151	191451	191730	192010	19 789	19 567	2846	279
5	3125	3401	3681	3959	4 37	4792	5069	5346	56.3	59.3	279
6	5900	6 76	6433	67 9	7075	7281	7586	7832	8 07	8362	276
7	8657	8932	9 06	9481	9755	2000 9	200377	200657	200950	201244	274
8	201397	201670	201943	20.16	202488	2261	3033	3305	3577	3848	272
K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

$$\log e = 0.431295 \log \pi - 0.49150 \log \sqrt{e} \quad 0248575$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
150	204120	204391	204663	204934	205204	205475	205746	206016	206286	206556	271
1	6826	7046	7311	7634	7904	8173	8441	8710	8979	9247	269
2	915	9783	210051	210319	210586	210851	211121	211388	211654	211921	267
3	212168	212434	21270	212966	213232	213498	213763	214029	214294	214559	266
4	4844	5109	5373	5638	5902	6166	6430	6694	6957	7221	264
165	7484	7747	8010	8273	8536	8798	9060	9323	9585	9846	262
6	220108	220376	220637	220892	221153	221414	221675	221936	222196	222456	261
7	2716	2976	3236	3496	3755	4015	4274	4533	4792	5051	259
8	5359	5618	5876	6134	6392	6650	6908	7165	7422	7679	258
9	7887	8144	8400	8657	8913	9170	9426	9682	9938	230193	256
170	230449	230704	230960	231215	231470	231724	231979	232234	232488	232742	255
1	2596	3250	3504	3757	4011	4264	4517	4770	5023	5276	253
2	5521	5781	6033	6285	6537	6789	7041	7292	7544	7795	252
3	8346	8607	8868	9129	9389	9649	9909	10169	10429	10689	250
4	240549	240793	241038	241282	241526	241770	242014	242258	242501	242745	249
175	3028	3286	3544	3802	4060	4317	4575	4832	5089	5346	248
6	5513	5771	6028	6285	6542	6799	6956	7213	7470	7727	246
7	7973	8230	8487	8744	8999	9256	9513	9770	10027	10284	245
8	250420	250664	250908	251151	251395	251638	251881	252125	252368	252611	243
9	2853	3096	3338	3580	3822	4064	4306	4548	4790	5031	242
180	255273	255518	255763	256007	256252	256497	256741	256985	257229	257473	241
1	7679	7918	8158	8398	8637	8877	9116	9355	9594	9833	239
2	260071	260310	260548	260787	261025	261263	261501	261739	261976	262214	238
3	2451	2688	2925	3162	3399	3636	3873	4109	4346	4582	237
4	4818	5054	5290	5525	5761	5996	6232	6467	6702	6937	235
185	7172	7406	7641	7875	8110	8344	8578	8812	9046	9279	234
6	9513	9745	9978	10210	10442	10674	10906	11138	11370	11602	233
7	271842	272074	272306	272538	272770	273001	273233	273464	273696	273927	232
8	4138	4369	4600	4830	5061	5291	5522	5752	5983	6213	231
9	6462	6692	6921	7151	7380	7609	7838	8067	8296	8525	229
190	278754	278982	279211	279439	279667	279895	280123	280351	280578	280806	228
1	281033	281261	281488	281715	281942	282169	282396	282622	282849	283075	227
2	3301	3527	3753	3979	4205	4431	4656	4882	5107	5332	226
3	5557	5782	6007	6232	6456	6681	6905	7130	7354	7579	225
4	7802	8026	8249	8473	8696	8920	9143	9366	9589	9812	223
195	290035	290257	290480	290702	290925	291147	291369	291591	291813	292034	222
6	2256	2478	2699	2920	3141	3362	3583	3804	4025	4246	221
7	4466	4687	4907	5127	5347	5567	5787	6007	6227	6446	220
8	6665	6884	7104	7323	7542	7761	7979	8198	8416	8634	219
9	8853	9071	9289	9507	9725	9943	10161	10378	10595	10813	218
200	301030	301247	301464	301681	301898	302114	302331	302548	302764	302980	217
1	3196	3412	3628	3844	4060	4275	4491	4706	4921	5136	216
2	5351	5566	5781	5996	6211	6425	6639	6854	7068	7282	215
3	7495	7710	7924	8137	8351	8564	8779	8991	9204	9417	213
4	9630	9843	10056	10268	10481	10693	10906	11118	11330	11542	212
205	311754	311966	312177	312389	312600	312812	313023	313234	313445	313655	211
6	3867	4078	4289	4499	4710	4920	5130	5340	5551	5760	210
7	5970	6180	6390	6599	6809	7018	7227	7436	7645	7854	209
8	8063	8272	8481	8689	8898	9106	9314	9522	9730	9938	208
9	320146	320354	320562	320769	320977	321184	321391	321598	321805	322012	207
210	322219	322426	322633	322839	323046	323252	323459	323665	323871	324077	206
1	4282	4488	4694	4899	5105	5310	5516	5721	5926	6131	205
2	6336	6541	6745	6950	7155	7359	7563	7767	7972	8176	204
3	8380	8583	8787	8991	9194	9398	9601	9805	10008	10212	203
4	330414	330617	330819	331022	331225	331427	331630	331832	332034	332236	202
215	2438	2640	2842	3044	3246	3447	3649	3850	4051	4253	202
6	4454	4655	4856	5057	5257	5458	5658	5859	6059	6260	201
7	6480	6680	6880	7080	7280	7480	7680	7880	8080	8280	200
8	8456	8656	8855	9054	9253	9452	9650	9849	10048	10247	199
9	340444	340642	340841	341039	341237	341435	341632	341830	342028	342225	198
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
220	341413	342620	343817	34 014	343212	343409	343606	343802	343999	344196	137
1	4392	4399	4785	4991	5179	5324	5570	5766	5962	6157	136
2	6353	6543	6744	6939	7135	7310	7525	7729	7915	8110	135
3	8125	8300	8594	8789	9083	9278	9472	9666	9860	350054	134
4	350148	350442	350636	3508 9	351023	351216	351410	351603	351796	1981	133
225	2183	2375	2568	2761	2954	3147	3339	3532	3724	3916	132
6	4108	4301	4494	4686	4878	5068	5260	5452	5643	5834	131
7	6326	6517	6709	6899	7090	7281	7472	7663	7854	8044	130
8	2935	3125	3316	3506	3696	3886	4076	4266	4456	4646	129
9	9835	360025	360115	360404	360593	360 83	3609 2	361161	361350	361539	128
230	361778	361917	361105	362294	362483	362671	362859	363048	363236	363424	127
1	3612	3620	3628	4376	4383	4391	4399	4406	4413	4420	126
2	5488	5575	5662	60 9	6 36	6423	6610	6 96	6883	7163	125
3	7236	7542	7729	7915	8101	8287	8473	8659	8845	9030	124
4	9216	9431	9587	9772	9958	370143	370328	370513	370698	370883	123
235	371078	371253	371437	371622	371806	1931	2175	2360	2544	2728	122
6	2917	3396	3396	3454	3647	4015	4198	4382	4565	4748	121
7	4748	4332	5115	5308	5491	5664	5846	6029	6212	6394	120
8	6577	6739	6942	7124	7305	7488	7670	7852	8034	8216	119
9	8398	8580	8761	8943	9124	9306	9487	9668	9849	380020	118
240	380711	380719	380573	380754	380934	381115	381296	381476	381656	381837	117
1	2017	2197	255	255	255	3091	3777	3456	3636	3816	116
2	3815	3940	41 3	4353	4 3	4 1	4691	5070	5249	54 8	115
3	5608	5785	5964	6143	6 1	6 1	6677	6856	7034	7212	114
4	7390	7566	7 46	79 3	8131	8279	8456	8634	8811	8989	113
245	9176	9383	95 0	9698	98 5	390031	390228	390425	390622	390819	112
6	350035	391117	391 88	391420	391 41	1993	2169	2345	2521	2697	111
7	2637	23 3	3388	3 4	3300	3575	3751	3926	4101	4277	110
8	4452	47 7	490	5 7	5 5	5376	5501	5676	5801	6025	109
9	6199	6374	6549	6722	6895	7071	7245	7419	7592	7766	108
250	390740	391114	39187	39187	39187	39187	39187	39187	39187	39187	107
1	9674	9347	400 0	400 0	400 0	400 0	400 0	400 0	400 0	400 0	106
2	401431	401 73	1745	1917	2099	2261	2423	2585	2747	2909	105
3	2121	3 0	344	3635	3807	3978	4149	4320	4492	4663	104
4	4834	5005	5176	5346	5517	5688	5858	6029	6199	6370	103
255	6540	6710	6891	7051	7211	7371	7531	7691	7851	8010	102
6	8340	8410	8579	8749	8918	9087	9257	9426	9595	9764	101
7	9933	410102	410771	410440	410109	410777	410446	411114	411783	412451	100
8	411620	1788	1936	2084	2233	2381	2529	2677	2825	2974	99
9	3390	3467	3635	3803	3970	4137	4305	4472	4639	4806	98
260	414973	415140	415307	415474	415641	415808	415974	416141	416308	416474	97
1	6641	6027	6973	7139	7306	7472	7638	7804	7970	8135	96
2	8701	8 67	8633	8 98	8 64	91 9	9 95	9 60	9525	9791	95
3	9956	420121	420286	420451	420616	420781	420945	421110	421275	421439	94
4	421604	1768	1933	2097	2261	2426	2590	2754	2918	3082	93
265	3 46	3410	3574	3737	3901	4065	4228	4392	4555	4718	92
6	4932	5045	5208	5371	5534	5697	5860	6023	6186	6349	91
7	6511	6674	6836	6999	7161	7324	7486	7649	7811	7973	90
8	8125	8297	8459	8621	8783	8944	9106	9268	9429	9591	89
9	9752	39124	420286	420451	420616	420781	420945	421110	421275	421439	88
270	431364	431525	431685	431846	432007	432167	432328	432488	432649	432809	87
1	2569	3133	3290	3450	3610	3770	3930	4090	4249	4409	86
2	4569	4729	4888	5048	5207	5367	5526	5685	5844	6004	85
3	6163	6322	6481	6640	6799	6957	7116	7275	7433	7592	84
4	7751	7909	8067	8226	8384	8542	8701	8859	9017	9175	83
275	9333	9491	9648	9806	9964	440122	440279	440437	440594	440752	82
6	440979	441066	441224	441381	441538	1695	1852	2009	2166	2323	81
7	2480	2637	2793	2950	3106	3263	3419	3576	3732	3889	80
8	4045	4201	4357	4513	4669	4825	4981	5137	5293	5449	79
9	5604	5760	5915	6071	6226	6382	6537	6692	6848	7003	78
N	M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
280	447158	447233	447458	447623	447778	447903	448098	448283	448457	448552	155
1	8706	8861	9011	9104	9224	9318	9403	9478	9541	9591	154
2	450219	450403	450552	450811	450965	451018	451172	451356	451479	451613	154
3	1786	1940	2093	2277	2422	2553	2666	2769	2862	2945	153
4	3318	3471	3624	3777	3930	4082	4235	4387	4539	4691	153
285	44845	44967	45150	4530	4548	4566	4588	4590	4642	4694	152
6	6306	6518	6670	681	6973	7125	7276	7428	7579	7731	152
7	7832	8033	8184	8336	8487	8638	8789	8940	9091	9242	151
8	9492	9583	9694	9845	9996	10147	10298	10449	10600	10751	151
9	450836	451048	451198	451348	451493	451643	451793	451943	452093	452243	150
290	462338	462348	462357	462367	462377	462386	462396	462405	462415	462425	150
1	3533	4042	4111	4240	4309	4378	4447	4516	4585	4654	149
2	5383	5537	5690	5843	5996	6149	6302	6455	6608	6761	149
3	8048	8106	8164	8222	8280	8338	8396	8454	8512	8570	149
4	8347	8495	8643	8791	8939	9087	9235	9383	9531	9679	148
295	4682	4689	4696	4703	4710	4717	4724	4731	4738	4745	147
6	471247	471338	471429	471520	471611	471702	471793	471884	471975	472066	146
7	256	2923	3033	3143	3253	3363	3473	3583	3693	3803	146
8	416	452	488	524	560	596	632	668	704	740	145
9	5671	5816	5962	6107	6252	6397	6542	6687	6832	6977	145
300	47121	47766	47831	478555	477700	477844	477989	478133	478278	478422	145
1	8566	8111	8044	8079	9143	9257	9411	9525	9639	9753	144
2	41347	46191	48044	48308	43062	48375	48499	48623	48747	48871	144
3	1443	106	125	172	2016	2159	232	34	528	2731	143
4	2374	316	3159	3362	3445	3527	370	3872	4015	4157	143
305	4300	4442	4585	4727	4869	5011	5153	5295	5437	5579	142
6	571	5463	6025	6147	6299	6451	6603	6755	6907	7059	142
7	7138	733	7871	791	7	78-5	35	817	840	8410	141
8	851	832	853	864	8811	905	9315	9537	967	988	141
9	9558	490499	49029	490183	49059	490561	490801	490941	491081	491221	140
310	491362	49102	491642	491792	491942	492092	492242	492392	492542	492692	140
1	2700	2400	3030	313	319	358	357	3737	376	4015	139
2	4155	4294	433	402	4711	480	4723	518	5407	5408	139
3	544	493	502	500	6059	6238	6176	6515	6553	6791	139
4	6930	7668	7676	7444	743	7621	7752	7837	8035	8173	138
315	8111	8188	8296	8724	8852	8999	9137	9275	9412	9550	138
6	9687	984	96	500021	500036	500144	500211	500348	500485	500622	137
7	501099	501146	50137	510	5637	5744	5830	5917	6004	6091	137
8	247	264	2703	2817	2973	3109	3245	3382	3518	3655	136
9	3791	397	4063	4153	4243	4371	4507	4643	4778	4914	136
320	501150	501286	501421	501557	501693	501828	501964	502100	502234	502370	136
1	6502	6640	6776	6911	7046	7181	7316	7451	7586	7721	135
2	786	7991	8126	8261	8396	8531	8666	8801	8936	9071	135
3	903	9167	9301	9436	9571	9706	9841	9976	10111	10246	134
4	510445	510679	510911	510947	511081	511215	511349	511483	511616	511750	134
325	1893	1917	2151	234	2418	2551	2684	2818	2951	3084	133
6	328	3351	3484	3617	3750	3883	4016	4149	4282	4415	133
7	4548	4681	4814	4947	5080	5213	5346	5479	5612	5745	133
8	5874	6006	6139	6271	6403	6535	6668	6800	6932	7064	132
9	7196	7328	7460	7592	7724	7856	7988	8120	8252	8384	132
330	518514	518646	518777	518909	519040	519171	519302	519433	519564	519695	131
1	9328	9459	9590	9721	9852	9983	10114	10245	10376	10507	131
2	52118	521269	1440	1530	1661	1792	1923	2054	2185	2316	130
3	2441	2575	2705	2835	2966	3096	3226	3356	3486	3616	130
4	3	106	4066	4236	4366	4496	4626	4756	4886	4915	129
335	5045	5174	5304	5434	5563	5693	5822	5951	6081	6210	129
6	6139	6269	6399	6529	6659	6789	6919	7049	7179	7309	129
7	7630	7760	7890	8020	8150	8280	8410	8540	8670	8800	128
8	8717	8845	8974	9102	9230	9359	9487	9615	9743	9871	128
9	530200	530328	530456	530584	530712	530840	530968	531096	531224	531351	128
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
340	531479	531607	531734	531852	531999	532117	532245	532372	532500	532627	128
1	2754	2832	3063	3135	3 44	2791	3518	3545	3772	3839	127
2	4076	4153	4390	4437	4 34	4661	4787	4914	5041	5167	127
3	5394	5471	5707	5754	5 27	5893	6020	6147	6274	6401	126
4	6558	6635	6871	6917	6 93	7043	7169	7295	7421	7547	126
345	7819	7945	8071	8197	8322	8448	8574	8699	8825	8951	125
1	9076	9202	9327	9453	9578	9704	9829	9954	54079	540204	125
2	540379	540455	540530	540605	540680	540755	540830	541205	1320	1443	125
3	1579	1704	18 9	1953	20 8	21 3	2221	2452	2546	2701	125
4	26 5	2954	30 4	3133	3243	3371	3571	3696	3820	3944	124
350	544013	544142	544276	544410	544544	544678	544812	544946	545080	545213	124
1	5307	5421	55 5	56 8	57 1	58 4	59 7	6093	6172	6296	124
2	6513	66 6	6789	6913	70 3	71 6	728	7415	7529	7652	123
3	7715	782	80 1	8143	82 7	839	851	8635	8759	8881	123
4	9023	9126	9 43	9371	9494	9616	9739	9861	9984	550106	123
355	550778	550931	551073	551215	551357	551500	551642	551784	551926	552068	122
1	1430	1572	1694	1816	1 9	20	131	1431	2425	2547	122
2	2758	2 10	2491	2613	2735	2857	2979	3101	3223	3345	122
3	3463	4098	4174	4 47	4498	4620	4742	4864	4986	5108	121
4	5094	5715	5336	5457	5578	5699	5820	5941	6062	6183	121
360	556302	556423	556544	556664	556785	556905	557026	557146	557267	557387	122
1	7507	7627	7748	7868	7988	8108	8228	8348	8468	8588	120
2	8709	8829	8949	9069	9189	9309	9429	9549	9669	9789	120
3	9207	9327	9447	9567	9687	9807	9927	560747	560863	560979	119
4	561101	121	3340	1453	15 8	1708	1817	1934	2055	2174	119
365	2 43	2412	2531	2650	2 69	2897	3006	3125	3244	3363	119
1	3491	3602	3719	3837	3955	4 4	4172	4291	4409	4528	118
2	4596	4 84	4703	4821	4939	5 47	5166	5284	5402	5520	118
3	5318	5436	5554	5672	5790	5908	6026	6144	6262	6380	118
4	7025	7144	7262	7380	7497	7615	7732	7849	7967	8084	118
370	568702	568819	568935	569051	569167	569283	569399	569515	569631	569747	117
1	9374	9491	9607	9723	9839	9955	5700 6	570193	570329	570465	117
2	570543	570660	570776	570893	571010	571126	571243	571359	571476	571592	117
3	1709	1825	1942	2058	21 4	2291	2407	2523	2639	2755	116
4	2372	2488	3104	3220	3 36	3452	3568	3684	3800	3916	116
375	4031	4147	4263	4379	4494	4610	4 6	4841	4957	5072	116
1	5188	5302	5419	5534	5650	5765	5880	5996	6111	6226	115
2	6341	6457	6572	6687	6802	6917	7032	7147	7262	7377	115
3	7412	7527	7642	7757	7872	7987	8102	8217	8332	8447	115
4	8625	8754	8883	8998	9113	9228	9343	9458	9573	9688	114
380	579724	579848	579972	580096	580220	580344	580468	580592	580716	580840	114
1	580965	581089	1153	1267	1381	1495	1609	1723	1837	1950	114
2	2063	2177	2 91	2404	2518	2631	2745	2858	2972	3085	114
3	3198	3312	3426	3539	3652	3765	3879	3992	4105	4218	113
4	4321	4444	4557	4670	4783	4896	5009	5122	5235	5348	113
385	5461	5574	5686	5798	5912	6026	6139	6252	6365	6478	113
1	6587	6700	6812	6925	7037	7149	7262	7374	7486	7599	112
2	7711	7823	7935	8047	8160	8272	8384	8496	8608	8720	112
3	8832	8944	9056	9167	9279	9391	9503	9615	9726	9838	112
4	9950	51061	590173	590 84	590386	590507	590619	590730	590842	590953	112
390	541065	541176	541287	541398	541509	541621	541731	541841	541955	542065	111
1	2177	2268	2399	2510	2621	2732	2843	2954	3064	3175	111
2	3785	3397	3508	3618	3729	3840	3950	4061	4171	4282	111
3	4393	4503	4614	4724	4834	4945	5055	5165	5276	5387	110
4	5496	5606	5717	5827	5937	6047	6157	6267	6377	6487	110
395	6592	6702	6812	6922	7032	7142	7252	7362	7472	7582	110
1	7693	7803	7913	8023	8133	8243	8353	8463	8572	8681	110
2	8791	8901	9011	9121	9231	9341	9451	9561	9671	9781	109
3	9893	9993	600191	600210	600319	600428	600537	600646	600755	600864	109
4	600973	601082	1151	1263	1375	1487	1599	1714	1831	1951	109
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
400	602060	602169	602277	602386	602494	602603	602711	602819	602928	603036	108
1	3144	3253	3361	3469	3577	3686	3794	3902	4010	4118	108
2	4226	4334	4442	4550	4658	4766	4874	4982	5089	5197	108
3	5305	5413	5521	5628	5736	5844	5951	60 9	6166	6274	108
4	6381	6489	6596	6704	6811	6919	7026	7133	7241	7348	107
405	7453	7562	7669	7777	7884	7991	8098	8205	8312	8419	107
5	8528	8633	8740	8847	8954	9061	9167	9274	9381	9488	107
6	9594	9701	9808	9914	1000 1	101028	102034	103041	104047	105054	107
7	106060	107067	108073	109079	1088	1122	1238	1405	1511	1617	106
8	1723	1829	1936	2042	2148	2254	2360	2466	2572	2678	106
410	112784	112890	112996	113102	113207	113313	113419	113525	113630	113736	106
1	3847	3947	4053	41 9	42 4	4370	4475	4581	4686	4792	106
2	4837	5003	5168	53 9	5424	5529	5634	5740	5845	5945	105
3	5950	6055	6160	6 5	6370	6476	6581	6686	6790	6895	105
4	7000	7105	7210	7315	7420	7525	7629	7734	7839	7943	105
415	8043	8153	8257	8362	8468	8571	8676	8780	8884	8989	105
5	9093	9198	9302	9406	9 11	9 15	9719	98 4	9928	10032	104
6	10138	10240	10343	10445	10547	10649	10751	10853	10955	11057	104
7	11176	1229	1334	1438	15 2	1 5	1799	1903	2007	2110	104
8	2214	2319	2423	2525	2628	2732	2835	2939	3042	3146	104
420	3249	3353	3458	3563	3668	3774	3879	3984	4089	4194	103
1	4282	4385	4489	4593	4 35	4728	4 01	5004	5107	5210	103
2	5312	5415	5518	5621	5724	5827	5 9	6 3	6135	6238	103
3	6340	6443	6545	6648	6751	6853	6956	7058	7161	7263	103
4	7366	7468	7571	7673	7775	7878	7980	8082	8185	8287	102
425	8389	8491	8593	8695	8797	8900	9002	9104	9206	9308	102
5	9410	9512	9613	9715	9817	9919	10021	10123	10224	10326	102
6	10428	10530	10631	10733	10835	10937	1 38	1 49	1591	1692	102
7	1744	1845	1947	2048	2149	2250	2351	2452	2553	2654	101
8	2757	2858	2959	3060	3161	3262	3363	3464	3565	3666	101
430	3768	3869	3970	4071	4172	4273	4374	4475	4576	4677	101
1	4777	4878	4979	5080	5181	5282	5383	5484	5585	5686	101
2	5787	5888	5989	6090	6191	6292	6393	6494	6595	6696	101
3	6797	6898	6999	7100	7201	7302	7403	7504	7605	7706	100
4	7807	7908	8009	8110	8211	8312	8413	8514	8615	8716	100
435	8817	8918	9019	9120	9221	9322	9423	9524	9625	9726	99
5	9827	9928	10029	10130	10231	10332	10433	10534	10635	10736	99
6	10837	10938	11039	11140	11241	11342	11443	11544	11645	11746	99
7	11847	11948	12049	12150	12251	12352	12453	12554	12655	12756	99
8	12857	12958	13059	13160	13261	13362	13463	13564	13665	13766	99
440	13867	13968	14069	14170	14271	14372	14473	14574	14675	14776	98
1	14877	14978	15079	15180	15281	15382	15483	15584	15685	15786	98
2	15887	15988	16089	16190	16291	16392	16493	16594	16695	16796	98
3	16897	16998	17099	17200	17301	17402	17503	17604	17705	17806	98
4	17907	18008	18109	18210	18311	18412	18513	18614	18715	18816	98
445	18917	19018	19119	19220	19321	19422	19523	19624	19725	19826	97
5	19927	20028	20129	20230	20331	20432	20533	20634	20735	20836	97
6	20937	21038	21139	21240	21341	21442	21543	21644	21745	21846	97
7	21947	22048	22149	22250	22351	22452	22553	22654	22755	22856	97
8	22957	23058	23159	23260	23361	23462	23563	23664	23765	23866	97
450	23967	24068	24169	24270	24371	24472	24573	24674	24775	24876	96
1	24977	25078	25179	25280	25381	25482	25583	25684	25785	25886	96
2	25987	26088	26189	26290	26391	26492	26593	26694	26795	26896	96
3	26997	27098	27199	27300	27401	27502	27603	27704	27805	27906	96
4	28007	28108	28209	28310	28411	28512	28613	28714	28815	28916	96
455	29017	29118	29219	29320	29421	29522	29623	29724	29825	29926	95
5	30027	30128	30229	30330	30431	30532	30633	30734	30835	30936	95
6	31037	31138	31239	31340	31441	31542	31643	31744	31845	31946	95
7	32047	32148	32249	32350	32451	32552	32653	32754	32855	32956	95
8	33057	33158	33259	33360	33461	33562	33663	33764	33865	33966	95
460	34067	34168	34269	34370	34471	34572	34673	34774	34875	34976	94
1	35077	35178	35279	35380	35481	35582	35683	35784	35885	35986	94
2	36087	36188	36289	36390	36491	36592	36693	36794	36895	36996	94
3	37097	37198	37299	37400	37501	37602	37703	37804	37905	38006	94
4	38107	38208	38309	38410	38511	38612	38713	38814	38915	39016	94
465	39117	39218	39319	39420	39521	39622	39723	39824	39925	40026	93
5	40127	40228	40329	40430	40531	40632	40733	40834	40935	41036	93
6	41137	41238	41339	41440	41541	41642	41743	41844	41945	42046	93
7	42147	42248	42349	42450	42551	42652	42753	42854	42955	43056	93
8	43157	43258	43359	43460	43561	43662	43763	43864	43965	44066	93
470	44167	44268	44369	44470	44571	44672	44773	44874	44975	45076	92
1	45177	45278	45379	45480	45581	45682	45783	45884	45985	46086	92
2	46187	46288	46389	46490	46591	46692	46793	46894	46995	47096	92
3	47197	47298	47399	47500	47601	47702	47803	47904	48005	48106	92
4	48207	48308	48409	48510	48611	48712	48813	48914	49015	49116	92
475	49217	49318	49419	49520	49621	49722	49823	49924	50025	50126	91
5	50227	50328	50429	50530	50631	50732	50833	50934	51035	51136	91
6	51237	51338	51439	51540	51641	51742	51843	51944	52045	52146	91
7	52247	52348	52449	52550	52651	52752	52853	52954	53055	53156	91
8	53257	53358	53459	53560	53661	53762	53863	53964	54065	54166	91
480	54267	54368	54469	54570	54671	54772	54873	54974	55075	55176	90
1	55277	55378	55479	55580	55681	55782	55883	55984	56085	56186	90
2	56287	56388	56489	56590	56691	56792	56893	56994	57095	57196	90
3	57297	57398	57499	57600	57701	57802	57903	58004	58105	58206	90
4	58307	58408	58509	58610	58711	58812	58913	59014	59115	59216	90
485	59317	59418	59519	59620	59721	59822	59923	60024	60125	60226	89
5	60327	60428	60529	60630	60731	60832	60933	61034	61135	61236	89
6	61337	61438	61539	61640	61741	61842	61943	62044	62145	62246	89
7	62347	62448	62549	62650	62751	62852	62953	63054	63155	63256	89
8	63357	63458	63559	63660	63761	63862	63963	64064	64165	64266	89
490	64367	64468	64569	64670	64771	64872	64973	65074	65175	65276	88
1	65377	65478	65579	65680	65781	65882	65983	66084	66185	66286	88
2	66387	66488	66589	66690	66791	66892	66993	67094	67195	67296	88
3	67397	67498	67599	67700	67801	67902	68003	68104	68205	68306	88
4	68407	68508	68609	68710	68811	68912	69013	69114	69215	69316	88
495	69417	69518	69619	69720	69821	69922	70023	70124	70225	70326	87
5	70427	70528	70629	70730	70831	70932	71033	71134	71235	71336	87
6	71437	71538	71639	71740	71841	71942	72043	72144	72245	72346	87
7	72447	72548	72649	72750	72851	72952	73053	73154	73255	73356	87
8	73457	73558	73659	73760	73861	73962	74063	74164	74265	74366	87
500	74467	74568	74669	74770	74871	74972	75073	75174	75275	75376	86
1	75477	75578	75679	75780	75881	75982	76083	76184	76285	76386	86
2	76487	76588	76689	76790	76891	76992	77093	77194	77295	77396	86
3	77497	77598	77699	77800	77901	78002	78103	78204	78305	78406	86
4	78507	78608	78709</								

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
160	66758	662852	662947	663041	663135	663230	663324	663418	663512	663607	94
1	3701	3795	3889	3983	4078	4172	4266	4360	4454	4548	94
2	4647	4736	4830	4924	5018	5112	5206	5299	5393	5487	94
3	5581	5675	5769	5863	5956	6050	6143	6237	6331	6424	94
4	6518	6612	6705	6799	6892	6986	7079	7173	7266	7360	94
485	7453	7546	7640	7733	7826	7919	8013	8106	8199	8293	93
6	8186	8279	8372	8465	8558	8651	8744	8837	8930	9023	93
7	9117	9210	9303	9396	9489	9582	9675	9767	9860	9953	93
8	670.45	670339	670431	670523	670617	670710	670802	670895	670988	671080	93
9	1173	1255	1338	1421	1503	1586	1668	1751	1833	1915	93
470	671098	672130	672223	672315	672407	672500	672592	672684	672776	672868	92
1	32.1	3113	3205	3297	3389	3481	3573	3665	3757	3849	92
2	3942	4034	4126	4218	4310	4402	4494	4586	4678	4769	92
3	4861	4953	5045	5137	5228	5320	5412	5503	5595	5687	92
4	5778	5870	5962	6053	6145	6236	6328	6419	6511	6602	92
475	6894	6715	6816	6918	7019	7121	7222	7323	7424	7525	91
6	7607	7699	7791	7883	7975	8067	8158	8250	8341	8432	91
7	8518	8609	8700	8791	8882	8973	9064	9155	9246	9337	91
8	9428	9519	9610	9701	9792	9883	9974	680063	680154	680245	91
9	680336	680427	680517	680607	680698	680789	680879	680970	100.0	1151	91
480	681241	681332	681422	681513	681603	681693	681784	681874	681964	682055	90
1	1215	1225	1235	1245	1255	1265	1275	1285	1295	1305	90
2	1317	1327	1337	1347	1357	1367	1377	1387	1397	1407	90
3	1417	1427	1437	1447	1457	1467	1477	1487	1497	1507	90
4	1515	1525	1535	1545	1555	1565	1575	1585	1595	1605	90
485	5742	5841	5940	6040	6140	6240	6340	6440	6540	6640	89
6	6640	6740	6840	6940	7040	7140	7240	7340	7440	7540	89
7	7540	7640	7740	7840	7940	8040	8140	8240	8340	8440	89
8	8440	8540	8640	8740	8840	8940	9040	9140	9240	9340	89
9	9340	9440	9540	9640	9740	9840	9940	690019	690107	690195	89
490	690196	690285	690373	690461	690550	690639	690728	690816	690905	690993	89
1	1081	1170	1259	1347	1435	1523	1611	1700	1788	1877	88
2	1965	2053	2142	2230	2318	2406	2494	2582	2671	2759	88
3	2847	2935	3023	3111	3199	3287	3375	3463	3551	3639	88
4	3727	3815	3903	3991	4079	4166	4254	4342	4430	4517	88
495	4605	4693	4781	4869	4956	5044	5131	5219	5307	5394	88
6	5482	5569	5657	5744	5831	5918	6005	6092	6179	6266	87
7	6356	6443	6530	6617	6704	6791	6878	6965	7052	7139	87
8	7229	7316	7403	7490	7577	7664	7751	7838	7925	8012	87
9	8101	8188	8275	8362	8449	8535	8622	8709	8796	8883	87
500	690370	690457	690544	690631	690718	690804	690891	690978	691064	691151	87
1	9318	9405	9492	9579	9666	9753	9840	9927	10014	10101	86
2	700704	700792	700880	700968	701056	701144	701232	701320	701408	701496	86
3	158	1675	1762	1849	1936	2023	2110	2197	2284	2371	86
4	2451	2538	2625	2712	2799	2886	2973	3060	3147	3234	86
505	3291	3377	3463	3549	3635	3721	3807	3893	3979	4065	86
6	4151	4236	4322	4408	4494	4579	4665	4751	4837	4923	86
7	5008	5094	5179	5265	5351	5437	5523	5609	5695	5781	86
8	5864	5949	6035	6121	6207	6293	6379	6465	6551	6637	85
9	6718	6803	6888	6974	7059	7144	7229	7315	7400	7486	85
510	707570	707655	707740	707826	707911	707996	708081	708166	708251	708336	84
1	8421	8506	8591	8676	8761	8846	8931	9016	9101	9186	85
2	9270	9355	9440	9525	9610	9695	9780	9865	9950	10035	85
3	710117	710202	710287	710371	710456	710541	710625	710710	710795	710880	84
4	0963	1049	1132	1217	1301	1385	1469	1554	1639	1723	84
515	1807	1892	1976	2060	2144	2229	2313	2397	2481	2566	84
6	2650	2734	2818	2902	2986	3070	3154	3238	3322	3407	84
7	3491	3575	3659	3743	3827	3911	3995	4079	4163	4247	84
8	4310	4394	4478	4562	4646	4730	4814	4898	4982	5066	84
9	5167	5251	5335	5419	5503	5587	5671	5755	5839	5923	84
M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
520	716003	716087	716170	716254	716337	716421	716504	716 88	716671	716754	81
1	6838	6921	7004	7088	7171	7254	7338	7421	7504	7587	82
2	7671	7754	7837	7920	8003	8086	8169	82 3	8356	8439	83
3	8502	8585	8668	8751	8834	8917	9000	9083	9165	9248	84
4	9331	9414	9497	9580	9663	9745	9828	9911	9994	7 0077	85
525	720159	720242	720325	720407	720490	720573	7206 5	720738	720821	0903	86
6	6986	7068	7151	7233	73 6	74 8	75 1	7581	7664	7748	87
7	7311	7393	7475	7558	7640	7722	78 05	7887	7969	8052	88
8	7634	77 6	7798	7881	7963	8045	8127	8209	8291	8374	89
9	3456	3538	3620	3702	3 84	3866	3948	4030	4112	4 34	90
530	7 4 76	724359	724440	724522	724604	7 4695	724767	724849	724931	725013	82
1	5045	5176	5258	5340	5 2	5503	55 5	5667	5748	5830	83
2	5912	5993	6075	6156	6238	6320	6 3	6 63	6744	6826	84
3	6727	6809	6890	6972	70 3	7134	72 6	7 87	73 9	7469	85
4	7541	7623	7704	7785	7866	7948	8029	8110	8191	8273	86
535	8314	8435	85 6	8597	8678	8749	8841	8922	9003	9084	87
6	9 85	9266	9327	9408	9 39	9651	9732	9813	9893	9974	88
7	9974	7309 5	730136	730217	730 3	730378	730459	730540	730621	730702	89
8	430 32	6663	67 4	68 4	69 4	70 4	71 4	72 4	73 4	74 4	90
9	1589	1669	1750	1830	1911	1991	20 2	2152	2233	2313	91
540	732394	732474	732555	732635	732715	732796	7328 6	73 496	733037	733117	92
1	3197	3278	3358	3438	3518	3598	3679	3759	3839	3919	93
2	3999	4079	41 0	4 0	43 0	4403	4480	4 0	4640	4720	94
3	4303	4383	44 0	5040	5120	5200	5279	5 9	5439	5519	95
4	5599	5679	5759	58 8	59 8	6078	6157	6237	6317	6397	96
545	6397	6476	6556	6635	6715	6795	6874	6954	7034	7113	97
6	7 93	7272	7351	74 1	75 1	759	7670	7749	7829	79 7	98
7	7497	7576	7655	77 5	78 5	79 5	80 3	8 3	8 7	8701	99
8	8781	8860	89 9	9 18	9 07	91 7	92 6	9355	94 8	9493	99
9	9572	9651	9731	9810	9889	9968	740047	740126	740205	740284	99
550	740383	740462	740541	740620	740 78	740757	740836	740915	740994	74 099	99
1	1 52	12 0	13 1	1363	1467	1565	1663	1763	1860	1960	99
2	1959	20 8	21 5	2 5	2 4	2 32	24 1	24 9	2568	2647	99
3	2725	2 44	2 2	2 4	3639	3 18	3 36	3275	33 3	3411	99
4	3510	3548	3667	37 5	38 3	3902	3980	4058	4136	4215	99
555	4293	4371	4449	4 28	4705	4784	4862	4940	4919	4997	99
6	5075	51 3	5 1	5370	5447	5525	5603	56 1	5699	5777	99
7	58 5	59 3	6011	60 9	61 7	6245	6323	6401	64 9	6578	99
8	6634	6712	6 40	6883	6 3	6 3	7 41	7179	72 6	7344	99
9	74 2	7449	7567	76 5	772	7800	7878	7955	8033	8110	99
560	748188	748266	748343	748421	748 28	748576	748653	748731	748808	748885	99
1	8363	84 0	91 8	9 5	9 7	93 0	9427	9504	9582	9659	99
2	9735	98 4	9 1	9948	7509 5	750 3	750290	750277	750354	750431	99
3	750508	750 86	750663	750740	0317	0414	0471	1043	1125	1202	99
4	1279	1356	1433	1510	1587	1664	1741	1818	1895	1972	99
565	2048	21 5	2202	2 79	2356	2433	2509	2586	2663	2740	99
6	2816	2893	2970	3047	3123	3200	3277	3353	3430	3506	99
7	3483	3560	3636	3713	3790	3 66	404	4119	4 35	4272	99
8	4348	4425	4 01	4578	4 54	4730	4807	4883	4960	5036	99
9	5112	5189	5 65	5341	5417	5494	5570	5646	5722	5799	99
570	755975	755951	756027	756103	756180	756 6	756332	756408	756484	756560	99
1	6636	6712	6788	6864	6940	7016	7092	7168	7244	7320	99
2	7396	7472	7548	7624	7700	7775	7851	7927	8003	8079	99
3	8 55	8230	8306	8382	8458	8533	8609	8685	8 61	8836	99
4	8912	8988	9063	9139	9214	9290	9 46	9441	9517	9592	99
575	9668	9743	98 9	9964	9970	760045	760121	760196	760 72	760147	99
6	760422	760493	760573	760649	7607 4	0793	0875	0950	10 5	1101	99
7	1176	1 1	13 8	1492	1577	165	173	180	1878	1953	99
8	1 8	2003	2078	2153	22 8	2303	23 9	2453	2 9	2604	99
9	26 9	2754	2829	2904	2978	3053	3128	3 03	32 8	3351	99
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
590	763428	763503	763578	763653	763727	763802	763877	763952	764027	764101	75
1	4176	4251	4326	4400	4475	4550	4624	4699	4774	4848	75
2	4923	4938	5072	5147	5221	5296	5370	5445	5520	5594	75
3	5669	5743	5818	5892	5966	6041	6115	6190	6264	6338	74
4	6413	6487	6562	6636	6710	6785	6859	6933	7007	7082	74
595	7156	7239	7304	7379	7453	75 7	7601	7675	7749	7823	74
6	7893	7972	8046	8120	8194	8268	8342	8416	8490	8564	74
7	8538	8712	8786	8860	8934	9008	9082	9156	9230	9303	74
8	9377	9451	95 5	9 99	9673	9745	9819	9894	9968	770042	74
9	770115	770189	770 63	770336	7 0410	770484	770557	770631	770705	0778	74
600	770 52	770 56	770599	771073	771146	771220	771293	771367	771440	771514	74
1	1587	1661	1734	1808	1881	1955	20 8	2102	2175	2248	73
2	23 2	2335	2468	254	2615	2688	276	2835	2908	298	73
3	3 55	31 8	3 01	3 74	3348	341	3484	3567	3640	37 3	73
4	3 86	3300	3333	4006	4379	4152	4225	4298	4371	4444	73
605	4517	4 90	4663	4736	4809	4882	4955	50 8	5100	5173	73
6	5 46	5319	534	5465	5538	56 0	5683	5756	5829	5902	73
7	59 4	6547	6 20	6 93	6 65	6338	63 1	6403	6476	6549	73
8	6701	6774	6846	69 9	69 9	7064	7 37	7209	7282	7354	73
9	74 7	7499	7572	7644	7717	7789	7862	7934	8006	8079	72
610	7 9151	778 24	778 06	779368	778441	778513	778585	778658	778730	778802	72
1	8874	8947	9019	9091	9163	9236	9308	9380	9452	9524	72
2	9 46	9659	974	983	9985	9957	780 9	780 61	780173	780245	72
3	7803 7	780389	780 61	78 533	780 55	780577	0 49	0821	0893	0965	72
4	1037	11 9	1181	1 53	13 4	1 96	1468	1540	1612	1684	72
615	1755	18 7	1899	1971	2042	2114	2 86	2258	2329	2401	72
6	2473	2544	2 16	2688	2759	283	2902	2974	3046	3117	72
7	3189	3 60	333	3 3	34 5	35 6	36 8	3663	3761	3832	71
8	37 4	3075	40 6	4110	4183	4 61	4332	4403	4475	4546	71
9	4617	4689	4760	4831	4902	49 4	5045	5116	5187	5259	71
620	785330	785 01	785 472	785543	7856 5	785686	785757	7858 8	785899	785970	71
1	8041	8112	8183	8254	83 5	8467	8538	8609	8680	8750	71
2	8 51	89	8993	8964	9015	9 06	9 77	9 48	9319	9390	71
3	9 60	7531	760	76 3	7744	78 5	7895	7956	80 7	8096	71
4	8168	8 39	8310	8381	8 51	8522	8 93	8663	8734	8804	71
625	8875	8946	90 6	9087	9 57	9 28	9 99	9169	9440	9510	71
6	9491	9561	97 2	9792	9903	9933	790304	7900 4	790 44	790 5	70
7	790 85	790356	7904 6	790498	790567	790637	0707	0778	6848	6919	70
8	0788	10 9	11 9	1199	1269	1340	14 0	1480	1550	1620	70
9	1691	1761	1831	1901	1971	2041	2111	2181	2252	2322	70
630	79 347	79 467	79 53	79 60	79 672	79 743	79 812	79 882	79 952	7930 2	70
1	309	3169	3231	3301	3371	3441	35 1	3581	3651	3721	70
2	3 40	3860	3930	40 0	4070	4139	4 09	4 79	4349	4418	70
3	4388	45 8	4627	4697	4767	4836	4906	4976	5046	5115	70
4	5125	5 54	53 4	5333	5403	5473	5542	5612	5682	5751	70
635	5880	5949	6019	6088	6158	6 7	6297	6366	6436	6505	69
6	65 4	6644	6713	6782	6852	69 1	6990	7060	7130	7199	69
7	7 68	7137	7406	7475	7545	76 4	7693	7752	7821	7890	69
8	7403	80 9	8079	8 67	8 6	8305	8374	8443	85 3	8582	69
9	8651	87 0	8 89	8958	89 7	8996	9065	9134	9203	9272	69
640	799341	799499	7994 8	799547	799616	799685	799754	7998 3	799892	799961	69
1	8007 1	800338	800 67	800 36	800305	800373	800444	800511	800580	800648	69
2	07 7	0786	0854	09 3	099	1061	11 9	1196	1266	1335	69
3	1401	1472	1541	1609	1678	1747	1815	1884	1952	2021	69
4	2 59	2158	2226	2295	2363	2432	2500	2568	2637	2705	69
645	2774	2844	2910	2979	3047	3116	3184	3252	3321	3389	68
6	3457	35 5	3594	3662	3730	3798	3867	3935	4003	4071	68
7	4 39	4 08	4276	4344	4412	4480	4548	4616	4684	4753	68
8	46 1	4609	4677	4745	4813	4881	4949	5017	5085	5153	68
9	5501	5569	5637	5705	5773	5841	5908	5976	6044	6112	68
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
640	806190	806248	806316	806384	806451	806519	806587	806655	806723	806790	64
1	6359	6326	6394	7061	7129	7197	7264	7332	7400	7467	65
2	7535	7603	7670	7738	7806	7873	7941	8008	8076	8143	66
3	8211	8279	8346	8414	8481	8549	8616	8684	8751	8818	67
4	8886	8953	9021	9088	9156	9223	9290	9358	9425	9492	68
645	9560	9627	9694	9762	9829	9896	9964	810031	810098	810165	69
1	810233	810300	810367	810434	810501	810569	810636	810703	810770	810837	70
2	0944	0971	1039	1106	1173	1240	1307	1374	1441	1508	71
3	1575	1642	1709	1776	1843	1910	1977	2044	2111	2178	72
4	2245	2312	2379	2445	2512	2579	2646	2713	2780	2847	73
650	812913	812980	813047	813114	813181	813247	813314	813381	813448	813514	74
1	3581	3648	3714	3781	3848	3914	3981	4048	4114	4181	75
2	4248	4314	4381	4447	4514	4581	4647	4714	4780	4847	76
3	4913	4980	5046	5113	5179	5246	5312	5378	5445	5511	77
4	5578	5644	5711	5777	5843	5910	5976	6042	6109	6175	78
655	6241	6308	6374	6440	6506	6573	6639	6705	6771	6838	79
1	6904	6970	7036	7102	7169	7235	7301	7367	7433	7499	80
2	7565	7631	7697	7764	7830	7895	7962	8028	8094	8160	81
3	8226	8292	8358	8424	8491	8556	8622	8688	8754	8820	82
4	8885	8951	9017	9083	9149	9215	9281	9346	9412	9478	83
660	819544	819610	819676	819741	819807	819873	819939	820004	820070	820136	84
1	820201	820267	820333	820399	820464	820530	820595	820661	820727	820792	85
2	0859	0924	0989	1055	1120	1185	1251	1317	1382	1448	86
3	1514	1579	1645	1710	1775	1841	1906	1972	2037	2103	87
4	2168	2233	2299	2364	2430	2495	2560	2626	2691	2756	88
665	2822	2887	2952	3018	3083	3148	3213	3279	3344	3409	89
1	3474	3539	3605	3670	3735	3800	3865	3930	3995	4060	90
2	4126	4191	4256	4321	4386	4451	4516	4581	4646	4711	91
3	4776	4841	4906	4971	5036	5101	5166	5231	5296	5361	92
4	5426	5491	5556	5621	5686	5751	5816	5881	5946	6011	93
670	826075	826140	826206	826271	826336	826401	826466	826531	826596	826661	94
1	6723	6787	6852	6917	6981	7045	7110	7175	7240	7305	95
2	7368	7433	7497	7562	7626	7691	7755	7820	7884	7949	96
3	8015	8080	8144	8209	8273	8338	8402	8467	8531	8596	97
4	8660	8724	8789	8853	8918	8982	9046	9111	9175	9239	98
675	9389	9453	9517	9581	9645	9709	9773	9837	9901	9965	99
1	9947	830011	830075	830139	830204	830268	830332	830396	830460	830525	100
2	830589	0653	0717	0781	0845	0909	0973	1037	1101	1166	101
3	1230	1294	1358	1422	1486	1550	1614	1678	1742	1806	102
4	1870	1934	1998	2062	2126	2190	2254	2318	2382	2446	103
680	832509	832573	832637	832701	832764	832828	832892	832956	833020	833083	104
1	3147	3211	3275	3338	3402	3466	3530	3593	3657	3721	105
2	3784	3848	3912	3975	4039	4103	4166	4230	4294	4357	106
3	4421	4484	4548	4611	4675	4739	4802	4866	4929	4993	107
4	5056	5120	5183	5247	5310	5373	5437	5500	5564	5627	108
685	5691	5754	5817	5881	5944	6007	6071	6134	6197	6261	109
1	6314	6387	6451	6514	6577	6641	6704	6767	6830	6894	110
2	6957	7020	7083	7146	7210	7273	7336	7399	7462	7525	111
3	7588	7652	7715	7778	7841	7904	7967	8030	8093	8156	112
4	8219	8282	8345	8408	8471	8534	8597	8660	8723	8786	113
690	838849	838912	838975	839038	839101	839164	839227	839290	839353	839415	114
1	9418	9541	9667	9792	9917	10042	10167	10292	10417	10542	115
2	840106	840169	840232	840295	840357	840420	840483	840546	840609	840672	116
3	0713	0776	0839	0902	0964	1027	1090	1152	1215	1277	117
4	1359	1422	1485	1547	1610	1672	1735	1797	1860	1922	118
695	1985	2047	2110	2172	2235	2297	2360	2422	2484	2547	119
1	2609	2672	2734	2796	2859	2921	2983	3045	3107	3170	120
2	3233	3295	3357	3420	3482	3544	3606	3668	3730	3792	121
3	3859	3921	3983	4045	4107	4169	4231	4293	4355	4417	122
4	4477	4539	4601	4664	4726	4788	4850	4912	4974	5036	123
N	C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
700	845098	845160	845222	845284	845346	845408	845470	845532	845594	845656	62
1	5718	5700	5842	5904	5966	6028	6090	6151	6213	6275	62
2	6337	6399	6461	6523	6585	6646	6708	6770	6832	6894	62
3	6955	7017	7079	7141	7202	7264	7326	7388	7449	7511	62
4	7573	7634	7696	7758	7819	7881	7943	8004	8066	8128	62
705	8189	8251	8312	8374	8435	8497	8559	8620	8682	8743	62
6	8805	8866	8928	8989	9051	9112	9174	9235	9297	9358	61
7	9419	9481	9542	9604	9665	9726	9788	9849	9911	9972	61
8	850333	850395	850456	850517	850579	850640	850701	850762	850824	850885	61
9	0646	0707	0769	0830	0891	0952	1014	1075	1136	1197	61
710	851258	851320	851381	851442	851503	851564	851625	851686	851747	851809	61
1	1870	1931	1992	2053	2114	2175	2236	2297	2358	2419	61
2	2480	2541	2602	2663	2724	2785	2846	2907	2968	3029	61
3	3090	3150	3211	3272	3333	3394	3455	3516	3577	3637	61
4	3698	3759	3820	3881	3941	4002	4063	4124	4185	4245	61
715	4306	4367	4428	4489	4549	4610	4670	4731	4792	4852	61
6	4913	4974	5034	5095	5156	5216	5277	5337	5398	5459	61
7	5519	5580	5640	5701	5761	5822	5882	5943	6003	6064	61
8	6124	6185	6245	6306	6366	6427	6487	6548	6609	6669	60
9	6729	6789	6850	6910	6970	7031	7091	7152	7212	7272	60
720	857332	857393	857453	857513	857574	857634	857694	857755	857815	857875	60
1	7935	7995	8056	8116	8176	8235	8297	8357	8417	8477	60
2	8537	8597	8657	8718	8778	8839	8899	8959	9018	9078	60
3	9138	9198	9258	9318	9378	9439	9499	9559	9619	9679	60
4	9739	9799	9859	9918	9978	860338	860398	860459	860519	860578	60
725	860338	860398	860458	860518	860578	860638	860698	860758	860818	860878	60
6	0937	0996	1056	1116	1176	1236	1295	1355	1415	1475	60
7	1534	1594	1654	1714	1774	1833	1893	1952	2012	2072	60
8	2131	2191	2251	2310	2370	2430	2489	2549	2609	2669	60
9	2728	2787	2847	2906	2966	3025	3085	3144	3204	3263	60
730	863323	863382	863442	863501	863561	863620	863680	863739	863799	863858	59
1	3917	3977	4036	4095	4155	4214	4274	4333	4392	4452	59
2	4511	4570	4630	4689	4748	4807	4867	4926	4985	5045	59
3	5104	5163	5222	5282	5341	5400	5459	5519	5578	5637	59
4	5696	5755	5814	5874	5933	5992	6051	6110	6169	6228	59
735	6287	6346	6405	6465	6524	6583	6642	6701	6760	6819	59
6	6878	6937	6996	7055	7114	7173	7232	7291	7350	7409	59
7	7467	7526	7585	7644	7703	7762	7821	7880	7939	7998	59
8	8056	8115	8174	8233	8292	8351	8409	8468	8527	8586	59
9	8644	8703	8762	8821	8879	8938	8997	9056	9114	9173	59
740	869232	869290	869348	869406	869466	869525	869584	869642	869701	869760	59
1	9818	9877	9935	9994	870353	870411	870470	870528	870587	870645	59
2	870404	870462	870521	870579	870638	870696	870755	870813	870872	870930	58
3	0989	1047	1106	1164	1223	1281	1339	1398	1456	1515	58
4	1573	1631	1690	1748	1806	1865	1923	1981	2040	2098	58
745	2156	2215	2273	2331	2389	2448	2506	2564	2622	2681	58
6	2739	2797	2855	2913	2972	3030	3088	3146	3204	3262	58
7	3321	3379	3437	3495	3553	3611	3669	3727	3785	3844	58
8	3902	3960	4018	4076	4134	4192	4250	4308	4366	4424	58
9	4482	4540	4598	4656	4714	4772	4830	4888	4945	5003	58
750	875061	875119	875177	875235	875293	875351	875409	875466	875524	875582	58
1	5640	5698	5756	5813	5871	5929	5987	6045	6102	6160	58
2	6218	6276	6333	6391	6449	6507	6564	6622	6680	6737	58
3	6795	6853	6910	6968	7026	7083	7141	7199	7256	7314	58
4	7371	7429	7487	7544	7602	7659	7717	7774	7832	7889	58
755	7947	8004	8062	8119	8177	8234	8292	8349	8407	8464	57
6	8522	8579	8637	8694	8752	8809	8866	8924	8981	9039	57
7	9096	9153	9211	9268	9325	9383	9440	9497	9555	9612	57
8	9669	9726	9784	9841	9898	9956	880073	880070	880127	880185	57
9	880242	880299	880356	880413	880471	880528	0585	0642	0699	0756	57
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
760	880814	880871	880928	880985	881042	881099	881156	881213	881271	881328	57
1	1385	1442	1499	1556	1613	1670	1727	1784	1841	1898	57
2	1953	2012	2069	2126	2183	2240	2297	2354	2411	2468	57
3	2533	2581	2638	2695	2752	2809	2866	2923	2980	3037	57
4	3093	3150	3207	3264	3321	3377	3434	3491	3548	3605	57
765	3661	3718	3775	3832	3888	3945	4002	4059	4115	4172	57
6	4229	4285	4342	4399	4455	4512	4569	4625	4682	4739	57
7	4795	4852	4909	4965	5022	5078	5135	5192	5248	5305	57
8	5361	5418	5474	5531	5587	5644	5700	5757	5813	5870	57
9	5926	5983	6039	6096	6152	6209	6265	6321	6378	6434	57
770	886491	886547	886604	886660	886716	886773	886829	886885	886942	886998	58
1	70.4	7111	7167	7223	7280	7336	7392	7448	7505	7561	58
2	7617	7674	7730	7786	7842	7898	7955	8011	8067	8123	58
3	81.9	8236	8292	8348	8404	8460	8516	8573	8629	8685	58
4	8741	8797	8853	8909	8965	9021	9077	9134	9190	9246	58
775	9302	9358	9414	9470	9526	9582	9638	9694	9750	9806	58
6	9862	9918	9974	9930	9986	9941	9997	9953	9909	9865	58
7	990477	990477	990477	0.89	0.89	0.89	0.89	0.89	0.89	0.89	58
8	9980	1035	1091	1147	1203	1259	1314	1370	1425	1482	58
9	1.37	1593	1649	1705	1760	1816	1872	1928	1983	2039	58
780	89.085	892150	892206	892262	892317	892373	892429	892484	892540	892595	58
1	2851	2707	2762	2818	2873	2929	2985	3040	3095	3151	58
2	3.07	3262	3318	3373	3429	3484	3540	3595	3651	3706	58
3	3762	3817	3873	3928	3984	4039	4094	4150	4205	4261	58
4	4316	4371	4427	4482	4538	4593	4649	4704	4759	4814	58
785	4870	4925	4980	5036	5091	5146	5201	5257	5312	5367	58
6	5423	5478	5533	5588	5644	5699	5754	5809	5864	5919	58
7	5975	6030	6085	6140	6195	6251	6306	6361	6416	6471	58
8	6525	6.51	6634	6692	6747	6802	6857	6911	6967	7022	58
9	7077	7132	7187	7242	7297	7352	7407	7462	7517	7572	58
790	897627	897682	897737	897792	897847	897902	897957	898012	898067	898122	58
1	8176	8231	8286	8341	8396	8451	8506	8561	8615	8670	58
2	8725	8780	8835	8890	8944	8999	9054	9109	9164	9219	58
3	9273	9328	9383	9437	9492	9547	9602	9657	9711	9766	58
4	9825	9875	9930	9985	9940	9995	9950	9905	9860	9815	58
795	990367	990422	990477	990531	990586	990640	990695	990749	990804	990859	58
6	0913	0968	1022	1077	1131	1186	1240	1295	1349	1404	58
7	1458	1513	1567	1622	1676	1731	1785	1840	1894	1948	58
8	2003	2057	2112	2166	2221	2275	2329	2384	2438	2492	58
9	2547	2601	2655	2710	2764	2818	2873	2927	2981	3036	58
800	9903090	9903144	9903199	9903253	9903307	9903361	9903416	9903470	9903524	9903578	58
1	3533	3607	3741	3795	3849	3904	3958	4012	4066	4120	58
2	4174	4229	4283	4337	4391	4445	4499	4553	4607	4661	58
3	4716	4770	4824	4878	4932	4986	5040	5094	5148	5202	58
4	5256	5310	5364	5418	5472	5526	5580	5634	5688	5742	58
805	5796	5850	5904	5958	6012	6066	6119	6173	6227	6281	58
6	6335	6389	6443	6497	6551	6604	6658	6712	6766	6820	58
7	6874	6927	6981	7035	7089	7143	7196	7250	7304	7358	58
8	7411	7465	7519	7573	7626	7680	7734	7787	7841	7895	58
9	7949	8002	8056	8110	8163	8217	8270	8324	8378	8431	58
810	998485	998539	998592	998646	998699	998753	998807	998860	998914	998967	58
1	9271	9324	9378	9431	9484	9537	9590	9643	9696	9750	58
2	9556	9610	9663	9716	9770	9823	9877	9930	9984	9937	58
3	990091	990144	990197	990251	990304	990358	990411	990464	990518	990571	58
4	9906.4	990678	990731	990784	990838	990891	990944	990998	991051	991104	58
815	1158	1211	1264	1317	1371	1424	1477	1530	1583	1637	58
6	1693	1745	1797	1850	1903	1956	2009	2061	2115	2169	58
7	2211	2273	2326	2381	2435	2488	2541	2594	2648	2702	58
8	2753	2806	2859	2913	2966	3019	3072	3125	3178	3231	58
9	3284	3337	3390	3443	3496	3549	3602	3655	3708	3761	58
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

परिनिष्ट द

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
880	944483	944532	944581	944631	944680	944729	944779	944828	944877	944927	49
1	4976	5025	5074	5124	5173	5222	5272	5321	5370	5419	49
2	5469	5518	5567	5616	5665	5715	5764	5813	5862	5912	49
3	5961	6010	6059	6108	6157	6207	6256	6305	6354	6403	49
4	6452	6501	6551	6600	6649	6698	6747	6796	6845	6894	49
885	6943	6992	7041	7090	7140	7189	7238	7287	7336	7385	49
6	7434	7483	7532	7581	7630	7679	7728	7777	7826	7875	49
7	7924	7973	8022	8070	8119	8168	8217	8266	8315	8364	49
8	8413	8462	8511	8560	8609	8657	8706	8755	8804	8853	49
9	8902	8951	8999	9048	9097	9146	9195	9244	9292	9341	49
890	949390	949439	949488	949536	949585	949634	949683	949731	949780	949829	49
1	9878	9926	9975	950024	950073	950121	950170	950219	950267	950316	49
2	950365	950414	950462	9511	9560	9609	9657	9706	9754	9803	49
3	9851	9900	9949	9997	1006	1055	1103	1152	1200	1249	49
4	1338	1386	1435	1483	1532	1580	1629	1677	1726	1775	49
895	1823	1872	1920	1969	2017	2066	2114	2163	2211	2260	48
6	2308	2356	2405	2453	2502	2550	2599	2647	2696	2744	48
7	2792	2841	2890	2938	2986	3034	3083	3131	3180	3228	48
8	3276	3325	3373	3421	3470	3518	3566	3615	3663	3711	48
9	3760	3808	3856	3905	3953	4001	4049	4098	4146	4194	48
900	954243	954291	954339	954387	954435	954484	954532	954580	954628	954677	48
1	4725	4773	4821	4869	4918	4966	5014	5062	5110	5158	48
2	5207	5255	5303	5351	5399	5447	5495	5543	5592	5640	48
3	5688	5736	5784	5832	5880	5928	5976	6024	6072	6120	48
4	6168	6216	6265	6313	6361	6409	6457	6505	6553	6601	48
905	6643	6692	6741	6790	6838	6886	6935	6984	7032	7080	48
6	7128	7176	7224	7272	7320	7368	7416	7464	7512	7560	48
7	7607	7655	7703	7751	7799	7847	7894	7942	7990	8038	48
8	8086	8134	8181	8229	8277	8325	8373	8421	8468	8516	48
9	8564	8612	8659	8707	8755	8803	8850	8898	8946	8994	48
910	959041	959089	959137	959185	959232	959280	959328	959375	959423	959471	48
1	9518	9566	9614	9661	9709	9757	9804	9852	9900	9947	48
2	9955	960042	960090	960138	960185	960233	960280	960328	960376	960423	48
3	960471	960518	960566	960613	960661	960709	960756	960804	960851	960899	48
4	0946	0994	1041	1089	1136	1184	1231	1279	1326	1374	48
915	1421	1469	1516	1563	1611	1658	1705	1753	1801	1848	47
6	1895	1943	1990	2038	2085	2132	2180	2227	2275	2322	47
7	2369	2417	2464	2511	2559	2606	2653	2701	2748	2795	47
8	2843	2890	2937	2985	3032	3079	3126	3174	3221	3268	47
9	3316	3363	3410	3457	3504	3552	3599	3646	3693	3741	47
920	963789	963835	963882	963929	963977	964024	964071	964118	964165	964212	47
1	4250	4307	4354	4401	4448	4495	4542	4590	4637	4684	47
2	4631	4778	4825	4872	4919	4966	5013	5061	5108	5155	47
3	5202	5249	5296	5343	5390	5437	5484	5531	5578	5625	47
4	5672	5719	5766	5813	5860	5907	5954	6001	6048	6095	47
925	6142	6189	6236	6283	6329	6376	6423	6470	6517	6564	47
6	6611	6658	6705	6752	6799	6845	6892	6939	6986	7033	47
7	7080	7127	7173	7220	7267	7314	7361	7408	7454	7501	47
8	7548	7595	7642	7688	7735	7782	7829	7875	7922	7969	47
9	8016	8062	8109	8156	8203	8249	8296	8343	8390	8438	47
930	964483	964530	964576	964623	964670	964716	964763	964810	964856	964903	47
1	8950	8996	9043	9090	9136	9183	9229	9276	9323	9369	47
2	9416	9463	9509	9556	9602	9649	9695	9742	9789	9835	47
3	9882	9928	9975	970021	970068	970114	970161	970207	970254	970300	47
4	970347	970393	970440	970486	970533	970579	970626	970672	970719	970765	47
935	9812	9858	9904	9951	9997	1004	1090	1137	1183	1229	45
6	1216	1322	1369	1415	1461	1508	1554	1601	1647	1693	45
7	1740	1786	1832	1879	1925	1971	2018	2064	2110	2157	45
8	2201	2249	2295	2342	2388	2434	2481	2527	2573	2619	45
9	2666	2712	2758	2804	2851	2897	2943	2989	3035	3082	45
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
340	973128	973124	973220	973186	973313	973359	973405	973451	973497	973543	45
1	3590	3636	3682	3728	3774	3820	3866	3913	3959	4005	45
2	4051	4097	4143	4189	4235	4281	4327	4374	4420	4466	45
3	4512	4558	4604	4650	4696	4742	4788	4834	4880	4926	45
4	4972	5018	5064	5110	5156	5202	5248	5294	5340	5386	45
341	5437	5483	5529	5575	5621	5667	5713	5759	5805	5851	45
5	5931	5977	6023	6069	6115	6161	6207	6253	6299	6345	45
6	6390	6436	6482	6528	6574	6620	6666	6712	6758	6804	45
7	6850	6896	6942	6988	7034	7080	7126	7172	7218	7264	45
8	7306	7352	7398	7444	7490	7536	7582	7628	7674	7720	45
350	77724	97709	97795	97781	97796	97792	97798	97804	97809	97815	45
1	2181	2226	2272	2317	2363	2409	2454	2500	2546	2591	45
2	2637	2683	2728	2774	2820	2865	2911	2956	3002	3047	45
3	3093	3138	3184	3229	3275	3320	3366	3411	3457	3502	45
4	3548	3594	3639	3685	3730	3776	3821	3867	3912	3958	45
355	980001	980049	980094	980140	980185	980231	980276	980322	980367	980412	45
5	0454	0500	0545	0591	0636	0682	0727	0773	0818	0863	45
6	0912	0957	1003	1048	1093	1139	1184	1229	1275	1320	45
7	1365	1411	1456	1502	1547	1592	1638	1683	1728	1773	45
8	1813	1858	1903	1949	1994	2039	2085	2130	2175	2220	45
360	58127	581316	58132	58137	58142	58147	58153	58158	58163	58168	45
1	2123	2168	2214	2259	2304	2349	2394	2439	2484	2529	45
2	2575	2620	2665	2710	2755	2800	2845	2890	2935	2980	45
3	3025	3070	3115	3160	3205	3250	3295	3340	3385	3430	45
4	4077	4122	4167	4212	4257	4302	4347	4392	4437	4482	45
365	4427	4472	4517	4562	4607	4652	4697	4742	4787	4832	45
5	4877	4922	4967	5012	5057	5102	5147	5192	5237	5282	45
6	5327	5372	5417	5462	5507	5552	5597	5642	5687	5732	45
7	5777	5822	5867	5912	5957	6002	6047	6092	6137	6182	45
8	6232	6277	6322	6367	6412	6457	6502	6547	6592	6637	45
370	980712	980817	980921	981026	981131	981236	981341	981446	981551	981656	45
1	7113	7158	7203	7248	7293	7338	7383	7428	7473	7518	45
2	7563	7608	7653	7698	7743	7788	7833	7878	7923	7968	45
3	8013	8058	8103	8148	8193	8238	8283	8328	8373	8418	45
4	8463	8508	8553	8598	8643	8688	8733	8778	8823	8868	45
375	9001	9003	9004	9005	9006	9007	9008	9009	9010	9011	45
5	9012	9013	9014	9015	9016	9017	9018	9019	9020	9021	45
6	9022	9023	9024	9025	9026	9027	9028	9029	9030	9031	45
7	9032	9033	9034	9035	9036	9037	9038	9039	9040	9041	45
8	9042	9043	9044	9045	9046	9047	9048	9049	9050	9051	45
380	91128	91129	91130	91131	91132	91133	91134	91135	91136	91137	45
1	1189	1193	1197	1201	1205	1209	1213	1217	1221	1225	45
2	1229	1233	1237	1241	1245	1249	1253	1257	1261	1265	45
3	1269	1273	1277	1281	1285	1289	1293	1297	1301	1305	45
4	1309	1313	1317	1321	1325	1329	1333	1337	1341	1345	45
385	3416	3461	3506	3551	3596	3641	3686	3731	3776	3821	45
5	3867	3912	3957	4002	4047	4092	4137	4182	4227	4272	45
6	4317	4362	4407	4452	4497	4542	4587	4632	4677	4722	45
7	4767	4812	4857	4902	4947	4992	5037	5082	5127	5172	45
8	5217	5262	5307	5352	5397	5442	5487	5532	5577	5622	45
390	995615	995672	995729	995786	995843	995900	995957	996014	996071	996128	45
1	6074	6119	6164	6209	6254	6299	6344	6389	6434	6479	45
2	6524	6569	6614	6659	6704	6749	6794	6839	6884	6929	45
3	6974	7019	7064	7109	7154	7199	7244	7289	7334	7379	45
4	7424	7469	7514	7559	7604	7649	7694	7739	7784	7829	45
395	7875	7920	7965	8010	8055	8100	8145	8190	8235	8280	45
5	8325	8370	8415	8460	8505	8550	8595	8640	8685	8730	45
6	8775	8820	8865	8910	8955	9000	9045	9090	9135	9180	45
7	9225	9270	9315	9360	9405	9450	9495	9540	9585	9630	45
8	9675	9720	9765	9810	9855	9900	9945	9990	10035	10080	45
N	D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

परिशिष्ट ध

निरूपण

परिच्छेद 9.1

यह सिद्ध करने के लिए कि $\sum x = 0$,

मान लिया $x_1 = X_1 - \bar{X}$, $x_2 = X_2 - \bar{X}$, . . . , $x_N = X_N - \bar{X}$.

फिर $\sum x = \sum (X - \bar{X})$
 $= \sum X - N\bar{X}$

किन्तु $\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$.

अतः, $\sum x = \sum X - N \frac{\sum X}{N} = 0$

परिच्छेद 9.2

यह सिद्ध करने के लिए कि $\bar{X} = \bar{X}_d + \frac{\sum d}{N}$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$$

\bar{X}_d के योग और व्यवकमन से,

$$\bar{X} = \bar{X}_d + \frac{(X_1 - \bar{X}_d) + (X_2 - \bar{X}_d) + \dots + (X_N - \bar{X}_d)}{N}$$

किन्तु, सीमांकन से,

$$d_1 = X_1 - \bar{X}_d, d_2 = X_2 - \bar{X}_d, \dots, d_N = X_N - \bar{X}_d$$

फिर

$$\begin{aligned} X &= \bar{X}_d + d_1 + d_2 + \dots + d_N \\ &= \bar{X}_d + \frac{\sum d}{N} \end{aligned}$$

यदि प्रत्येक मद को उसकी बारंबारता से भारित किया जाय तो व्यञ्जक होगा

$$\bar{X} = \bar{X}_d + \frac{\sum fd}{N}$$

परिच्छेद 93

यह सिद्ध करने के लिए कि उन घनात्मक मानों की श्रेणी के लिए जो सब समान नहीं हैं, $\lambda > G$

X_1 तथा X_2 श्रेणी के न्यूनतम और अधिकतम मान हैं। उन दो मानों के लिए,

$$(X_1 - X_2)^2 > 0$$

$$\lambda_1 - 2\lambda_1 X_1 + X_1^2 > 0$$

सममानता के दोनों ओर $4\lambda_1 X_1$ के योग से हम प्राप्त करते हैं

$$X_1^2 + 2X_1 X_2 + X_2^2 > 4X_1 X_2$$

वर्गमूल निकालने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\lambda_1 + X_2 > 2\sqrt{X_1 X_2} \text{ तथा}$$

$$\frac{\lambda_1 + X_2}{2} > \sqrt{X_1 X_2}$$

यदि λ_1 तथा X_2 में प्रत्येक के स्थान पर $\frac{X_1 + X_2}{2}$ की प्रतिस्थापना कर दी जाय तो पूरी श्रेणी के लिए λ का मान परिनिर्णित नहीं होता। फिर भी ऐसी प्रतिस्थापना से G का मान बढ़ जाता है क्योंकि $\frac{X_1 + X_2}{2} > \sqrt{X_1 X_2}$ तथा गुणोत्तर माध्य को $\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2$ का अगुवान $X_1 X_2$ के बराबर होने से बढ़ जाता है। न्यूनतम और अधिकतम मानों के लिए इस प्रक्रिया की सतत पुनरावृत्ति के परिणामस्वरूप G का मान मूल बढ़ता रहता है जो X के निकट पहुँच जाता है और अनन्त प्रतिस्थापना के बाद उसके बराबर हो जाता है क्योंकि उस दशा में अल्पतम मान मूल बड़ी होगा।

परिच्छेद 94

यह सिद्ध करने के लिए कि उन घनात्मक मानों की श्रेणी के लिए जो सब समान नहीं हैं, $G > H$

X_1 तथा X_2 श्रेणी के न्यूनतम और अधिकतम मान हैं। पिछले परिच्छेद में, यह दिखाया गया था कि

$$\lambda_1 + X_2 > 2\sqrt{X_1 X_2}$$

इसलिए,

$$\sqrt{X_1 X_2} (X_1 + X_2) > 2X_1 X_2 \text{ तथा}$$

$$\sqrt{X_1 X_2} > \frac{2X_1 X_2}{X_1 + X_2}$$

किन्तु $\frac{2X_1 X_2}{X_1 + X_2} = \frac{2}{\frac{X_1 + X_2}{X_1 X_2}} = \frac{2}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2}}$, जो H है।

किन्तु क्योंकि $\frac{\sum 1}{N} = 1,$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sum x}{N}} &= \sqrt{-\frac{1}{N} - 21 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{\sum 1}{N} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N} - \left(\frac{\sum 1}{N}\right)^2}\end{aligned}$$

यह स्पष्ट करन पर कि $d = \lambda - 1_d$, अथवा $1 = d + 1_d$

हमलिए

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sum \lambda^2}{N} - \left(\frac{\sum 1}{N}\right)^2} &= \sqrt{\frac{\sum (d + 1_d)^2}{N} - \left[\frac{(d + 1_d)}{N}\right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{\sum (d + 2d1_d + 1_d^2)}{N} - \left(\frac{\sum d + N1_d}{N}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\sum d + 21_d \sum d + N1_d^2}{N} - \frac{(\sum d)^2 + 2N1_d \sum d + N1_d^2}{N}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum d}{N} + 21_d \frac{\sum d}{N} + 1_d - \frac{(\sum d)^2}{N^2} - 21_d \frac{\sum d}{N} - 1_d^2} \\ &= \sqrt{\frac{\sum d}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}\end{aligned}$$

तारवारता बढन के लिए

$$s = \sqrt{\frac{\sum fx}{N}}, \text{ तथा } \sqrt{\frac{\sum fx}{N}} = \sqrt{\frac{\sum fd}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}.$$

अथवा, वग अन्तराल के सम्बन्ध में विचलनो के साथ

$$\sqrt{\frac{\sum fx}{N}} = \sqrt{\frac{\sum f(d)^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$$

परिच्छेद 10 3

यह सिद्ध करने के लिए कि $-3 = \frac{\sum f(d')^2}{N} - 3 \frac{\sum fd'}{N} \frac{\sum f(d)^2}{N} + 2 \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2$

परिच्छेद 9 2 में दिखाया गया था कि

$$1 = 1_d + \frac{\sum d}{N}$$

किमी चुन हए, १ मान क लिए, उदाहरणार्थ $Y_1, x_1 = Y_1 - \bar{X} = X_1 - \bar{X} - \frac{\sum d}{N}$.

किन्तु $x_1 - \bar{X} = d_1$ अर्थात् $x_1 = d_1 - \frac{\sum d}{N}$

इसी प्रकार, $x_2 = d_2 - \frac{\sum d}{N}$, $x_3 = d_3 - \frac{\sum d}{N}$, इत्यादि।

$$\begin{aligned} \text{अतः, } \frac{\sum x^2}{N} &= \frac{\sum \left(d - \frac{\sum d}{N} \right)^2}{N} \\ &= \frac{\sum \left[d^2 - 3 \frac{\sum d}{N} d + 3 \left(\frac{\sum d}{N} \right)^2 d - \left(\frac{\sum d}{N} \right)^3 \right]}{N} \\ &= \frac{\sum d^2 - 3 \frac{\sum d}{N} \sum d + 3 \left(\frac{\sum d}{N} \right)^2 \sum d - N \left(\frac{\sum d}{N} \right)^3}{N} \\ &= \frac{\sum d^2}{N} - 3 \frac{\sum d}{N} \frac{\sum d}{N} + 3 \left(\frac{\sum d}{N} \right)^2 \frac{\sum d}{N} - \left(\frac{\sum d}{N} \right)^3 \\ &= \frac{\sum d^2}{N} - 3 \frac{\sum d}{N} \frac{\sum d}{N} + 3 \left(\frac{\sum d}{N} \right)^2 \frac{\sum d}{N} - \left(\frac{\sum d}{N} \right)^3 \\ &= \frac{\sum d^2}{N} - 3 \frac{\sum d}{N} \frac{\sum d}{N} + 3 \left(\frac{\sum d}{N} \right)^2 \frac{\sum d}{N} - \left(\frac{\sum d}{N} \right)^3 \\ &= \frac{\sum d^2}{N} - 3 \frac{d}{N} \frac{\sum d}{N} + 2 \left(\frac{\sum d}{N} \right)^3 \end{aligned}$$

वारवारणा बटन के लिए यह हो जाना है

$$\frac{\sum f x^2}{N} = \frac{\sum f d^2}{N} - 3 \frac{\sum f d}{N} \frac{\sum f d}{N} + 2 \left(\frac{\sum f d}{N} \right)^3$$

अथवा, घनफल किय गए वर्ग-अन्तराल के रूप में,

$$-3 = \frac{\sum f (d')^2}{N} - 3 \frac{\sum f d'}{N} \frac{\sum f (d')^2}{N} + 2 \left(\frac{\sum f d'}{N} \right)^3$$

परिच्छेद 12.1

न्यूनतम वर्ग विक्षेप

निम्नलिखित चर्चा में यह मान लिया गया है कि आकस्मिक त्रुटियों का बटन प्रसामान्य वक्र का अनुमरण करता है, तथा सर्वोत्तम केन्द्रीय मान, जिनसे ऐसे आकस्मिक विचलनों को मापा जा सके, वह मान है जो विचलनों के प्रसामान्य बटन को अत्यधिक प्राधिक बनाना है।

मान लीजिए, हम विचलनों, अथवा त्रुटियों, तथा अन्तरालों की, जिनमें वे स्थित हों, धीमी या निम्नांकित सकेत चिह्न व्यक्त करें हैं

क्याकि किसी समस्या को ऋणात्मक घात तक ल जाने से वह अधिकतम हो जाएगी जब वह घातांक न्यूनतम होगा अतः P अधिकतम होगा यदि $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ न्यूनतम हो। अतः यह प्राप्ति कि किसी केन्द्रीय मान से आकस्मिक विचलन प्रसामान्य वक्र का अनुसरण करेंगे अधिकतम होगी जब उस केन्द्रीय मान से वर्गीकृत विचलनों का योग न्यूनतम स्थिति पर हो।

परिच्छेद 12.2

न्यूनतम वर्गों की विधि में प्राप्त जितने ऋजु रेखा के लिए प्रसामान्य समीकरणों की व्युत्पत्ति

यदि Y_c उपनति या परिकल्पित मान है तो $Y - Y_c$ उपनति से विचलन है। न्यूनतम वर्गों की कसौटी को सन्तुष्ट करने के लिए $\sum (Y - Y_c)^2$ को अल्पतम होना चाहिए। क्योंकि ऋजु रेखा समीकरण रूप है $Y_c = a + bX$,

$$\sum (Y - Y_c)^2 = \sum [Y - (a + bX)]^2 = \sum (Y - a - bX)$$

बढ़ान से, यह व्यञ्जक बन जाता है

$$\sum Y^2 - 2a \sum Y - 2b \sum XY + Na^2 + 2ab \sum X + b^2 \sum X^2 \quad (1)$$

यदि इस व्यञ्जक को a तथा b के लिए हल किया जाय, तो हमें दो प्रसामान्य समीकरण मिलेंगे। व्यञ्जक (1) को a की अवरोही घात के अनुसार लिखने से

$$Na^2 + 2a(b \sum X - \sum Y) + \sum Y^2 - 2b \sum XY + b^2 \sum X^2$$

यह $pm^2 + qm + r$ रूप का द्विघात है जहाँ p है N , m है a , q है $2(b \sum X - \sum Y)$, तथा r है $\sum Y^2 - 2b \sum XY + b^2 \sum X^2$ यदि p घनात्मक हो (जैसा कि इसे सार्विकीय समस्याओं के लिए हमेशा होना चाहिए जब $p = N$), ऐसे द्विघात का अल्पतम मान होता है जब $m = -\frac{q}{2p}$ इसलिए

$$a = \frac{-2(b \sum X - \sum Y)}{2N} = \frac{\sum Y - b \sum X}{N} \quad (2)$$

(2) को दुबारा लिखने से प्राप्त होता है

$$\sum Y = Na + b \sum X \quad \text{प्रथम प्रसामान्य समीकरण।}$$

व्यञ्जक (1) को b की अवरोही घात के अनुसार व्यवस्थित करने से प्राप्त होता है

$$b^2 \sum X^2 + 2b(a \sum X - \sum XY) + \sum Y^2 - 2a \sum Y + Na^2 \quad (3)$$

इस द्विघात में, p है $\sum X^2$, m है b , q है $2(a \sum X - \sum XY)$ तथा r है $\sum Y^2 - 2a \sum Y + Na^2$ क्योंकि $\sum X^2$ घनात्मक है व्यञ्जक (3) का मान अल्पतम होगा जब $m = -\frac{q}{2p}$, अतः

$$b = \frac{-2(a \sum X - \sum XY)}{2 \sum X^2} = \frac{\sum XY - a \sum X}{\sum X^2} \quad (4)$$

(4) को दुबारा लिखने से प्राप्त होता है

$$\Sigma_1 X = a \Sigma_1 1 + b \Sigma_1 1 \quad \text{द्वितीय प्रमेयानुसार समीकरण 1}$$

परिच्छेद 131

$1, = k + ab^1$ रूप के वृद्धि वक्र के आसन्न के लिए समीकरणों की व्युत्पत्ति

घातिका के प्रत्येक नीचे के रूप की सराया को n द्वारा निरूपित या पदनामित करने से प्रथम समीकरण (के लिए समीकरण I, पृष्ठ 271) है

$$\begin{aligned} \Sigma_1 X &= nk + a + ab + ab^2 + \dots + ab^{n-1} \\ &= nk + a [1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1}] \end{aligned}$$

यदि प्रथम कोष्ठको के भीतर के व्यंजक को $\frac{b^n - 1}{b - 1}$ द्वारा गुणा किया जाए तो हम पाते हैं

$$\frac{[1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^{n-1}] (b - 1)}{b - 1} \quad (1)$$

$$= \frac{b + b^2 + b^3 + \dots + b^{n-1} + b - 1}{(b - 1)} = \frac{b + b^2 + \dots + b^{n-1} - b + b}{(b - 1)} = \frac{b + b^2 + \dots + b^{n-1} - b + b}{(b - 1)} \quad (2)$$

$$= \frac{b^n - 1}{b - 1}$$

व्यंजक (2) के भाज्य में दिखाई गई चीज सध्या है $b^n - 1$ यह इस तथ्य का अनुगमन करता है कि व्यंजक (1) में कोष्ठको के भीतर वर्तमान सराया में शाय की सराया को भी b^{n-1} के समान पदनामित या निरूपित किया जा सकता है तथा $b^n \times b = b^{n+1}$ सभी तीनों समीकरण उन्हीं से प्राप्त किए गए हैं। वे हैं

$$\text{I } \Sigma_1 Y = nk + a \left(\frac{b^n - 1}{b - 1} \right)$$

$$\text{II } \Sigma_2 Y = nk + ab^n \left(\frac{b^n - 1}{b - 1} \right)$$

$$\text{III } \Sigma_3 Y = nk + ab^{2n} \left(\frac{b^n - 1}{b - 1} \right)$$

यदीकरण A B तथा C सब हैं

$$\text{A } \Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y = a \left(\frac{b^n - 1}{b - 1} \right) (b^n - 1) = a \frac{(b^n - 1)^2}{b - 1}$$

$$\text{B } \Sigma_3 Y - \Sigma_2 Y = ab^n \frac{(b^n - 1)^2}{b - 1}$$

$$\text{C } \frac{\Sigma_3 1 - \Sigma_2 1}{\Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y} = ab^n \frac{(b^n - 1)^2}{b - 1} - a \frac{(b^n - 1)^2}{b - 1} = b^n$$

यह सिद्ध करने के लिए कि $J = Y^2 - Y$

अध्याय 21 की पाठ टिप्पणी 3 में Σx के लिए उद्धृत प्रविधि से यह दिगम्या जा सकता है कि

$$y = \bar{y} - 1 \Sigma y$$

इसी प्रकार यह स्पष्ट है कि $\Sigma y^2 = Y^2 - Y$

किन्तु $\bar{y} = \bar{y}$ (समीकरण 2) तथा $\bar{y} = \bar{y}$ (समीकरण 1)

इसलिए, $\Sigma y^2 = \Sigma \bar{y}^2 - 1$ (4)

यह सिद्ध करने के लिए कि $\Sigma y = \Sigma Y$

$$\Sigma y^2 = \Sigma (\bar{y} - 1)^2$$

$$= \Sigma \bar{y}^2 - 2 \Sigma \bar{y} + \Sigma 1$$

किन्तु $\bar{y} = a + bX$ अतएव $\Sigma \bar{y} = \Sigma (a + bX) = \Sigma (a + bX)$

$$= a \Sigma 1 + b \Sigma X$$

अब $a \Sigma Y + b \Sigma Y^2 = \Sigma \bar{y}$ (समीकरण 3)।

इसलिए $\Sigma y^2 = \Sigma \bar{y}^2 - 2 \Sigma \bar{y} + \Sigma 1$

$$= \Sigma \bar{y}^2 - \Sigma \bar{y} \quad (5)$$

यह सिद्ध करने के लिए कि $\Sigma y^2 = b \Sigma xy$

$$\Sigma y^2 = \Sigma (bX)^2 = b^2 \Sigma X^2 = b \Sigma \frac{X^2}{X} = b \Sigma xy \quad (6)$$

यह सिद्ध करने के लिए कि $\Sigma y = \Sigma Y^2 - \Sigma y^2$

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \Sigma Y^2 \quad (\text{समीकरण 5})$$

किन्तु

$$\Sigma Y^2 = \Sigma y + \Sigma \Sigma Y$$

$$\Sigma Y^2 = \Sigma y^2 + \Sigma \Sigma Y \quad (\text{समीकरण 4})$$

इसलिए

$$\begin{aligned} \Sigma y^2 &= (\Sigma y^2 + \Sigma \Sigma Y) - (\Sigma y^2 + \Sigma \Sigma Y) \\ &= \Sigma y - \Sigma y^2 \end{aligned} \quad (7)$$

परिच्छेद 19.2

ऋजु रेखा समीकरण के लिए स्थितों की व्युत्पत्ति जब मूल \bar{X} \bar{Y} पर हो

प्रकृतम वर्गों की विधि से ऋजु रेखा के आसन्न के लिए प्रामाण्य समीकरण हैं

$$\Sigma Y = Na + b \Sigma X$$

$$\Sigma XY = a \Sigma X + b \Sigma Y^2$$

यदि मूल 0,0 के स्थान पर \bar{X}, \bar{Y} पर ले लिया जाय, तो हम पाते हैं

$$\Sigma y = Na + b\Sigma x,$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

$$\text{किन्तु } \Sigma y = 0 \text{ तथा } \Sigma x = 0$$

$$\text{इसलिए, } a = 0, \text{ तथा } b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

प्राप्त समीकरण है जाता है $y_c = bx$ वजाय $Y_c = a + bX$

परिच्छेद 19.3

यह सिद्ध करने के लिए कि $\frac{\Sigma y^2}{\Sigma y^2} = \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2 \Sigma y^2}$

क्योंकि $y_c = bx$ मत हम लिख सकते हैं

$$\frac{\Sigma y_c^2}{\Sigma y^2} = \frac{\Sigma (bx)^2}{\Sigma y^2} = \frac{b^2 \Sigma x^2}{\Sigma y^2}$$

हमारे प्रस्तावित समीकरण से $b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$ इसलिए,

$$\frac{\Sigma y_c}{\Sigma y^2} = \frac{\left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right) \Sigma x^2}{\Sigma y^2} = \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2 \Sigma y^2}$$

परिच्छेद 19.4

यह सिद्ध करने के लिए कि $\frac{\Sigma xy}{N s_x s_y} = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$

$$\Sigma xy = \Sigma [(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})] = \Sigma (XY - X\bar{Y} - \bar{X}Y + \bar{X}\bar{Y}),$$

$$= \Sigma XY - X \Sigma Y - Y \Sigma X + N \bar{X} \bar{Y},$$

$$= \Sigma XY - N \bar{X} \bar{Y} - N \bar{Y} \bar{X} + N \bar{X} \bar{Y}$$

$$= \Sigma XY - N \bar{X} \bar{Y}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}, \text{ तथा } s_y = \sqrt{\frac{\Sigma Y^2}{N} - \left(\frac{\Sigma Y}{N}\right)^2}$$

इसलिए,

$$\begin{aligned} \frac{\sum Y}{N s_Y s_Y} &= \frac{\sum Y - N \bar{Y}}{N \sqrt{\frac{1}{N}} \left(\frac{-1}{N} \right) \sqrt{\frac{1}{N}} - \left(\frac{-1}{N} \right)} \\ &= \left[\sqrt{\frac{1}{N}} \left(\frac{-1}{N} \right) \right] \left[\sqrt{\frac{1}{N}} \sqrt{\frac{1}{N}} - \left(\frac{-1}{N} \right) \right] \\ &= \frac{\sum Y - N \bar{Y}}{\sqrt{[1 - (-1)]} [\sqrt{1} - (-1)]} \end{aligned}$$

परिच्छेद 19 5

प्रदत्त है कि $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ बिना द्विगुणित या गुणित के N के द्वारा केवल पूरे सत्या 1 के मानों को ग्रहण कर सकते हैं तथा यही $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ के विषय में भी सत्य है।

यह सिद्ध करने के लिए कि $r_{rank} = 1 - \frac{6 D}{N(N-1)}$

परिच्छेद 24 4 में समानर माध्यों के लिए निर्दिष्ट प्रमाण के समानांतर यह दिखाया जा सकता है कि

$$s_j = s_1 + s_1^2 - 2rs_1s_1$$

जहाँ $D = X - 1$ इस सम्बन्ध का अनुगामी परिणाम है कि

$$r = \frac{s_1 + s_1 - \frac{\sum D}{N}}{2s_1s_1}$$

किन्तु $\sum X = \sum Y$ जब हम काटियों पर विचार कर रहे हों। अतः

$$r_{rank} = \frac{2s_1^2 - \frac{\sum D}{N}}{2s_1^2} = 1 - \frac{\sum D}{2Ns_1}$$

अब $\sum X$ है प्रथम N प्रकृत सत्याओं का योग अथवा $\frac{N(N+1)}{2}$

$$\bar{X} = \frac{N+1}{2},$$

तथा $\sum X^2$ है प्रथम N प्रकृत सत्याओं के वर्गों का योग अथवा

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \text{ इसलिए,}$$

$$\begin{aligned}
 Ns_{\bar{X}}^2 &= \sum (X - \bar{X})^2 = \sum X^2 - \bar{X} \sum X, \\
 &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N+1}{2} \cdot \frac{N(N+1)}{2}, \\
 &= \frac{2N(N+1)(2N+1) - 3N(N+1)^2}{12} \\
 &= \frac{N(N^2 - 1)}{12}
 \end{aligned}$$

r के लिए व्यंजक में प्रतिस्थापन द्वारा हम पाते हैं

$$r_{\text{cor}} = 1 - \frac{\frac{\sum D}{N(N^2 - 1)}}{6} = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

परिच्छेद 20.1

ह्रासमान निरपेक्ष प्रतिफलों का बिन्दु सम्पूर्ण प्रतिफलों के वक्र में सर्वोच्च बिन्दु होता है। इस बिन्दु पर ढाल शून्य होता है। किसी भी बिन्दु पर वक्र का ढाल, समीकरण के प्रथम अवकलज को लेकर मानून किया जा सकता है। समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ का प्रथम अवकलज है

$$\frac{dY_c}{dX} = b + 2cX + 3dX^2.$$

$$\frac{dY_c}{dX} = 0, \text{ स्थिर करने से, हम पाते हैं } X = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 3bd}}{3d}.$$

सम्पूर्ण प्रतिफलों के समीकरण $Y_c = 890.32 + 78.264X + 20.324X^2 - 4.4649X^3$ के लिए उपर्युक्त समीकरण प्रदान करता है $X = -1.337$ तथा 4.371 जब ढाल शून्य हो, तब हम अधिकतम या अल्पतम बिन्दु पाते हैं। X के केवल पन्नात्मक मान हमारे लिए उपयोगी हैं, तथा चार्ट 20.3 को देखने से ज्ञात होता है कि जब X , 4 के निकटतम होता है तब अधिकतम की उपलब्धि होती है। अर्थात्, यदि पाठक Y_c मानों का $X = -1.337$ तथा $X = 4.371$ के आसपास परिकलन करेगा तो वह पाएगा कि प्रथम अल्पतम है और बाद का अधिकतम। जब $X = 4.371$, तब परिकलित सम्पूर्ण प्रतिफल $Y_c = 1,247.85$ सम्पूर्ण प्रतिफलों के ह्रासमान बिन्दु की उपलब्धि होती है जब नाइट्रोजन का आदान 4.371 प्रतिशत हो। इस बिन्दु पर आकलित उपज 1,247.85 पाउंड है।

सीमान्त प्रतिफल का ह्रासमान-बिन्दु वक्र में नति-परिवर्तन का बिन्दु है। यह वह बिन्दु है जिस पर ढाल में परिवर्तन शून्य है। ढाल में परिवर्तन आकलन समीकरण का दूसरा अवकलज है। इस प्रकार,

$$\frac{d^2 Y_c}{d\lambda^2} = 2c + 6d\lambda$$

$$\frac{d^2 Y_c}{d\lambda^2} = 0 \text{ स्थिर करते हुए, हम प्राप्त करते हैं } \lambda = -\frac{c}{3d}$$

सम्पूर्ण प्रतिक्रिया के मधीकरण के लिए नति-परिवर्तन-बिन्दु है $\lambda = 1.517$ इस प्रकार सीमागत प्रतिक्रिया का सामान्य बिन्दु प्राप्त हो जाता है जब नाइट्रोजन का आदान 1.517 प्रतिशत होता है। इस बिन्दु पर आकलित उपज है $Y_c = 1.04023$ पाउंड।

परिच्छेद 21।

यह सिद्ध करने के लिए कि

$$\left(\frac{r_{12} - r_{11}r_{21}}{\sqrt{1-r_{11}^2}\sqrt{1-r_{22}^2}} \right)^2 = \frac{1-r_{11}^2 - 1-r_{22}^2}{1-r_{11}^2 - 1-r_{22}^2}$$

इसी प्रकार के अन्य सूत्रों का निरूपण भी इसी आधार पर होगा।

$$\text{यदि } r_{12} = \frac{r_{11} - r_{11}r_{21}}{\sqrt{1-r_{11}^2}\sqrt{1-r_{22}^2}}, \dots \dots \dots (1)$$

$$r_{12}^2 = \frac{r_{11}^2 - 2r_{11}r_{12}r_{21} + r_{11}^2r_{21}^2}{1-r_{11}^2 - r_{22}^2 + r_{11}^2r_{22}^2}$$

$$\text{किन्तु } r_{12}^2 = \frac{(\sum x_1 x_2)^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2}, r_1 = \frac{\sum x_1 x}{\sqrt{\sum x_1^2 \sum x^2}}, \text{ तथा अन्य } r\text{'s के लिए इसी}$$

प्रकार के सूत्र प्राप्त होते हैं। इसलिए

$$\begin{aligned} r_{12}^2 = & \frac{(\sum x_1 x_2)^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2} - 2 \left[\frac{\sum x_1 x_2}{\sqrt{\sum x_1^2 \sum x_2^2}} \times \frac{\sum x_1 x}{\sqrt{\sum x_1^2 \sum x^2}} \times \frac{\sum x_2 x}{\sqrt{\sum x_2^2 \sum x^2}} \right] + \left[\frac{(\sum x_1 x)^2}{\sum x_1^2 \sum x^2} \times \frac{(\sum x_2 x)^2}{\sum x_2^2 \sum x^2} \right] \\ & 1 - \frac{(\sum x_1 x)^2}{\sum x_1^2 \sum x^2} - \frac{(\sum x_2 x)^2}{\sum x_2^2 \sum x^2} + \left[\frac{(\sum x_1 x)^2}{\sum x_1^2 \sum x^2} \times \frac{(\sum x_2 x)^2}{\sum x_2^2 \sum x^2} \right] \end{aligned}$$

भाज्य तथा हर को $\sum x_1^2 \sum x_2^2 (\sum x^2)^2$ से गुणा करने से यह विष्णाकित समीकरण के रूप में सरल हो जाता है :

$$\begin{aligned} r_{12}^2 = & \frac{(\sum x_1^2)^2 (\sum x_2^2)^2 - 2 \sum x_1^2 \sum x_2^2 \sum x^2 + (\sum x_1 x)^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 (\sum x^2)^2 - \sum x_1^2 \sum x^2 (\sum x_2^2) - \sum x_2^2 \sum x^2 (\sum x_1^2) + (\sum x_1 x)^2 (\sum x_2 x)^2} \\ & \dots (2) \end{aligned}$$

$$\text{हम जानते हैं कि } r_{12}^2 = \frac{\sum x_{r1}^2 \sum x_{r2}^2 - \sum x_{r1}^2 \sum x_{r2}^2}{\sum x_1^2 - \sum x_{r1}^2} \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{किन्तु } \sum x_{r1}^2 = b_{12} \sum x_1 x_2 = \frac{\sum x_1 x_2}{\sum x_2^2} \cdot \frac{(\sum x_1 x_2)^2}{\sum x_2^2}$$

$$\text{तथा, } \Sigma x_{c1}^2 \dots = b_{12} \Sigma r_1 r_2 + b_{13} \Sigma r_1 r_3$$

अब, b_{12} तथा b_{13} को प्राप्त करने के लिए प्रामाण्य समीकरण है,

$$\text{II } \Sigma x_1 x_2 = b_{12} \Sigma r_2^2 + b_{13} \Sigma r_2 r_3,$$

$$\text{III } \Sigma r_1 x_2 = b_{12} \Sigma r_2 r_3 + b_{13} \Sigma x_2^2.$$

b_{13} के लिए हल करने को, हम समीकरण II को $\Sigma r_1 r_3$ से धीरे समीकरण III को Σx_2^2 से गुणा कर सकते हैं, तथा समीकरण II का समीकरण III में से घटा सकते हैं। इस प्रकार,

$$\text{II } \Sigma r_1 x_2 \Sigma r_2 r_3 = b_{12} \Sigma r_2^2 \Sigma x_2 r_3 + b_{13} (\Sigma r_2 r_3)^2$$

$$\text{III } \frac{\Sigma r_1 r_3 \Sigma r_2^2 = b_{12} \Sigma r_2^2 \Sigma r_2 r_3 + b_{13} \Sigma x_2^2 \Sigma r_2^2}{\Sigma r_2 r_3 \Sigma r_2^2 - \Sigma r_2 r_3 \Sigma r_2 r_3 = b_{12} \Sigma r_2^2 \Sigma r_2^2 - b_{13} (\Sigma r_2 r_3)^2}$$

$$b_{13} = \frac{\Sigma x_1 r \Sigma r - \Sigma r_1 r_2 \Sigma r_2 r_3}{\Sigma r \Sigma r_3 - (\Sigma r_1 r_3)^2}$$

इसी रीति से, हम b_{12} के लिए हल कर सकते हैं। इसके लिए समीकरण II को Σx_2 से तथा समीकरण III को $\Sigma r_2 r_3$ से गुणा करना पड़ेगा। इस क्रिया से हम पाते हैं कि

$$b_{12} = \frac{\Sigma r_1 x_2 \Sigma r_2 r_3 - \Sigma r_1 r_2 \Sigma r_3^2}{(\Sigma x_2 r_3)^2 - \Sigma r_2^2 \Sigma x_2^2}$$

इन व्यंजकों की $\Sigma_{c1}^2 \dots$ के समीकरण में b_{12} तथा b_{13} के लिए प्रतिस्थापना से हम पाते हैं

$$\Sigma x_{c1}^2 \dots = \frac{\Sigma r_1 r_2 \Sigma r_2 r_3 - \Sigma r_1 r_2 \Sigma r_3^2}{(\Sigma x_2 r_3)^2 - \Sigma r_2^2 \Sigma x_2^2} \Sigma r_1 r_2 + \frac{\Sigma r_1 r_2 \Sigma r_3^2 - \Sigma x_1 x_2 \Sigma r_2 r_3 \Sigma r_1 x_2}{\Sigma x_2^2 \Sigma r_3^2 - (\Sigma r_2 r_3)^2} \Sigma r_1 x_2$$

यह इस रूप में सरल हो जाता है

$$\Sigma x_{c1}^2 x_{1,23} = \frac{(\Sigma x_1 r_3) \Sigma r_2^2 + (\Sigma r_1 r_2)^2 \Sigma x_2^2 - 2 \Sigma x_1 x_2 \Sigma r_1 x_2 \Sigma x_2 x_3}{\Sigma x_2^2 \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_2 x_2)^2}.$$

अब, सूत्र (3) में $\Sigma r_{c1}^2 \dots$ तथा $\Sigma r_{c1}^2 \dots$ के लिए अपने व्यंजकों की प्रतिस्थापना से, हम पाते हैं

$$r_{12}^2 = \frac{(\Sigma x_1 x_2)^2 \Sigma x_2^2 + (\Sigma x_2 x_2)^2 \Sigma x_2^2 - 2 \Sigma x_1 x_2 \Sigma x_1 x_2 \Sigma x_2 x_2}{\Sigma x_2^2 \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_2 x_2)^2} - \frac{(\Sigma r_1 r_3)^2}{\Sigma x_2^2} \\ \Sigma x_1^2 - \frac{(\Sigma x_1 x_2)^2}{\Sigma x_2^2}$$

वृद्धि करने और सरल करने से, यह व्यंजक समीकरण (2) बन जाता है। इसलिए,

$$\left(\frac{r_{12} - r_{13} r_{23}}{\sqrt{1 - r_{12}^2} \sqrt{1 - r_{23}^2}} \right)^2 = \frac{\Sigma r_{c1}^2 \dots - \Sigma r_{c1}^2 \dots}{\Sigma r_1^2 - \Sigma r_{c1}^2 \dots}$$

परिच्छेद 24 I

यह सिद्ध करने के लिए कि $\frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_K}{K} = \bar{X}_G$, जब $N_1 = N_2 = \dots = N_K = N$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_K}{K} &= \frac{\frac{\sum X_1}{N_1} + \frac{\sum X_2}{N_2} + \dots + \frac{\sum X_K}{N_K}}{K} \\ &= \frac{\sum X_1 + \sum X_2 + \dots + \sum X_K}{NK} \end{aligned}$$

N मंदों के प्रत्येक यादृच्छिक प्रतिदर्श में समष्टि का $\frac{N}{G}$ भाग रहता है, तथा प्रत्येक मंद

$\frac{N}{G}$ K बार पायी जायेगी। इसलिये,

$$\frac{\sum X_1 + \sum X_2 + \dots + \sum X_K}{NK} = \frac{\frac{N}{G} \sum_{i=1}^G \sum_{j=1}^K X_j}{NK},$$

जहाँ $\sum_{i=1}^G$ समष्टि में मंदों के ऊपर संचलन को संकेतित करता है।

$$\begin{aligned} \frac{\frac{N}{G} \sum_{i=1}^G \sum_{j=1}^K X_j}{NK} &= \frac{1}{G} \sum_{i=1}^G \bar{X}_i \\ &= \bar{X}_G \end{aligned}$$

परिच्छेद 24 2

यह सिद्ध करने के लिए कि $\sigma_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ जब, $N'_1 = N'_2 = \dots = N'_K = 1$ यादृच्छिक

प्रतिदर्शों की योजना निम्न प्रकार प्रस्तुत है

मंद	प्रतिदर्श 1	प्रतिदर्श 2	प्रतिदर्श 3
a	X_{a1}	X_{a2}	X_{a3}
b	X_{b1}	X_{b2}	X_{b3}
c	X_{c1}	X_{c2}	X_{c3}
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
N	X_{N1}	X_{N2}	X_{N3}

K प्रतिदश ह। प्रत्येक प्रतिदर्श से लेने के बाद पृथक् मद्दों को प्रतिस्थापित कर दिया जाता है।

हम निम्नलिखित का प्रयोग करें

\sum सकेत करने के लिए K प्रतिदर्शों के ऊपर सकलन का,

\sum सकेत करने के लिए समष्टि में मद्दों के ऊपर सकलन का,

\sum सकेत करने के लिए प्रतिदर्श के ऊपर सकलन का—किसी विशिष्ट प्रतिदर्श के ऊपर यदि अधालिखित X का अनुसरण करता हो इस प्रकार $\sum X_1$ प्रतिदर्श 1 में X मानों का योग है, तथा

1 जिसका तात्पर्य $X - \bar{X}_g$ केवल इस प्रमाण में प्रयुक्त X प्रयोग।

समष्टि माध्य से मद्दों के विचलन हैं $x_{01} = X_{01} - \bar{X}_g$, $x_{02} = X_{02} - \bar{X}_g$, $x_{11} = X_{11} - \bar{X}_g$, $x_{02} = X_{02} - \bar{X}_g$, इत्यादि। इसलिए हम विभिन्न मद्दों को इस रूप में लिख सकते हैं $\bar{X}_g + x_{01}$, $\bar{X}_g + x_{02}$, $\bar{X}_g + x_{11}$, $\bar{X}_g + x_{02}$ इत्यादि।

प्रतिदर्श 1 के लिए $\sum Y_1 = N\bar{X}_g + \sum x_{11}$,

प्रतिदर्श 2 के लिए $\sum X_2 = N\bar{X}_g + \sum x_{02}$,

इत्यादि.

जहाँ $\sum x_{11} \neq 0$, $\sum x_{02} \neq 0$, इत्यादि क्योंकि $x = X - \bar{X}_g$

मानों की श्रेणी में एक अक्षर को जोड़ने (या एक अक्षर को घटाने) से उन मानों के मानक विचलन के मान में परिवर्तन नहीं होता ताकि

$$\sigma_{\sum x} = \sigma_{\sum x}$$

K प्रतिदर्शों के लिए

$$\begin{aligned} \sigma_{\sum X}^2 &= \frac{\sum (\sum x)^2}{K} - \left[\frac{\sum (\sum x)}{K} \right]^2 \\ &= \frac{\sum (\sum^2 x^2)}{K}, \end{aligned}$$

क्योंकि

$$\sum_1^K (\sum x) = \sum x_1 + \sum x_2 + \dots + \sum x_K = 0$$

तथा

$$K\sigma_{\sum x}^2 = \sum_1^K (\sum x)^2 = \sum_1^K (x_a + x_b + c + \dots + x_K)^2$$

किसी एक प्रतिदर्श के लिए,

$$\begin{aligned} (x_a + x_b + x_c + \dots + x_v)^2 &= x_a^2 + x_a x_b + x_a x_c + \dots + x_a x_v \\ &\quad + x_b x_a + x_b^2 + x_b x_c + \dots + x_b x_v \\ &\quad + x_c x_a + x_c x_b + x_c^2 + \dots + x_c x_v \\ &\quad + \dots \\ &\quad + x_v x_a + x_v x_b + x_v x_c + \dots + x_v^2 \\ &= \sum x_i^2 + 2 \sum x_i x_j \end{aligned}$$

जहाँ x_i किसी मद का चोतक तथा x_j दो पृथक मदों के प्रत्येक सचय के परिणामस्वरूप प्राप्त गुणनफल का परिचायक है। इसलिए K प्रतिदर्शों के लिए

$$\begin{aligned} K \sigma_{\sum x}^2 &= \sum_1^K (\sum x_i^2 + 2 \sum x_i x_j) \\ &= \sum_1^K (\sum x_i^2) + 2 \sum_1^K (\sum x_i x_j) \end{aligned}$$

N मदों के प्रत्येक प्रतिदर्श में समष्टि का $\frac{N}{O}$ भाग सम्मिलित है तथा प्रत्येक मद प्रतिदर्शों के $\frac{N}{O}$ में पायी जायेगी, अथवा $\frac{N}{O}$ K बार। यदि निदिष्ट मद (x_i) प्रतिदर्शों के $\frac{N}{O}$ में पायी जाती है तो दूसरी मद (x_j) प्रतिदर्शों के $\frac{N-1}{O-1}$ में मिलेगी जिसमें प्रथम मद उपस्थित है तथा दोनों मदें प्रतिदर्शों के $\frac{N}{O}$ $\frac{N-1}{O-1}$ में होती अथवा $\frac{N(N-1)}{O(O-1)}$ K बार होगी। इस प्रकार प्रत्येक $x_i x_j$ उपस्थित होगी $\frac{N(N-1)}{O(O-1)}$ K बार।

इसलिए,

$$K \sigma_{\sum x}^2 = \frac{N}{O} \sum_1^K x_i^2 + 2 \frac{N(N-1)}{O(O-1)} \sum_1^K x_i x_j$$

तथा

$$\sigma_{\sum x}^2 = \frac{N}{O} \sum_1^K x_i^2 + 2 \frac{N(N-1)}{O(O-1)} \sum_1^K x_i x_j$$

एक प्रतिदर्श के लिए $(\sum x)^2$ के पूर्व प्रदर्शित विकार के समान विकास या वृद्धि से हम पाते हैं

$$2 \sum_1^K x_i x_j = \left(\sum_1^K x_i \right)^2 - \sum_1^K x_i^2$$

किन्तु $\sum_1^P x_i = 0$ अतएव $2 \sum_1^P x_i x_i = -\sum_1^P x_i^2$, तथा

$$\begin{aligned}\sigma^2_X &= \frac{N}{Q} \sum_1^P x_i^2 - \frac{N(N-1)}{Q(Q-1)} \sum_1^P x_i^2, \\ &= \frac{N}{Q} Q \sigma^2 - \frac{N(N-1)}{Q(Q-1)} Q \sigma^2, \\ &= N \sigma^2 - \frac{N(N-1)}{Q-1} \sigma^2, \\ &= N \sigma^2 \left(1 - \frac{N-1}{Q-1} \right), \\ &= N \sigma^2 \left[\frac{(Q-1) - (N-1)}{Q-1} \right] \\ &= N \sigma^2 \frac{Q-N}{Q-1} \\ \sigma_{\Sigma X} &= \sqrt{N \sigma^2} \sqrt{\frac{Q-N}{Q-1}}\end{aligned}$$

प्रत्येक प्रतिदर्श में क्योंकि N बढ़े है अतः प्रतिदर्श राशियों के समांतर माध्य से एक प्रतिदर्श राशि का प्रत्येक विचलन N बार उतना बड़ा होगा जितना प्रतिदर्श माध्यों $X_{\bar{P}}$ के समांतर माध्य से एक प्रतिदर्श माध्य का प्रत्येक सगत विचलन, तथा प्रतिदर्श राशि का प्रत्येक वर्गीकृत विचलन, प्रत्येक प्रतिदर्श माध्य के वर्गीकृत विचलन से N^2 बार होता है। अतएव प्रतिदर्श राशियों का मानक विचलन प्रतिदर्श माध्यों के मानक विचलन से N बार होता है। अन्तिम समीकरण के प्रत्येक पक्ष को N से भाग देने पर

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{Q-N}{Q-1}}$$

यदि Q अनन्त हो, अथवा यदि Q सात हो किन्तु N की अपेक्षा बड़ी हो जिसमें $\sqrt{\frac{Q-N}{Q-1}}$ का मान कार्यमाधक रूप से 1 है, तो व्यंजक इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

परिच्छेद 24.3

यह दिखाने के लिए कि $\frac{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2}{K} + \frac{\hat{\sigma}_K^2}{K} = \hat{\sigma}^2$ जब $N_1 = N_2 = \dots =$

$N_K = N$

y से भरेले प्रतिदण की विभिन्नता है $\sum_1^N (Y - \bar{y})$ इस दो भागो में बाँटा जा सकता है।

$$\sum_1^N (X - \bar{y})^2 = \sum_1^N [(\lambda - \bar{y}) + (\bar{y} - \bar{y})]^2$$

जहाँ \bar{y} प्रतिदण के माध्य का परिचायक है

$$= \sum_1^N [(\lambda - \bar{y}) + 2(\lambda - \bar{y})(\bar{y} - \bar{y}) + (\bar{y} - \bar{y})^2]$$

$$= \sum_1^N (\lambda - \bar{y})^2 + 2(\lambda - \bar{y}) \sum_1^N (\bar{y} - \bar{y}) + N(\bar{y} - \bar{y})^2$$

किन्तु $\sum_1^N (\lambda - \bar{y}) = 0$ तथा इसलिए

$$\sum_1^N (X - \bar{y})^2 = \sum_1^N (\lambda - \bar{y})^2 + N(\bar{y} - \bar{y})^2$$

K प्रतिदणों के लिए समग्र करत हुए

$$\sum_1^K \left[\sum_1^N (Y - \bar{y})^2 \right] = \sum_1^K \left[\sum_1^N (\lambda - \bar{y})^2 \right] + \sum_1^K [N(\bar{y} - \bar{y})^2]$$

N मद्यो के प्रत्येक यादृच्छिक प्रतिदण में समष्टि का $\frac{N}{\phi}$ सम्मिलित है तथा प्रत्येक

मद्य $\frac{N}{\phi} K$ बार माएगी। पिछले व्यञ्जक के तीन भागो में से प्रत्येक पर पृथक् पृथक्

विचार करने से हम पाते हैं

$$\sum_1^K \left[\sum_1^N (X - \bar{y})^2 \right] = \frac{N}{\phi} K \sum_1^K (\bar{y} - \bar{y})^2$$

$$= NK \frac{\sum_1^K (\bar{y} - \bar{y})^2}{\phi}$$

$$= NK \sigma^2$$

$$\sum_1^K \left[\sum_1^N (X - \bar{X})^2 \right] = \sum_1^K (N s^2)$$

$$= \sum_1^K s^2$$

जहाँ s^2 प्रसरण है, $s^2 = \frac{\sum x^2}{N}$, प्रतिदर्श का ।

$$\begin{aligned} \sum_1^K [N(\bar{X} - \bar{X}_g)^2] &= N \sum_1^K (\bar{X} - \bar{X}_g)^2, \\ &= NK\sigma_x^2. \end{aligned}$$

अब हम लिख सकते हैं

$$NK\sigma^2 = N \sum_1^K s^2 + NK\sigma_x^2,$$

तथा, K से भाग देने पर,

$$N\sigma^2 = \overline{Ns^2} + N\sigma_x^2,$$

जहाँ \bar{s}^2 समानर माध्य है s^2 मानों का ।

$$N\sigma^2 = N\bar{s}^2 + N \frac{\sigma^2}{N},$$

$$= N\bar{s}^2 + \sigma^2.$$

$$N\sigma^2 - \sigma^2 = N\bar{s}^2,$$

$$\sigma^2(N-1) = N\bar{s}^2,$$

$$\sigma^2 = \frac{N}{N-1} \bar{s}^2,$$

$$= \frac{N}{N-1} \left(\frac{\sum x_1^2}{N} + \frac{\sum x_2^2}{N} + \dots + \frac{\sum x_K^2}{N} \right),$$

$$= \frac{\frac{\sum x_1^2}{N-1} + \frac{\sum x_2^2}{N-1} + \dots + \frac{\sum x_K^2}{N-1}}{K},$$

$$= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_K^2}{K}.$$

परिच्छेद 24.4

यह सिद्ध करने के लिए कि $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2}$ स्वतंत्र प्रतिदर्शों के लिए ।

युग्मित समानर माध्यों की दो स्वतंत्र श्रेणियाँ प्रदत्त होने पर उसी प्रकार के यादृच्छिक प्रतिदर्शों के लिए माध्यों के होने से तथा शून्यक श्रेणी से A माध्यों के निम्न प्रकार सम्मिलित होने से :

निरूपण

प्रतिपक्ष	श्रेणी 1	श्रेणी 2	अंतर
1	$x_{1,1}$	$x_{2,1}$	$x_{1,1} - x_{2,1}$
2	$x_{1,2}$	$x_{2,2}$	$x_{1,2} - x_{2,2}$
3	$x_{1,3}$	$x_{2,3}$	$x_{1,3} - x_{2,3}$

K

 $x_{1,K}$ $x_{2,K}$ $x_{1,K} - x_{2,K}$

अंतरों का प्रसरण है

$$\sigma_{x_1 - x_2}^2 = \frac{1}{K} \left[\sum_{i=1}^K (x_{1,i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^K (x_{2,i} - \bar{x}_2)^2 \right]$$

जहाँ $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ अंतरों का समानर माध्य है और इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (x_{1,i} - \bar{x}_1)^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_{1,i}^2 - \bar{x}_1^2$$

जहाँ \bar{x}_1 तथा \bar{x}_2 समानर माध्य है श्रेणी 1 तथा श्रेणी 2 के,

$$\sigma_{x_1 - x_2}^2 = \frac{1}{K} \left[\sum_{i=1}^K (x_{1,i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^K (x_{2,i} - \bar{x}_2)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{K} \left[\sum_{i=1}^K (x_{1,i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^K (x_{2,i} - \bar{x}_2)^2 \right]$$

$x_1 = x_{1,i} - \bar{x}_1$ तथा $x_2 = x_{2,i} - \bar{x}_2$, लिखने में, हम पाते हैं

$$\sigma_{x_1 - x_2}^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)$$

$$= \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_1^2 - 2 \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_1x_2 + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_2^2$$

अथ $\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_1^2$ माध्यों की दो श्रेणियों के लिए सहसम्बन्ध गुणांक के व्यंजक का एक भाग

है जिसे इस प्रकार लिखा जा सकता है $r_{\bar{X}_1\bar{X}_2} = \frac{\frac{K}{\sum \bar{x}_1 \bar{x}_2}}{K \sigma_{\bar{X}_1} \sigma_{\bar{X}_2}}$ (प्रतिदर्श के लिए r के गुणनफल-पूर्ण सूत्र के निमित्त पृष्ठ 420 देखिए), जिससे

$$2 \frac{1}{K} \sum \bar{x}_1 \bar{x}_2 = 2 r_{\bar{X}_1\bar{X}_2} \sigma_{\bar{X}_1} \sigma_{\bar{X}_2} \text{ साथ ही, } \frac{1}{K} \sum \bar{x}_1^2 = \sigma_{\bar{X}_1}^2 \text{ तथा } \frac{1}{K} \sum \bar{x}_2^2 = \sigma_{\bar{X}_2}^2.$$

इसलिए

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sigma_{\bar{X}_1}^2 - 2 r_{\bar{X}_1\bar{X}_2} \sigma_{\bar{X}_1} \sigma_{\bar{X}_2} + \sigma_{\bar{X}_2}^2, \text{ तथा}$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 - 2 r_{\bar{X}_1\bar{X}_2} \sigma_{\bar{X}_1} \sigma_{\bar{X}_2} + \sigma_{\bar{X}_2}^2}.$$

क्योंकि माध्यों की दो श्रेणियाँ स्वतंत्र हैं, $r_{\bar{X}_1\bar{X}_2} = 0$ तथा

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2}$$

परिच्छेद 245

$\frac{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2}{2}$ वगैरह भारित औसत है $\hat{\sigma}_1^2$ तथा $\hat{\sigma}_2^2$ का। दोनों प्रतिदर्शों में से प्रत्येक में स्वतंत्रता के अंशों की सख्या ($N_1 - 1$ तथा $N_2 - 1$) के बराबर भारों का प्रयोग करने से, हम पाते हैं

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{1+2}^2 &= \frac{(N_1 - 1) \hat{\sigma}_1^2 + (N_2 - 1) \hat{\sigma}_2^2}{N_1 - 1 + N_2 - 1}, \\ &= \frac{(N_1 - 1) \frac{\sum x_1^2}{N_1 - 1} + (N_2 - 1) \frac{\sum x_2^2}{N_2 - 1}}{N_1 - 1 + N_2 - 1}, \\ &= \frac{\sum x_1^2 + \sum x_2^2}{N_1 - 1 + N_2 - 1}. \end{aligned}$$

परिच्छेद 246

यह सिद्ध करने के लिए कि $\hat{\sigma}_{1+2} \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{N_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{N_2}}$ जब $N_1 =$

$$N_2 = N, \hat{\sigma}_{1+2} \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{1+2}^2}{N} + \frac{\hat{\sigma}_{1+2}^2}{N}},$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{\frac{(N-1)\sigma_1 + (N-1)\sigma}{N-1+N-1}}{\frac{(N-1)\sigma_1 + (N-1)\sigma}{N-1+N-1}} + \frac{(N-1)\sigma_1 + (N-1)\sigma}{N-1+N-1}} \\
 &= \sqrt{\frac{(N-1)\sigma_1 + \sigma}{2N} + \frac{(N-1)(\sigma_1 + \sigma)}{2N}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sigma_1 + \sigma}{2N} + \frac{\sigma_1 + \sigma}{2N}} \\
 &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N} + \frac{\sigma^2}{N}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N} + \frac{\sigma^2}{N}}
 \end{aligned}$$

परिच्छेद 251

यह मिश्र करन व लिए $\sigma_p = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N} + \frac{\sigma^2}{N}}$

अनुपात p मानों की श्रेणी का समानर माध्य है जहां प्रत्येक उपस्थिति 1 के बराबर होती है तथा प्रत्येक अनुपस्थिति शून्य के बराबर होती है।

प्रतिदण के लिए हमारे पास है

	समस्या	अनुपात
उपस्थितिया	a	p
अनुपस्थितिया	b	q
योग	N	10

यह स्पष्ट है कि $a = Np$ तथा $b = Nq$

क्योंकि एक उपस्थिति 1 के बराबर होती है तथा अनुपस्थिति शून्य के बराबर होती है, अतः हमारे पास है

$$Y = \frac{a(1) + b(0)}{N} = \frac{a}{N} = p.$$

और इसका परिणाम होता है कि $\sigma_1 = \sigma_p = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

■ के लिए व्यञ्जक प्राप्त करने को, हम निम्नलिखित समष्टि चिह्नों का प्रयोग करते हैं

	सदस्या	अनुपात
उपस्थितियाँ α	π
अनुपस्थितियाँ β	τ
योग $\frac{\beta}{\theta}$	$\frac{1}{0}$

यह स्पष्ट है कि $\pi = \frac{\alpha}{\theta}$ तथा $\tau = \frac{\beta}{\theta}$.

पुनः प्रत्येक उपस्थिति 1 के बराबर तथा अनुपस्थिति शून्य के बराबर होती है, जिससे

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{\alpha(1)^2 + \beta(0)^2}{\theta} - \left[\frac{\alpha(1) + \beta(0)}{\theta} \right]^2}, \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\theta} - \left(\frac{\alpha}{\theta} \right)^2} = \sqrt{1 - \tau^2} = \sqrt{\pi(1 - \pi)}, \\ &= \sqrt{\tau - \tau^2}.\end{aligned}$$

हम अब लिख सकते हैं

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{\tau - \tau^2}}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\tau - \tau^2}{N}}.$$

क्योंकि $a = Np$, अतः हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$\sigma_p = N\sigma_p = N\sqrt{\frac{\tau - \tau^2}{N}} = \sqrt{N\tau - \tau^2}.$$

परिच्छेद 26 1

यह सिद्ध करने के लिए कि

$$\sum_1^{k_c} [N_c(\bar{X}_c - \bar{X})^2] = \sum_1^{k_c} \left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} X \right)^2}{N_c} \right] - \frac{(\sum_1^{N_c} X)^2}{N}$$

बाईं ओर का व्यञ्जक कहता है “प्रत्येक स्तम्भ के लिये, महामाध्य से स्तम्भ माध्य के विचलन को वर्गीकृत कीजिए, स्तम्भ में मंदो की सदस्या से गुणा कीजिए, और सब स्तम्भों के लिए इन गुणनफलों का योग कीजिए।”

$$\begin{aligned}\sum_1^{k_c} [N_c(\bar{X}_c - \bar{X})^2] &= \sum_1^{k_c} [N_c(\bar{X}_c^2 - 2\bar{X}\bar{X}_c + \bar{X}^2)], \\ &= \sum_1^{k_c} (N_c\bar{X}_c^2 - 2N_c\bar{X}\bar{X}_c + N_c\bar{X}^2), \\ &= \sum_1^{k_c} (N_c\bar{X}_c^2) - 2\bar{X} \sum_1^{k_c} (N_c\bar{X}_c) + \sum_1^{k_c} (N_c\bar{X}^2).\end{aligned}$$

$$\text{किन्तु } \sum_1^{k_c} (N_c \bar{X}_c^2) = \sum_1^{k_c} \left[N_c \frac{\left(\sum_1^{N_c} X \right)^2}{N_c} \right] = \sum_1^{k_c} \left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} X \right)^2}{N_c} \right];$$

$$\sum_1^{k_c} (N_c \bar{X}_c) = \sum_1^{k_c} \left(N_c \frac{\sum_1^{N_c} X}{N_c} \right) = \sum_1^{k_c} \left(\sum_1^{N_c} X \right) = \sum \lambda, \text{ तथा}$$

$$\sum_1^{k_c} (N_c \lambda^2) = N \bar{X}^2 = \frac{(\sum X)^2}{N}.$$

इसलिए,

$$\begin{aligned} \sum_1^{k_c} [N_c (\bar{X}_c - \bar{X})^2] &= \sum_1^{k_c} \left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} X^2 \right)}{N_c} \right] - 2 \bar{X} \sum X + \frac{(\sum X)^2}{N} \\ &= \sum_1^{k_c} \left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} X \right)^2}{N_c} \right] - \frac{(\sum \lambda)^2}{N}. \end{aligned}$$

परिच्छेद 26.2

यह सिद्ध करने के लिए कि

$$\sum_1^{k_c} \left[\frac{N_c}{1} \sum_1^N (X - \bar{X}_c)^2 \right] = \sum X^2 - \sum_1^{k_c} \left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} X \right)^2}{N_c} \right].$$

माई प्रोर का व्यञ्जक कहता है : “प्रत्येक स्तम्भ के लिए, उस स्तम्भ के माध्य से वर्गीकृत विचलनों का योग कीजिए तथा सब स्तम्भों के लिए इन योगफलों का योग कर दीजिए।”

$$\begin{aligned} \sum_1^{k_c} \left[\frac{N_c}{1} \sum_1^N (X - \bar{X}_c)^2 \right] &= \sum_1^{k_c} \left[\frac{N_c}{1} \left(\sum_1^N X^2 - 2 \bar{X}_c \sum_1^N X + N_c \bar{X}_c^2 \right) \right] \\ &= \sum_1^{k_c} \left(\sum_1^N X^2 - 2 \bar{X}_c \sum_1^N X + N_c \bar{X}_c^2 \right) \\ &= \sum_1^{k_c} \left[\frac{N_c}{1} \sum_1^N X^2 - 2 \frac{\left(\sum_1^{N_c} X \right)^2}{N_c} + \frac{\left(\sum_1^{N_c} X \right)^2}{N_c} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_1 \left[\frac{N_c}{1} X^2 - \frac{\left(\frac{N_c}{1} X \right)^2}{N_c} \right]$$

$$= \sum X^2 - \sum_1 \left[\frac{\left(\frac{N_c}{1} X \right)^2}{N_c} \right]$$

परिच्छेद 26 3

यह सिद्ध करने के लिए $\sqrt{\frac{r^2(N-2)}{1-r^2}} = \sqrt{\frac{b^2 \sum x^2 (N-2)}{\sum y_i^2}}$

$$\sqrt{\frac{r(N-2)}{1-r^2}} = \sqrt{\frac{\frac{(\sum y_i)^2}{\sum x^2} (N-2)}{\sum y_i^2}} = \sqrt{\frac{\frac{(\sum y)^2}{\sum x^2} (N-2)}{\sum y_i^2}}$$

क्योंकि $b = \frac{\sum y}{\sum x^2}$, $\frac{(\sum y)^2}{\sum x^2} = b^2 \sum x^2$, तथा

$$\sqrt{\frac{r^2(N-2)}{1-r^2}} = \sqrt{\frac{b^2 \sum x^2 (N-2)}{\sum y_i^2}}$$

परिच्छेद 26 4

यह सिद्ध करने के लिए कि $t' = F$ आंशिक सहसंबंध के गुणांक के लिए। अर्थात्

कि

$$\frac{r_{1m23 \dots (m-1)}^2 (N-m)}{1 - r_{1m23 \dots (m-1)}^2} = \frac{(\sum x_{c1234 \dots m}^2 - \sum x_{c1234 \dots (m-1)}^2) (N-m)}{\sum x_1^2 - \sum x_{c1234 \dots m}^2}$$

क्योंकि $r_{1m23 \dots (m-1)}^2 = \frac{\sum x_{c1234 \dots m}^2 - \sum x_{c1234 \dots (m-1)}^2}{\sum x_1^2 - \sum x_{c1234 \dots (m-1)}^2}$, हम लिख सकते हैं

$$\frac{r_{1m23 \dots (m-1)}^2 (N-m)}{1 - r_{1m23 \dots (m-1)}^2}$$

$$= \frac{\frac{\sum x_{c1234 \dots m}^2 - \sum x_{c1234 \dots (m-1)}^2}{\sum x_1^2 - \sum x_{c1234 \dots (m-1)}^2} (N-m)}{\frac{\sum x_1^2 - \sum x_{c1234 \dots (m-1)}^2}{\sum x_1^2 - \sum x_{c1234 \dots (m-1)}^2} - \frac{\sum x_{c1234 \dots m}^2 - \sum x_{c1234 \dots (m-1)}^2}{\sum x_1^2 - \sum x_{c1234 \dots (m-1)}^2}}$$

$$= \frac{(\sum x_{c1234 \dots m}^2 - \sum x_{c1234 \dots (m-1)}^2) (N-m)}{\sum x_1^2 - \sum x_{c1234 \dots m}^2}$$

परिशिष्ट न

संख्याओं का पूर्णांकन¹

शब्दावली

मूल मानों में मापों (जो कदापि यथार्थ नहीं हो सकते) से, अथवा गणना से प्राप्त होते हैं। अतः मापों का सदा पूर्णांकन किया जायगा, गणनामा का भी पूर्णांकन किया जा सकता है। पूर्णांकन के परिणामस्वरूप प्राप्त मर्यादक मान की अपेक्षा सदा सभ्य मानों का माना को परिचायक होगी। इस प्रकार यदि हमें मर्यादा 78 पाउंड अंकित की जाय तो हम जानते हैं कि वास्तविक मान 77 ½ पाउंड में कम नहीं है और न 78 5 पाउंड में अधिक ही है।

अब उस दशा में मार्थक होता है यदि त्रुटि मगने दाहिने अंक में ± 5 में अधिक न हो। इस प्रकार, यदि माप 172.3 पाउंड अंकित किया जाय तो हम मान लेते हैं कि यथार्थ मान 172.3 ± 0.05 अथवा 172.25 पाउंड और 175.35 पाउंड के भीतर है और इसमें चार मार्थक अंक हैं। कभी-कभी गणना में भी मार्थक अंकों की मर्यादा ज्ञात करना कठिन होता है। इस प्रकार, यह नितान्त असंभाव्य है कि महाद्वीपीय समुद्र राज्य में 1 अप्रैल, 1960 को यथार्थन 178,464,236 व्यक्ति थे, जैसी सूचना जनगणना ब्यूरो द्वारा दी गई।

परिमुद्ध रूप में लिए गए तथा ठीक ढंग से अंकित मापों के लिए, अथवा, पूर्णांकित गणनों के लिए, शुद्ध शब्दावली के तीन उदाहरण नीचे दिए जाते हैं।

127.34 में पाँच मार्थक अंक कहे गए हैं। इसका पाँच मार्थक अंकों तक, अथवा दो मार्थक दशमलव स्थानों तक पूर्णांकन किया गया है।

4,125 हजार या 4,125 दशमलव या $4,125 \times 10^3$ या 4,125,000, चार अंकों तक मार्थक है। यदि यह मर्यादा मान्यता में प्रस्तुत हो, तो प्रायः हजारों के उल्लेख सहित प्रारम्भिक टिप्पणी या स्तम्भ-शीर्षक के साथ मर्यादा 4,125 अंकित की जाएगी। 4,125,000 में मार्थक अंकों की संख्या अस्पष्ट है, क्योंकि इसका परिमर चार से मात्र तक हो सकता है। फिर भी सदा में प्रायः मार्थक अंकों की संख्या का संकेत कर देता है। यदि कोई सत्या, दशमलव बिन्दु के बाद अन्य में समाप्त हो तो कोई अस्पष्टता या मदिग्धता नहीं रहती। इस प्रकार 4,125.0 तथा 4,125.0 में से प्रत्येक में पाँच मार्थक अंक हैं।

0.00031 में पाँच की अपेक्षा दो मार्थक अंक हैं (यद्यपि 0.10031 में पाँच तथा 1.00031 में छः हैं)। इसका कारण यह है कि माप की इकाई का चुनाव यादृच्छिक होता

1. संख्याओं के पूर्णांकन का यह विवेचन, एफ० ई० बॉकस्टन तथा डी० जे० काउडन के ग्रन्थ प्रैक्टिकल विजनेंस स्टैटिस्टिक्स, तृतीय संस्करण, प्रथम हिस्सा, दन्कां, एगनरुद स्मिथ, एन० जे०, 1960, पृष्ठ 52—57 से उद्धृत किया गया है।

है। उदाहरण के लिए, 0 031 मीटर 31 मिनिमीटर भी है। इस प्रत्यय का महत्व तब स्पष्ट होगा जब पूराकित सख्याओं को गुणा और भाग करने के नियम प्रस्तुत करेंगे।

पूराकित के नियम

1 यदि दाहिनी ओर का छोड़ा जान वाला अन्तिम अंक 5 से कम हो तो उससे पहला अंक अप्रभावित (ज्या का त्यो) रहता है। इस प्रकार 113 746 चार अंको में पूराकित किए जाने पर 113 7 हो जाता है।

2 यदि दाहिनी ओर का छोड़ा जान वाला अन्तिम अंक 5 से अधिक हो, या 5 हो और उसके बाद के सब अंक शून्य न हो (यदि सख्या काफी अंक सख्या तक ल जाई गई हो) तो उससे पिछले अंक में 1 जोड़ दिया जाता है। इस प्रकार 129 673 चार अंको में पूराकित किए जाने पर 129 7 हो जाता है। इसी प्रकार 87 2500001 का जब तीन अंको में पूराकित किया जाता है तो 87 3 हो जाता है।

3 यदि छोड़ा गया दक्षिणतम अंक 5 हो, और उसके बाद शून्य हो तो उससे पूर्व के अंक में यदि वह विषम होता तो 1 जोड़ दिया जाएगा, और यदि सम होगा तो वैसा ही अपरिवर्तित छोड़ दिया जाएगा। सख्या का पूराकित इस प्रकार किया जाता है कि अन्तिम सुरक्षित अंक सम हो। उदाहरण के लिए 103 55 चार अंको में पूराकित होने पर 103 6 बन जाता है तथा 103 45 रह जाता है 103 4 (फिर भी 103 5499 बन जाता है 103 55 जैसा अनुच्छेद 1 में समझाया गया है तथा 103 4501, जैसा अनुच्छेद 2 में समझाया गया है, 103 5 बन जाता है।) यह नियम इसलिए ग्रहण किया जाता है, जिससे सकलन में त्रुटियों के संचय में वृद्धि हो सके। यदि पिछले अंक को सदा बड़ा दिया जाय अथवा अपरिवर्तित छोड़ दिया जाय तो परिणामस्वरूप सकलन में त्रुटियाँ का संचय संभव है। यह नियम (अन्तिम अंक को सम बनाने का) इसके विपरीत नियम (अन्तिम अंक का विषम बनाने का) की अपेक्षा माधारणतः अधिक प्रयुक्त होता है। क्रमशः आधा जाड़न और छोड़न की अपेक्षा यह नियम अधिक सुविधाजनक है क्योंकि इससे यह स्मरण रखने की परेशानी से मुक्ति मिल जाती है कि पिछली बार आधा जोड़ा गया था या छोड़ा गया था।

पूराकित सख्याओं से प्राप्त गुणफल तथा भागफल

1 गुणा (वगकरण सहित) करने भाग देने अथवा वगमूल निकालने में अन्तिम उत्तर के रूप में कम से कम सातवें अंको वाली मूल सख्या के अंको से अधिक अंको को

2 विशेष परिस्थितियाँ में इस नियम का अपवाद हो सकता है यदि उत्तर में अंको की सापेक्ष सख्या का स्पष्ट निर्देश हो।

जहाँ बाकड़ा के एक समुच्चय के साथ काम करने में गुणा भाग अथवा वगमूल निकालने से सम्बन्धित कई परिवर्तन कर पड़ें, वहाँ कभी कभी सन्नति परिकल्पना में कम से कम सातवें अंको वाली मूल सख्या के अंको से एक अधिक अंक अंकित करना उचित है। कभी कभी एक से अधिक असाध्य अंक वाञ्छनीय हो सकते हैं। इस ग्रन्थ में हमने कभी कभी अपने परिकल्पनों की परिशुद्धता के निमित्त विभिन्न नियमनाथ, एक से अधिक असाध्य अंको का प्रयोग किया है। अनिश्चित अंक चाहत पूर्ण परिशुद्धता न हो, किन्तु वे अन्तिम उत्तर प्राप्त करने के निमित्त अपना योग देने के पयाप्त निष्पत्ति होते हैं। उदाहरण के लिए यदि हम अपने अन्तिम उत्तर में तीन अंक चाहें और हमारे पास सख्या हो $(4\ 137 \times 0\ 684)$ $(0\ 316 \times 7\ 831)$ तो हम $2\ 83 - 2\ 47 = 1\ 15$ की अपेक्षा $2\ 830 - 2\ 475 = 1\ 14$ का प्रयोग करेंगे।

अंकित नहीं करना चाहिए। निम्नलिखित दृष्टान्त अंका की अधिकतम समस्या का संकेत करते हैं जहां तक अंकित करना व्यवहार की दृष्टि से उत्तम होगा

$$\begin{array}{rcl}
 358 \times 412 & = & 147 \text{ हजार} \\
 14 \times 427 & = & 60 \text{ हजार} \\
 3194 \times 25 \times 427 & = & 34 \text{ हजार} \\
 4831 \times 0.00412 & = & 19.9 \\
 5(73 \times 8 \text{ (यथायथ) }) & = & 45.38 \text{ हजार} \\
 25 - 23 & = & 11 \\
 427 - 52 & = & 0.52 \\
 52 - 427 & = & 1.7 \\
 \sqrt{0.354} & = & 0.595
 \end{array}$$

उपरोक्त उदाहरण में अंका की अधिकतम समस्या जो मायक हो सकती है अंकित की गई है, कुछ उदाहरणों में अंको की मायक समस्या अंकित समस्या से कम होगी।³

2 यदि साधक अंका की प्राप्त समस्या अंतिम उत्तर में अपेक्षित हो तो उत्तर में अपेक्षित अंक समस्या में प्रत्येक समस्या तथा प्रत्येक मध्यवर्ती परिणाम में एक मायक अंक अधिक होना चाहिए। यदि मूल आंकड़ा में से किसी में इस नियम के अनुसार आवश्यक अंको से अधिक है तो उन अधिक अंको का पूर्णांकन किया जा सकता है। इस प्रकार यदि अंतिम उत्तर में तीन अंक अपेक्षित हो तो हम निम्न प्रकार आगे बढ़ सकते हैं

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\frac{(27608)}{(13195)(0.87367)}} = \sqrt{\frac{(2761)^4}{(1370)(0.8737)}} \\
 & = \sqrt{\frac{7623}{1153}} = \sqrt{0.6611} = 0.813
 \end{aligned}$$

जैसा सगंभग हमेशा होता है अंतिम उत्तर वही होता है जमें हमने सभी मूल अंको को सुरक्षित रखा हो तथा प्रत्येक मध्यवर्ती चरण में एक अंक अधिक ग्रहण किया हो

$$\sqrt{\frac{(27608)}{(13195)(0.87367)}} = \sqrt{\frac{76220}{11525}} = \sqrt{0.66117} = 0.813$$

इस छोटी सी संभावना के कारण कि अधिकतर अन्तर्ग्रस्त सरयाएँ अधिकतम संभव मात्रा में निकट तक त्रुटिपूर्ण होगी तथा इस अधिक संभावना के कारण कि मूल आंकड़ों के पूर्णांकन से त्रुटियों का पर्याप्त निराकरण हो जायगा मूल आंकड़ों का पूर्णांकन उचित है।

3 मातृवे उदाहरण में सब धृष्टिये तो उत्तर में केवल एक साधक अंक है। यह स्मरण करते हुए कि पूर्णांकन के बाद निम्नी गई संख्या 42.7 घट सकती है 42.65 तथा 42.75 के बीच जब कि जो संख्या 52 अंकित की गई 51.5 तथा 52.5 के बीच घट-बढ़ सकती है हम परिकलन कर सकते हैं

$$\begin{aligned}
 42.75 - 51.5 &= 830 \text{ तीन अंको तक} \\
 42.7 - 52 &= 821 \text{ तीन अंको तक} \\
 42.65 - 52.5 &= 812 \text{ तीन अंको तक}
 \end{aligned}$$

सबसे कम संभव परिणाम। क्योंकि 821 + 0.05 के भीतर 830 तथा 812 सम्मिलित नहीं है अतः यह स्पष्ट है कि 821 में दूसरा अंक साधक नहीं है।

3 जब गुणनफल या भागफल का पढ़न में पता हो तब पूर्णांकित मूल मन्द्याओं का प्रयोग में प्राप्त मन्दिष्ट गुणनफल या भागफल की अपन्ना उनकी मूल मन्द्याओं को हा अधिकतम करना चाहिए। इस प्रकार यथा $0.175 \times 0.333 = 0.0416$ यदि यह पता हो कि यथाय मन्दिष्ट है $\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ 0.0417 तो उत्तर 0.0416 की अपक्षा 0.0417 अधिक किया जाना चाहिए।

पूर्णांकित सत्याओं में प्राप्त योग तथा अंतर

योग तथा व्यवकलन के नियम बहुत कुछ गुणा तथा भाग के नियमों के समानांतर हैं अन्तर कवन इतना है कि इसमें मायक अंकों की सत्या के स्थान पर साधक दशमलव स्थानों पर विचार किया जाता है।

1) याग अथवा व्यवकलन में अन्तिम उत्तर को उत्तम दशमलव स्थानों से अधिक कदापि अधिक नहीं कहा जा चाहिए कि न कम से कम साधक दशमलव स्थान मूल सत्या में हो। निम्न स्थान व्यवहार की दृष्टि में अधिकतम करके लिए उत्तम अधिकतम अंक सत्या का निदर्शन करता है

$$21562 + 39 = 2195$$

$$21562 - 39 = 2117$$

$$13 + 12 = 25$$

$$13 - 12 = 1$$

उपयुक्त निष्कर्षों में मायक दशमलव स्थानों की अधिकतम सत्या अधिकतम की गई है कुछ उदाहरणों में साधक सत्या अधिकतम सत्या से कम होगी।⁴

2) यदि अन्तिम उत्तर में साधक दशमलव स्थानों की प्रदत्त सत्या अपक्षित हो तो यह वाञ्छित होगा कि उत्तर में अपक्षित दशमलव स्थानों की सत्या से मूल सत्या में एक दशमलव स्थान अनिवार्य हो। यदि किसी मूल अंक में इस नियम के अनुसार आवश्यक अंकों में अधिक अंक हो तो अनिवार्य अंकों का पूर्णांकित किया जा सकता है। इस प्रकार यदि अन्तिम उत्तर में दशमलव स्थान अनावश्यक हो (दशमलव बिंदु के दाहिनी ओर कोई अंक प्रवेक्षित न हो) तो हम निम्न प्रक्रिया का अपना सकते हैं

$$\left. \begin{array}{r} 122\ 34 \\ 81\ 7 \\ \hline 293\ 826 \end{array} \right\} \text{इसका पूर्णांकन इस प्रकार हो सकता है} \left\{ \begin{array}{r} 122\ 3 \\ 81\ 7 \\ \hline 293\ 8 \end{array} \right.$$

$$497\ 866$$

$$497\ 8$$

जिनमें से दोनों का पूर्णांकन 498 होता है।

इस अवस्था से संभावना के कारण कि अधिकतर अतृप्त सराएँ अधिकतम संभव मात्रा के

4) यदि विशिष्ट अन्तिम दो पश्चात्तों की पाठ टिप्पणी 2 में विवेचित प्रक्रिया के समान प्रक्रिया से जांच करके तो पाया कि अन्तिम अन्तिम अंक साधक नहीं है क्योंकि दृष्टि की सीमाएं अनुमेय ± 0.5 के स्थान पर ± 1.0 हैं।

निरुद्ध तक वृद्धिपूर्ण होगी तथा इस महत् सम्भावना के कारण कि मूल आँकड़ा के पूर्णांकन से वृद्धियों का पर्याप्त निराकरण हो जाएगा मूल आँकड़ा का पूर्णांकन उचित है।

3 जब शुद्ध योग पहले से पता हो नव पूर्णांकित सरयाओं को जोड़ने से प्राप्त सन्निकट यागफल की अपेक्षा ज्ञान शुद्ध यागफल को अंकित करना चाहिए। इस प्रकार

	डॉडर	डालर (हज़ारा में)	योग का प्रतिशत*
	507 334	507 3	66 67
	126 832	126 8	16 67
	176 834	126 8	16 67
प्रकृत सख्याओं का योग	761 000	760 9	100 01
पूर्व ज्ञान शुद्ध योग को अंकित कीजिए	761 000	76 0	100 00

* स्तम्भ 1 से परिचालित। प्रत्येक प्रतिशत के लिए यदि मान ज्ञात है तो वह भी प्रयोग किया जाय, तब भी योगफल सदा 100 नही होगा।

पारिभाषिक शब्दावली

अंक scores, digit
 अंकित करना recording
 अन्तर inter
 अन्त क्रिया interaction
 अन्तर difference
 अन्तराल interval
 अन्तर्वेशन interpolation
 अंश numerator degree
 अकारण failure
 अक्ष axis
 अक्षर लेखन lettering
 अश्रुता lead
 अश्रुत परिणाम non sequitur
 अनुलनीय non comparable
 अनियमित irregular
 अनिर्धारण non-determination
 अनुकूलन adaptation
 अनुक्रमिक sequential
 अनुपयुक्तता impropriety
 अनुपात ratio, proportion
 अनुप्रयुक्त applied
 अनुप्रयोग application
 अनुमान inference
 अनुमानित approximate
 अनुसंधान research
 अनुसूची schedule
 अनेकधा multiple
 अन्य संक्रमण alteration
 अपक्व raw
 अपस्फीति deflation
 अग्रकट concealed
 अग्रानिविधिक unrepresentative

अभिव्यक्त designed
 अभिप्रेत approach
 अभिनत biased
 अरेखिक non-linear
 अर्ध सारणीक semi tabular
 अवधि period
 अवशिष्ट residual
 अव्याख्यात unexplained
 असमता inequality
 असममित asymmetrical
 असमूहिन ungrouped
 अस्थानस्व misplaced
 आंकड़े data
 आन्तरिक intra
 आंशिक partial
 आकलन estimate, estimating, estimatio
 आकलित estimated
 आकस्मिक sudden
 आकस्मिकता contingency
 आकार size
 आदर्श ideal
 आधार base
 आनुभविक empirical
 आयतन volume
 आरेख diagram
 आलेखन plotting
 आलोचना criticism
 आवधिक periodic
 आवर्ती periodic
 आश्रित dependent
 आसजन fit, fitness
 आसजन मौल्य goodness of fit

इकाई unit

उच्चतर higher

उत्तरोत्तर progressive

उत्पाद produce

उत्पादन production

उदगम origin

उपनति trend

उपनतिहीन unbiased

उपभोक्ता consumer

उपयुक्तता suitability

उल्टा reverse

ऊर्ध्वाधर vertical

ऋजु straight

ऋणात्मक negative

ऋतुनिष्ठ seasonal

ऋतुनिष्ठताहीन बनाना deseasonalizing

एकघातीय linear

एकल single

औसत average

औसत निकालना averaging

ककुदता kurtosis

कारक factor

कारणता causation

कारणत्व causation

कायक्रम programming

कालश्रणी time series

कालावधि period

कालिक periodic

केंद्रीय central

कैलेण्डर भिन्नता calendar variation

कोटि ordinate rank

कोटिज्या cosine

कोटिवद्ध ranked

कोणांक amplitude

क्रम order

क्रमिक progressive

क्रिया activity

क्षेत्र area zone

क्षैतिज horizontal

सङ्कटित non proven disproven

खुले सिरे वाला open end

गणन enumeration

गणन (गिनती) पत्र scoresheet tally sheet

गणना enumeration

गणितीय mathematical

गति movement

गतिशील moving

गोम्पट Gompertz

गुच्छ cluster

गुण nature quality

गुणधर्म property

गुणांक coefficient

गुणात्मक qualitative

गुणोत्तर geometric

गौण secondary

घटक भाग component part

घटवद्ध variation

घनत्व density

घात power

घातीय exponential

घूर्ण moment

चक्र cycle

चक्रवृद्धि compound

चक्रीय cyclical

चतुर्थक quartile

चतुर्थांश fourth degree quadrant

चयन choice selection

चर variable

चरघातांकी exponential

चरम extreme

चपटककुदी platykurtic

चित्रलेखन pictograph

छँटाई sorting

छायाचित्र silhouette

छिद्रण punch

जटिन complex

जनसंख्या population

ज्या sine

झाल slope

तत्त्व element

तर्कसंगत logical

तिरछा skewed

तिरछापन skewness

तिरछी रेखाओं वाला hatched

तु गककुदी leptokurtic

तुलना comparison

तुलनात्मकता comparability

तुल्यकालिक synchronous

तैमिक chronological

तोराण ogive

त्रुटि error

थोक wholesale

दर बार

दर rate

दशमक decile

दशमलव decimal

दीर्घकालिक secular

दूषित faulty

दृष्टान्त illustration

दोहरा double

द्विघातीय quadratic

द्वितीय क्रम second order

द्वितीयक second degree

द्विपद binomial

द्विबहुलकता bi-modality

धनात्मक positive

निम्नतर lower

नियंत्रण control

नियम law

निरपेक्ष absolute

निरसन elimination

निराकरणार्थी bull

निरीक्षण inspection

निरूपण demonstration

निर्देश reference

निर्देशांक coordinate

निर्माण construction

न्यूनतम least

पंक्ति row

पचमक quintile

पचमांश fifth degree

पञ्जीकरण registration

पण्य commodity

परावर्तन reversal

परिकलन computation, calculation

परिकल्पना hypothesis

परिचालन operation

परिच्छेद section

परिभाषा definition

परिमाण magnitude volume

परिवर्तनशील changing

परिवर्ती varying

परिष्कृष्टता accuracy

परिष्कार refinement

परिसर range

परिसीमा limit

परिहार (करना) (to) avoid

परीक्षण test

विलम्बता lag

पिछला सिरा (पिछनी भुजा) tail

पूर्णांकन (करना) rounding

पूर्वग्रह bias

पूर्वदर्शन preview

पूर्वानुमान forecasting

पृथक्त्व isolating

पैमाना scale

प्रकीर्ण scatter

प्रक्रिया procedure

प्रतिरूप sample
 प्रतिपादन treatment
 प्रतिरूप pattern
 प्रतिशतता percentage
 प्रतिस्थापन substitution
 प्रत्यक्ष direct
 प्रत्यय concept
 प्रदत्त given
 प्रबंध management
 प्रमाण proof
 प्रयोग experiment
 प्रयोजन purpose
 प्ररूप type
 प्रविष्टि entry
 प्रवृत्ति tendency
 प्रश्नावली questionnaire
 प्रसरण variance
 प्रसामान्य normal
 प्रसार expansion
 प्रस्तुति presentation
 प्राकृतिक natural
 प्राथमिक primary
 प्रायिकता probability
 प्रायोगिक experimental
 प्रारम्भिक prefatory preliminary
 प्रेक्षण observation
 बटन distribution
 बल emphasis
 बहु पर multiple axis
 बहुक्रम multi-stage
 बहुपद polynomial
 बहुलक mode
 वारवारता frequency
 बाह्यवेशन extrapolation
 बिंदु point dot
 बीजीय algebraic
 भारित weighted
 भौगोलिक geographical

भौतिक physical
 भ्रामक misleading
 मध्य mid
 मध्यकवुदी mesokurtic
 मात्रा quantity
 मात्रात्मक quantitative
 माध्य mean
 माध्यिका median
 मान value
 मानक standard
 माप measure measurement
 मार्गदर्शन guidance
 मूल root
 मूल तत्त्व fundamental
 मूल बिंदु origin
 यथाश quota
 यथातथ exact
 यानिक mechanical
 यादृच्छिक haphazard, random
 योग sum
 योजना plan
 रूप form
 रूपरेखा outline
 रूपानरित modified
 रेखांकन ruling
 रत्निक linear
 लघुलघुलक logarithm
 लघुगुणकीय logarithmic
 लुप्ति omission
 लेखाचित्राणी graphic
 लेखाचित्राणीय graphic
 वक्र curve
 वक्ररेखीय curvilinear
 वर्ग square
 वर्ग मूल square root
 वर्गीकरण classification

वर्णानुक्रमिक alphabetical
 वर्षानुवर्ष year over-year
 वस्तुनिष्ठ objective
 विकास development
 विक्षेपण dispersion
 विचरण variation
 विचलन deviation variation
 विच्छेद break
 वितत continued
 वितरण distribution
 विद्युत् electric
 विधि method
 विनिर्माण manufacturing
 विपणन marketing
 विम dimensional
 विवरण statement
 विविक्त discrete
 विशिष्ट specific
 विशेष आकार characteristic shape
 विश्लेषण analysis
 विश्वसनीयता dependability
 विश्वास्यता confidence fiducial
 विषम odd
 विषमगता heterogeneity
 विषमिit skewed
 विस्थापन shift
 वृत्त pie
 वृद्धिपाती logistic
 वैकल्पिक alternative
 वैषम्य skewness
 व्यञ्जक expression
 व्यवस्थित systematic
 व्यवहार practice
 व्याख्यात explained
 व्यास diameter
 व्युत्क्रम reciprocal
 शततमक percentile
 शब्दावली terminology

शीर्षक title caption
 शृङ्खला chain
 शृंगलिन आपक्षिक link relative
 शेष residual
 श्रद्धी progression
 श्रृणी series
 सकद्रण concentration
 मकेत चिन्त symbol
 मकोच contraction
 मन्दात्मक numerical
 सगन relevant
 संग्रह collection
 संचयी cumulative
 मदर्भ reference
 संपदा estate
 सम्बन्ध relation relationship
 सम्भ्रान्ति confusion
 मयोग chance
 सयोग्यता additive
 सशोधन correction
 मशोधित modified
 मकल gross
 सतत continuous
 सन्निकट approximate
 समजन adjustment
 समजित adjusted
 सम even
 समता parity
 सममित symmetrical
 समय निर्धारण timing
 समरूपता similarity
 समरेखण smoothing
 समष्टि population
 समांतर arithmetic
 समान common
 समानता equivalence
 समापवर्तन common factor
 समाहार aggregate

समाहित aggregative
 समीकरण equation
 समुचित appropriate
 समूह group
 समूहन grouping
 समूहित grouped
 सम्मिश्र complex
 सहसंबंध correlation
 सांख्यिकी statistics
 सांख्यिकीय statistical
 सान्तर्य continuity
 सापेक्ष relative
 सामान्य common
 सारणिक tabular
 सारणी table
 सारणीकरण tabulation
 सारांश summary
 सार्थकता significance
 साहचर्य association
 सिद्धांत theory, principles
 सीमा limit

सूक्ष्मता precision
 सूचकांक index, index number
 सूत्र formula
 सेवा सर्विस
 सोद्देश्य purposive
 स्तम्भ column
 स्तर level
 स्तरित stratified
 स्थावर सम्पदा real estate
 स्थिर stable
 स्थिरता stability
 स्थिरांक constant
 स्रोत source
 स्वतंत्र independant
 स्वतन्त्रता freedom
 स्वरूप shape
 स्वातन्त्र्य freedom
 हरात्मक harmonic
 ह्रास decrease

अनुक्रमणिका

अव्ययितीय प्राधिकता पत्र, 540

प्रस्ता:

पूर्वानुमान मे प्रयोग, 518—520

माप को, 514—520

प्रतिपक्षित घटवह

परिकल्पन, 347—349

वक, 348—349

व्याख्यात, 227—228

ममरेक्षण, 343—347

प्रतिपक्षित का गुणक, 419

अनुक्रमिक प्रतिपक्ष, 28

अनुपपन्नताएँ (प्रतिपक्षितताएँ दूयित प्रयोग भी देखिये)

प्रपक्षित परिणाम, 8

अनुवर्तीय प्रोक्त, 8

अपर्याप्त प्रोक्त, 9—10

अप्रकट वर्गीकरण, 10

अप्रतिनिधिक प्रोक्त, 10

असावधानी, 8

इकाइयों की व्याख्या का अकरण, 10

निकृष्ट रूप मे अभिकल्पित प्रयोग, 11—12

पूर्वग्रह, 6—7

आमक योग, 11

महत्त्वपूर्ण कारक की सुप्ति, 7

साहचर्य और कारखाना की सम्प्रति, 9,
424—425

अनुपात (प्रतिपक्षितताएँ, दूर भी देखें).

सोमल निकायना

समांतर/सकलश्रुतीय, 137, 166—167,
608

समांतर बनाम गुणोत्तर ज्यामितीय माध्य,
182—183, 360—384

परिकल्पन, 123—125

परिवर्तनशील भाषा का प्रभाव, 125—126

प्रकार, 127—128

प्रतिपक्षितताएँ अंकित करना, 126—127

प्रतिपक्षितताएँ का दूयित प्रयोग, 135

प्रयोग के उदाहरण, 128—135

अनुपात चार्ट (अर्ध सयुग्मकीय चार्ट देखें)

अनुमान, सांख्यिकीय (आर्थिकता परीक्षण,
विश्वास्यता सीमाएँ देखें)

अनुमान विधियाँ, 12—14

अनुवर्तियों का सम्पादन करना, 33—34

अनुसूची.

उदाहरण, 18—19

तैयार करना, 18—23

पद का अर्थ, 16

प्रयोग, 31—33

सम्पादन करना, 33—34

सारणीकरण, 35—42

अनेकधा निर्धारण का गुणक (निर्धारण
का गुणक देखें)

अनेकधा सहसम्बन्ध :

अत.सहसम्बन्ध का प्रभाव, 483—484

अतिरिक्त वर्ग का प्रभाव, 473

अरेखिक, 493—494

ग्रह (व्याख्या), 470—473

असंग-अनग स्वतंत्र चरों का महत्त्व, 492—
493

आकलन की मानक दूयियों (आकलन की
मानक दूटि देखें)

आकलन के शुद्ध गुणक, 471, 480, 485, 492

आकलन समीकरण (आकलन समीकरण देखें)

गुणांक के समष्टि आकलन, 658

गुणाको के सार्थकता परीक्षण, 656—658
 चार या अधिक स्वतंत्र चर 487, 490—492
 तथा व्याख्यात विचरण घटवद, 473, 481,
 486
 तीन स्वतंत्र चर, 484—487
 दो स्वतंत्र चर, 480—481
 प्रसामान्य समीकरण (सहसम्बन्ध में प्रसामान्य
 समीकरण देखें)
 वक्ररेखीय, 493—494
 समय, स्वतंत्र चर, 510
 सरल गुणाको से प्राप्त गुणाक 484 टि
 491—492
 सरल तथा आंशिक गुणाको से प्राप्त गुणाक,
 491—492
m चर, 487, 490—492
 ग्रन्थ-संक्रमण का गुणाक, 419 टि
 प्रपक्षीतिकरण, 231 356
 घरेलिक सहसंबन्ध
 अनेकधा, 493—494
 गुणाक का समष्टि आकलन 653—654, 656
 गुणाको के सार्थकता परीक्षण, 651—656
 तृतीयांश वक्र का प्रयोग, 444—449
 द्वितीयांश वक्र, 437—442
 माध्यो का प्रयोग, 465—468
 लघुगणको का प्रयोग 449—451 453—
 458, 463—464
 वर्ग मूलो का प्रयोग 450—453, 458
 —461
 व्युत्क्रमो का प्रयोग, 451—453, 464—465
 अर्ध-घन चतुर्थक परिमर 194
 अर्ध लघुगणकीय चार्ट (लघुगणकीय चार्ट भी
 देखें)
 अनुप्रयोग, 98—105
 चक्र, 94—98, 105
 निर्माण के सिद्धांत, 94—98, 105—106
 परिभाषित, 93
 पैमाने का निर्माण, 94—98, 105—106
 पैमाने का प्रसार और सकोच, 105
 प्रयोजन, 87

व्याख्या, 98
 अर्ध-सारणीक प्रस्तुति, 47—48
 अमिटेज, पौ०, 28 टि
 अल्फा, 212, 213, 218, 552—555
 अव्याख्यान विचरण (घटवद)
 अनेकधा सहसंबन्ध .
 तीन स्वतंत्र चर, 486
 दो स्वतंत्र चर, 482
 घरेलिक सहसंबन्ध .
 तृतीयांश वक्र, 444—449
 द्वितीयांश वक्र, 441
 लघुगणको से ऋजुरेखा, 456, 464
 वर्गमूलो से ऋजुरेखा, 459
 व्युत्क्रमो से ऋजुरेखा, 464
 द्विचर रेखिक सहसंबन्ध, 417—418, 423,
 442 478
 आंकडे, सांख्यिकीय (मूल्यांक, आंकडे भी
 देखिए) .
 मपर्याप्त, 9—10
 कालबिन्दु आंकडे, 67—68
 कालावधि आंकडे, 67—68
 तुलनात्मकता, 44—46
 परिभाषा 1
 प्रस्तुति
 अर्ध-सारणीक निरूपण 49
 चार्टों द्वारा, 63—122
 पाठ, 47—48
 सांख्यिको द्वारा, 48—53
 वर्गीकरण, 3—6
 विश्लेषण, 3—6
 व्याख्या, 6
 संग्रह, 2—3, 16—42
 सारणीकरण, 35—42
 स्रोत, 42—46
 आंकडों का संग्रह
 अनुगूची :
 आंकडों को सुव्यवस्थित करना, 34—42
 तैयार करना, 18—23

- प्रयोग, 31—33
 सम्पादन करना, 33—34
 प्रक्रिया की रूपरेखा, 16
 प्रतिदर्श का चयन, 23—31
 विधियाँ :
 गणन/गणना, 16, 31—33
 डाक (भेजना) 16, 18 32
 पंजीकरण, 16
 साधारण योजना, 17
 ग्रांकिडो की प्रस्तुति (भविष्य, मारियकीय प्रस्तुति देखें)
 ग्रांकिडो की प्रस्तुति के लिए वक्र
 अक्ष, 65—67
 अक्षर लेखन, 76—79
 साधारण रेखा, 74
 ऊर्ध्वधर पैमाने पर शून्य, 71—74
 ऊर्ध्वधर पैमाने में विच्छेद, 73
 चतुर्थांश, 64
 चार्ट अनुपात, 76
 बड़े चार्टों से तुलना, 85 112—113
 118—119
 निर्देशांक, 75
 पैमाने के लेखन, 76
 मूल बिन्दु, 65
 रेखांकन, 74—75
 बारवारता वृद्धि 68—71, 143—155
 शीर्षक, 79
 स्रोत, 79
 ग्रांकिडो के स्रोत
 उपयुक्तता, 43
 गोण, 42—43
 तुलनात्मकता, 44—46
 प्राथमिक, 42—43
 प्राशिक निर्धारण, गुणांक (निर्धारण का गुणांक देखें)
 प्राशिक सहसम्बन्ध
 अर्थ, 473—474
 आकलन का शुद्ध गुणांक, 473—474
 गुणांक का समष्टि आकलन, 659—660
 गुणांक के मापकता परीक्षण, 658—660
 चार या अधिक स्वतंत्र चर, 490—492
 तीन स्वतंत्र चर, 487 490
 तृतीय या उच्चतर क्रम गुणांक, 491
 दो स्वतंत्र चर, 482—483 488—490
 द्विचर अरेलिक सहसम्बन्ध में प्रयुक्त, 443 टि
 द्वितीय क्रम गुणांक, 487 490
 निम्नतर क्रम गुणांक से प्राप्त गुणांक, 488—490
 प्रथम क्रम गुणांक 482—483, 488—490
 व्याख्यान विवरण, 473—474, 482—483, 487
 समय स्वतंत्र चर 510
 आकलन की मानक त्रुटि
 अनेकधा सहसम्बन्ध
 अतिरिक्त चरों का प्रभाव 481, 486
 चार या अधिक स्वतंत्र चर, 487
 तीन स्वतंत्र चर 484—487
 दो स्वतंत्र चर, 473, 481
 अरेलिक सहसम्बन्ध
 तृतीयांश वक्र 444
 द्वितीयांश वक्र 441
 लघुगुणांक से ऋजुरेखा, 456—457, 464
 वगुणुनो से ऋजुरेखा, 460
 व्युत्क्रमो से ऋजुरेखा, 465
 द्विचर रेलिक सहसम्बन्ध
 अममूहित आकड़े, 411, 413—417, 423, 442 478
 समूहित आकड़े, 432
 आकलन, शुद्ध गुणांक, 471—472
 आकलन समीकरण.
 अनेकधा वक्ररेखीय सहसम्बन्ध, 493—494
 अनेकधा सहसम्बन्ध.
 चार या अधिक स्वतंत्र चर, 487
 तीन स्वतंत्र चर, 484—485
 दो स्वतंत्र चर, 471, 480—481, 486—487
 अरेलिक सहसम्बन्ध :

तृतीयाम वक्र, 444
 द्वितीयाम वक्र, 437
 लघुगणको से ऋजुरेखा, 449—450,
 454—455, 457, 463,
 वगंमूत्रो से ऋजुरेखा, 450—451, 458—
 461
 व्युत्पन्नो से ऋजुरेखा, 451—453
 द्विवर रेखिक महामन्वधः
 सममूर्ति आंकडे, 411—413, 422 423,
 442 477
 सममूर्ति आंकडे, 431
 आकलित मानक त्रुटि (मानक त्रुटि. आकलित
 दत्त)
 आकलितमान, माध्य वगं का गणक, 435—
 436
 “आदर्श सूचकांक
 आलोचना, 373—374
 कारक परावर्तन परीक्षण, 390—391
 समय परावर्तन परीक्षण, 390
 सूत्र, 373
 आधार रेखा, 74
 आरेख (प्रकीर्ण आरेख देखें)
 आवर्ती गतियाँ (ऋतुनिष्ठ गतियाँ ऋतुनिष्ठ
 सूचकांक भी देखें)
 आन्तरिक वर्ण सूचकांक (ऋतुनिष्ठ सूचकांक
 देखें)
 प्रकार, 223, 226
 व्याख्या, 223—226
 आश्रित चर (चर देखें)
 आसजन की कमीटी (निष्पत्ति) ‘सामान्य’, 235
 आश्रित योग, 272, 279
 चुने हुए, किन्तु, 280, 285
 न्यूनतम वर्ण, 238—248, 744—746
 बराबर/समान क्षेत्र, 235
 इकाइयाँ, मारणी में दिखाना, 59—60
 इलेक्ट्रॉनिक नाख्यकीय मशीन, 37
 इंस्टर के लिए समझन, 323
 उपनिधि :

अन-चक्र, 354
 आंकडों का अनुक्रमिक परीक्षण, 289—290
 आन्तरिक चक्र, 354
 आसजन -
 अन्त स्पर्शी वृद्धि वक्र 267—288
 गाम्भिर्य, 272—279
 निरीक्षण उपनिधि, 235, 289
 वृद्धपद (वृद्धपद धोणी देखें)
 रूपांतरित चरघातांक (घातीय), 268—
 272
 वृद्धिघाती, 279—286
 काल-चयन, 251—253
 गौण, 228
 दीर्घकालिक, 219—222, अध्याय, 12,
 अध्याय 13
 प्ररूप का चयन, 288—290
 व्याख्या, 219—222
 समजन, 328—330, 337—339
 स्वभाव, 219—222
 उपनिधिहीन आकलन (समष्टि आकलन देखें)
 उपमोक्षा कीमत सूचकांक, 356, 399—400
 उन्टा J वक्र, 150
 ऋजुरेखा उपनिधि -
 न्यूनतम वर्ण आसजन :
 प्रयोग के कारण, 238—243
 प्रमामान्य समीकरण, 240—243, 746—
 747
 प्रेक्षण समीकरण, 241, 243
 लघुगणको से आसजन, 261—265
 वर्णों की विषम सरावा, 243—246
 वर्णों की सम सरावा, 246—248
 समीकरण का मासिक आंकडा से अनुकूलन,
 248—251
 समीकरण का वर्णन, 236—238
 ऋतुनिष्ठ गतियाँ
 प्रकार, 223—225 (ऋतुनिष्ठ सूचकांक भी
 देखें)
 रचि के कारण, 225

समंजन :

- घटाव द्वारा, 336—337
भाग करके, 330—335
स्वभाव, 223—225
ऋतुनिष्ठ घटबढ़ (ऋतुनिष्ठ गतियाँ देखें)
ऋतुनिष्ठ सूचकांक (ऋतुनिष्ठ गतियाँ भी देखें)
प्राकस्मिक परिवर्तन, 324
ईस्टर समंजन, 323
कोणांक समंजन, 324—325
गणितीय, 313—323
तर्कसंगत आधार, 327
परिवर्तनशील, 313—323
परीक्षण, 311—312, 336,
सचय प्रकार, 326—327
समय निर्धारण में लघुकालिक विस्थापन 324
मातृत्व, 325—326
स्थिर (नीचे स्थिरांक देखें)
स्थिरांक :
उपनति की प्रतिशतता 296—297
गतिशील श्रोमन की प्रतिशतता, 297—
311
मूलकृत आपेक्षिक, 311
एन्क्वैर, एफ० जे०, 28 टि
एरिक्सन, डब्ल्यू० ए०, 27 टि
ऐनवर्थ, एफ० वॉई, 371
ऐडलर, एफ०, 618 टि
ऐडलर, डब्ल्यू० पी०, 547 टि
श्रीयोगिक उत्पादन का कैडरल रिजर्व सूचकांक,
404—405
श्रीयोगिक उत्पादन का सूचकांक, 404
श्रीयोगिक क्रिया, सूचकांक, 405
श्रीसत (केन्द्रीय प्रवृत्ति देखें)
श्रीमन विचलन, 195
ककुदता
माप, 212—216
लेखाचित्रीय उदाहरण, 193, 213, 216

- माध्यकता परीक्षण, 645—646
बगोट, सभाविता (L देखें)
वाई वर्ग
"आसजन मीष्टव" परीक्षण, 619—620
प्रसरण 624—627
प्रसामान्य t तथा F बटनों से सम्बन्ध, 645
बटन, 610—611
मध्य वर्ग प्राकस्मिकता का गुणांक, 435 टि
मानों की मारणी 700—701
चक्र 611
वैकल्पिक यथातथ विधियाँ 612, 615—618
म्हान-य प्रश्न 609, 614 618—619, 624
 P — परीक्षण के समान 609—610
 P_1 — P , परीक्षण के समान, 612—613
 θ या s' की सांख्यिकता का परिणाम 624—
626
 σ की विश्वाम्यता सीमाएँ 626—627
 $1 \times R$ मारणियों के साथ प्रयुक्त 518—620
 1×2 मारणियों के साथ प्रयुक्त, 609—612
 2×2 मारणियों के साथ प्रयुक्त, 612—615
 2×3 तथा बड़ी मारणियाँ, 621—623
काउन्ट डी० जे० 135 टि, 166 टि, 767 टि
कॉक्स, हेरोल्ड 15
काना, अल्फ्रेड जे०, 561, 562
कारक परावर्तन परीक्षण 390—391
वॉर्ड विद्रुण, 37—42
कालविन्दु आंकड़े, 67—68
काल श्रेणी
आंकड़ों का प्रारम्भिक प्रतिपादन, 228—233
आलेखन, 67—68
गतियाँ
अनियमित, 227—228, 347—349
आवर्ती, 223—226
उपनति, गोण, 228
उपनति, दीर्घकालिक, 219—222, अध्याय
12, अध्याय 13
चत्रीय, 226—227, 337—347, 349—
353
(दीर्घ) लम्बे चक्र, 228

महसम्बन्ध (बाल श्रेणी सहसम्बन्ध देखें)
 काल श्रेणी में प्रसामान्य, 342
 काल श्रेणी में प्रसामान्य समीकरण
 ऋजु रेखा, 243—246
 तृतीयांश वक्र, 260—261
 द्वितीयांश वक्र, 256—260
 लघुगणको से प्राप्तजित ऋजुरेखा, 261—265
 लघुगणको से प्राप्तजित द्वितीयांश वक्र, 265—
 267
 काल श्रेणी सहसम्बन्ध (परचता भी देखें)
 अनेकधा और आंशिक सहसम्बन्ध का प्रयोग, 510
 असमजित घाँकड़े, 495—496
 उपनति के लिए समजन
 उपनति प्रतिशतताएँ, 495—507
 उपनति से निरपेक्ष विलयन, 510
 प्रतिशतता भतर, 510—511
 प्रथम अन्तर, 510—511
 चक्रीय सापेक्षों के प्रयोग द्वारा उपनति और
 ऋतुनिष्ठ के लिए समजन, 513—520
 निरपेक्ष विचलनों तथा आंशिक सहसम्बन्ध के
 प्रयोग की समानता, 510—511
 समस्याएँ, 512—513
 कालावधि घाँकड़े, 67—68
 कालिक वक्र, 353
 किलगोर भार० 405 टि
 कीमत मापेक्ष
 व्यवहार, 359—361
 व्याख्या, 375—376
 सूचकांकों के निर्माण में प्रयोग, 375—380
 कीमत सूचकांक (समाहत कीमत सूचकांक,
 सूचकांक देखें)
 कुल विचरण
 अनेकधा सहसम्बन्ध
 तीन स्वतंत्र चर, 486
 दो स्वतंत्र चर, 473, 481
 अरेखिक सहसम्बन्ध :
 तृतीयांश वक्र, 447
 द्वितीयांश वक्र, 441
 लघुगणको से ऋजुरेखा, 445—456

वर्गमूलो से ऋजुरेखा, 459
 व्युत्क्रमो से ऋजुरेखा, 464—465
 सहसम्बन्ध अनुपात, 465—468
 द्विचर रेखिक सहसम्बन्ध, 417—419, 423,
 442, 477, 478
 प्रसरण का विश्लेषण, 633—634, 636, 637
 कृपको द्वारा प्रदत्त तथा प्राप्त कीमतों के सूचकांक
 401—403
 छपि बिपणन सेवा (एपीकल्चरल मार्किटिंग सेवा)
 सूचकांक 401—403
 बेंडाल, एम० जी०, 435 टि, 436 टि
 केंद्रीय प्रवृत्ति के माप
 गुणोत्तर माध्य, 181—185, 380—383
 द्विघातीय माध्य, 191
 बहुलक, 172—174
 माध्यिका, 168—170
 मशोधित माध्य, 165—166, 294—295,
 307—311
 समान्तर माध्य, 156—168, 376
 समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य, और हरात्मक
 माध्य की तुलना, 181—184, 186—
 191, 741—742
 समान्तर माध्य, माध्यिका तथा बहुलक की
 तुलना, 174—180
 हरात्मक माध्य, 185—191, 383, 393
 कैम्प-मीडेल असमता, 201
 कैली, टू. ग्रेन ली, 489 टि
 कैलेन्डर भिन्नता, समजन, 229—231, 297
 —301
 कोचरन, डब्ल्यू० जी०, 620
 कोटिवद्ध घाँकड़े, सहसम्बन्ध, 432—434
 कोणांक अनुपात, 324—325
 गतिशील, 325
 क्रॉस्टन फेडरिक ई०, 107 टि, 116 टि, 135
 टि, 147 टि, 166 टि, 300 टि, 409,
 425 टि, 426, 451 टि, 521 टि,
 527 टि, 593 टि, 628 टि, 696,
 697, 767 टि
 क्लेन, सिडनी, 7 टि, 11 टि, 15 टि, 301

टि, 521 टि
वनोपर, सी० जे०, 607
क्षेत्र प्रतिदर्श, 26

मरण, 16
गणितोप मिडिया (प्रमाण), 740—766
गतिशील ऋतुनिष्ठ, 313—323
गतिशील श्रोत
अनियमित गतियों समरूप, 343—347
ऋतुनिष्ठ मूचकाक परिवर्तन में प्रयत्न, 298
—306

गाम्पत वक्र 272—279
ग्रामजन, 272—279
गुणधर्म, 272—273
प्रथम अन्तर 287
विशेष आकार के चाट 273
वृद्धि का 'नियम' 276—279
वृद्धिपाती में तुलना, 287—288
गास्टन, मर ए० 411 टि
गुच्छ प्रतिदर्श 25
गुण-नियम, 28, 572
गुणाक

अनिर्धारण 419
अन्य-सनामण, 419 टि
प्रलण निर्धारण, 492—493
ककुदता, 212—216
निरुद्धापन, 205—212
निर्धारण (देखें निर्धारण का गुणाक)
माध्य वर्ग आकस्मिकता, 435—436
विचरण, 202—205
शुद्ध आकलन, 471
सभावता (L देखें)
समरूपता, 512 टि
सहसम्बन्ध (निर्धारण का गुणाक देखें)
गुणात्मक वटन, महसबब, 434—436
गुणोत्तर माध्य :
असमूहित आँकड़ों से, 181—182
गुणधर्म 181—182
प्रयोग :
अनुपातो का प्रोसत निबालना, 182—183

निरुद्ध/विपमित वटन, 184, 552
परिवर्तन की दर मालूम करना, 184—
185

मूचकाक, 373 380—384
व्याख्या 181
ममान्तर माध्य से तुलना, 182—183, 190
—191, 380—384, 629—630,
742

समूहित आँकड़ों से, 181
हरारमब माध्य से तुलना, 191 741—
742

गुणोत्तर श्रेणी (चक्रवृद्धि व्याज वक्र, चरघाताकी
वक्र भी देखें)

अकगणितोप ग्रिड पर आरोपित, 88
अर्ध-लघुगुणकीय ग्रिड पर आरोपित, 93
आरोपित गुणोत्तर श्रेणी के लघुगुणक, 92
गुणधर्म 88—89

गैलप, जार्ज० एच०, 29 टि

गोण उपनि, 228

गोण स्रोत, 42—46

गोस का वक्र (प्रामाण्य वक्र देखें)

गोम जे० के० एफ०, 523

ग्राम-चालियर श्रेणी, 552 टि

प्रेविल, ए० ए०, 25 टि, 28 टि, 571 टि

ग्वेंटर, हब्ल्यू० सी०, 86 टि

घटक-भाग चाटें

दण्ड चाटें 114, 116—119

रेखा आरोप, 85

वृत्तरेखा, 114, 116—119

घट वट (विचरण)

अत क्रिया के कारण 642

अवशिष्ट, 637

अव्याख्यात (अव्याख्यात विचरण देखें)

कुल (कुल विचरण देखें)

गुणाक, 202—203

निर्धारण के गुणाक (व्याख्यान विचरण देखें)

पक्कि माध्यों के बीच, 637—639

बसो या सैलो के भीतर, 639—642

व्याख्यान (व्याख्यान विचरण देखें)

संयोज्यता-गुण, 417—418 -
स्तम्भ माध्य, 631—632, 637, 639, 764
—765

स्तम्भों के भीतर, 633, 765—766

घनत्व (बारबारता घनत्व देखें)

घूर्णं .

चतुर्थ घूर्णं, 212—216,

तृतीय घूर्णं, 209—212 217—218

द्वितीय घूर्णं, 210, 217—218

प्रथम घूर्णं, 209, 217—218

सशोधन, समूहन दृष्टि के लिए, 217—218

लागू होना, 217, 554 टि

चक्र आरेख, 114, 115—119

चक्र (चक्रीय) चाटें, 352

चक्रवृद्धि व्याज वक्र 89 टि, 184—185, 261
—265

चक्रीय गतिया

तुलना, 349—353, 513—520

पृथक्त्व की विधियाँ,

निर्देश चक्र विशेषण, 354—355

प्रत्यक्ष, 353

विशिष्ट चक्र विशेषण 355

शेष, 330, 337—347

ह्रासक विशेषण, 353

व्याख्यात, 226—227

सहस्रबध 513—520

चर्चोंक. राबर्ट इ०, 136 टि

चतुर्थक, 170—172

चतुर्थक माप :

तिरछापन, 209

विशेषण, 194—195

चतुर्थक विचित्रन, 194—195

चतुर्थीग वक्र (वृहस्पद श्रेणी देखें)

चर .

सतत तथा विविक्त, 146

स्वतंत्र और आश्रित, 408, 470

चरघाताकी (घातीय) वक्र .

आसजन, 261—265

गुणधर्म, 261—262

रूपांतरित, 268—272

गुणधर्म, 268—269

चपटंकुदी बटन, 193, 212, 213, 647

चाटें अनुपात, 76

चाटें का अक्षर लेखन, 76

चाटों की प्रतिकृति, 76

चाटों के प्रकार, 64—65

चाटों के लिए निर्देशांक, 75

चित्रलेख, 113—114, 115

घुने हुए बिन्दु, वृद्धिघाती वक्र का आसजन,
279—285

चेबोचैफ को प्रसमना, 201

छाया-चित्र चाटें, 80

छिद्रण कार्ड, 37—42

अन्त दरें, 131

जातीय अन्तर बनाम सांख्यिकीय अन्तर, 587

जेटाइल, मिस मेरियन सी०, 656 टि

जोड, विषम प्राकृतिक संख्याओं की घातों का,
690—691

ज्या-कोटिज्या वक्र, 353

टाइप की मशीन का प्रयोग :

सागणी तैयार करना, 61—62

टॉमस, पी० ओ०, 86 टि

टेलर, डब्ल्यू० एल०, 433 टि

डी मावेर, अब्राहम, 523

इलिटल विधि, 445

डोयल, रोजर पी०, 578, 626,

तिरछापन :

अर्थ, 205

चाटें, 192, 206

निरूपण बनाम सापेक्ष, 205, 208

सापेक्ष माप .

चतुर्थको का प्रयोग, 209

तृतीय घूर्णं का प्रयोग, 209—212

सिक्सन, 205—208

अतमको का प्रयोग, 209
सायंकता परीक्षण, 645—646
आसजन, लघुगणको का प्रयोग, 546—552
विषमता के समजन के साथ प्रसामान्य
वक्र का आसजन, 552—555
गुणकद्वयी बटन, 193 212—216 347 645
तृतीयांश वक्र (बहुपद श्रेणी देखें)
सोख, 154—155, 170, 174
बुटि का प्रसामान्य वक्र (प्रसामान्य वक्र देखें)
बुटियाँ द्वितीय प्रकार 569
प्रथम प्रकार, 568

घाम्पवन, कैपरील एम०, 701, 707
घोक वस्तु पथ कीमतों का सूचकांक, 360—
361, 400—401
घोक वस्तु मूल्यों का सूचकांक, 128

दह चार्ट

घटक भाग, 114 116—119
जटिल प्रकार, 109—113
वारवारता बटन कॉलम (स्तंभ) आरेख 69
—70

सरल वक्र से तुलना, 112

माधारण/सरल, 109

दरें

जन्म, 131
पद का प्रयोग, 123 टि
मूल्या, 129—130

दशमक, 170—172

दीर्घकालिक उपनति (उपनति देखें)

दीर्घ (सम्बन्ध) चक्र 228

दुरुपयोग (अनुपयुक्तताएँ देखें)

दोहरा लघुगणकीय कागज (लघुगणकीय चार्ट
देखें)

द्विचर रेखिक सहसम्बन्ध

असमूहित आंकड़े, 421—424

आकलन की मानक बुटि, 411—417

आकलन समीकरण, 411—413

उत्पाद घुग सूत्र, 420—421

कोटिबद्ध आंकड़े, 432—434

गुणाको का समष्टि आकलन, 650—651

गुणात्मक आंकड़े, 436—438

निर्धारण गुणांक

और व्याख्यात घटवट, 417—420

और सभान कारको के अनुपात, 420 टि

मनेक्या सहसम्बन्ध, 481, 486

परिणाम तुलना

अर्थव्यवस्था सहसम्बन्ध, 442 444

व्यापक सहसम्बन्ध, 481 489—490

प्रकीर्ण आरेख 407 408, 422—423

प्रत्यय, 407—410

प्रसामान्य समीकरण 411—413,

समूहित आंकड़े 429—432

सहसम्बन्ध का गुणांक और आकलन समीकरण
का ढाल 420—421

सायंकता परीक्षण 647—651

द्विघातीय माध्य 191

द्वितीय अर्थव्यवस्था सहसम्बन्ध गुणांक, 487,
490—491

द्वितीयांश वक्र (बहुपद श्रेणी देखें)

द्विपद

आमजन, 540—546

तथा प्रसामान्य वक्र 524—527

प्रतिदर्श अनुपातों के साथ प्रयुक्त, 558—
590 594—599, 603—607

द्वि-बहुलकता, 174

नाम, के० आर० 282 टि

निराकरणार्थी परिकल्पना, 566

सिद्धि, 567

निरीक्षण उपनति 235, 289, 314—320

निर्देश चक्र विशेषण, 354—355

निर्धारण अथवा गुणांक, 492

निर्धारण का अनुपात (सहसम्बन्ध अनुपात का
वर्ग), 466

निर्धारण का गुणांक :

अनेकधा

अतिरिक्त चर का प्रभाव, 473

चार या अधिक स्वतन्त्र चर, 487, 490
—492

तीन स्वतन्त्र चर, 484—487, 492
दो स्वतन्त्र चर, 473, 481, 484 टि, 491
—492

सापेक्षता परीक्षण, 656—658

अनेकधा आशिक, 488

अरेखिक :

तृतीयांश वक्र, 447

द्वितीयांश वक्र, 441—442

लघुगणको से ऋजुरेखा, 456, 464

वर्गमूलों से ऋजुरेखा, 459

व्युत्क्रमों से ऋजुरेखा, 465

सापेक्षता परीक्षण, 651—656

आशिक :

तृतीय या उच्चतर क्रम, 487, 490—492

द्वितीय क्रम, 487, 490—491

प्रथम क्रम, 473—474 482—483,

488—490

सापेक्षता परीक्षण, 658—660

निर्धारण गुणांक :

द्विचर रेखिक, 617—421, 423—424,

442—443, 478

विषयान्वयता सीमाएँ, 649—670

सापेक्षता परीक्षण, 647—651

निर्धारण गुणांक, समष्टि मान का आकलन

(समष्टि आकलन देखें)

नैयर, पी० पी० एन०, 711

न्यूनतम वर्ग, 238—243, 744—747

पचमक, 170—172

पचमांश वक्र (बहुपद श्रेणी देखें)

पजीकरण, 16

परिकल्पना, निराकरणशील (निराकरणशील

परिकल्पना)

परिचालन अनुसंधान, 14

परिवर्तनशील ऋजुनिष्ठ, 223—224

आकस्मिक, 323—325

उत्तरोत्तर 3133—23

परिवर्ती क्षैतिज, पैमाना चार्ट, 83

परिसर, 193—194

परिसर चार्ट, 80

पनरीड वक्र, 279—286 (वृद्धिघाती वक्र भी देखें)

पल, रेमण्ड, 285 टि

पश्चता :

पूर्वानुमान में प्रयोग, 518—520

माप, 514—520

पाठ सारणी, 49

पाशे, एच०, 371

पियर्सन, ई० एम०, 579 टि, 606—607,

616 टि, 645, 689, 693, 695,

701, 707, 712, 713

पियर्सन, वाल्स, 205, 208 टि, 407 टि, 555,

689, 693, 695

पूर्णान्न, 127, 767—771

पूर्वग्रह, 6—7

प्रतिदर्श में, 28, 31

पूर्वानुमान, 104—105, 276—279, 286,

514—520

पोयसन बंटन, 527 टि

प्रकीर्ण अनुपात, 457

प्रकीर्ण आरेख, 407—408, 422

प्रकीर्ण क्षेत्र (आकलन की मानक त्रुटि देखें)

प्रतिदर्श :

का प्रयोग

विटरेरी डाइजेस्ट 10, 25, 31

विनिर्माणों की गणना, 23

सार्वजनिक राय की अमरीकी संस्था

(अमेरिकन इंस्टीट्यूट ऑफ पब्लिक

ओपिनियन), 29

सूचकांक, 363—365

पूर्वग्रह, 28, 31

प्रतिदर्शों के प्रकार :

अनुक्रमिक, 28

क्षेत्र, 26

गुच्छ, 26

बहुक्रम, 26

यथाश, 28

यदृच्छ, 30

यादृच्छिक, 23—25

यादुच्छिद्रक बिन्दु, 28
 व्यवस्थित, 25
 सोहेर्य, 28
 स्तम्भ, 26—28
 स्थिरता की परम सामग्री, 30
 प्रतिदर्श माना के परीक्षण (मापकता परीक्षण देखें)
 प्रतिशतता (समुपात दरें भी देखें)
 प्रोमल निकासता, 137, 166—167 608
 कुल 100 प्रतिशत तक पूर्णांकन 57—58
 126—127
 दूधित प्रयोग 135—137
 सार्वकता परीक्षण 588—609
 100 प्रतिशत विवरण, 133—134
 प्रतिशतता, वास्तविकता बटन 151—152
 प्रथम कम प्राणिक सहसम्बन्ध गुणांक, 482—
 483, 488—490
 प्रथम धूण सहसम्बन्ध 512 टि
 प्रथम प्रकार तथा द्वितीय प्रकार की प्रतियोगिता
 569—569
 प्रबन्ध शिक्षा 14
 प्रविष्टि पत्र, 143
 प्रभावशील 16
 प्रसरण (विचरण)
 प्रतिदर्श, 195
 प्रिन्सिपल (प्रसरण का प्रिन्सिपल देखें)
 समष्टि, 197, 564
 समष्टि का
 पत्र क्रिया में प्राकृतिक 642—644
 अनेक प्रतिदर्शों से प्राकृतिक, 581 टि
 अवशिष्ट विचरण में प्राकृतिक, 637—
 638
 एक प्रतिदर्श से प्राकृतिक, 572—57
 दो प्रतिदर्शों से प्राकृतिक, 579—580
 पक्षि माध्यों से प्राकृतिक, 637—638,
 642—644
 बच्चों के भीतर अन्तर्क्रिया और विचरण से
 प्राकृतिक 643—644
 बच्चों या सेवा के भीतर विचरण से प्राकृतिक
 642—644

स्तम्भ माध्यों से प्राकृतिक, 634 637—
 638 642—644
 बच्चों के भीतर अन्तर्क्रिया 634—635
 प्रसरण का विचरण (प्रसरण और पदचक्र
 भी देखें)
 अनुनिष्ठ सूचकांक का परीक्षण 311—312
 वर्गीकरण की एक बड़ी 630—635
 वर्गीकरण की दो बड़ी (निकष)
 एक बचन में एक प्रविष्टि, 635—639
 एक बचन में कई प्रविष्टियाँ 639—644
 वर्गों 630
 सहसम्बन्ध से प्रवृत्त
 अनेकवा सहसम्बन्ध 656—658
 अनेक सहसम्बन्ध 651—656
 आशिक सहसम्बन्ध 658—660
 द्वितीय श्रेणी सहसम्बन्ध, 647 टि
 प्रमाणात्मक प्रतिक्रिया वक्र (प्रमाणात्मक वक्र दल)
 प्रमाणात्मक वक्र या बटन (तनुयुक्तता प्रमा-
 नात्मक वक्र भी देखें)
 आसन्न
 कोटियाँ, 520—532
 क्षेत्र 532—536, 536—538
 उपयुक्तता का परीक्षण 538—540, 619—
 620
 ऐतिहासिक विकास 523—524
 कार्यक्षेत्र तथा बटनों से सम्बन्ध, 645
 कार्यक्षेत्रों की सारणी, 692—693
 क्षेत्रों की सारणी, 694 696, 697
 तथ्य द्विपद 524—527
 समीप के नियमों से विकास, 523—527
 साधकता परीक्षण 557—564 590—594
 596—600 600—602, 608—
 609 609—610, 612—615,
 648—649 659
 सूत्र, 527—528
 प्रमाणात्मक पक्षिकरणों का बण्डन, 240—243,
 246—247
 प्राकृतिक (तथा विषय प्राकृतिक) सहायकों
 की पानों का बोट, 690—691

प्राकृतिक सम्पादनों की छाती के योग, 688—690

प्राथमिक सोन 42—43

प्राथमिक पत्र •

अन्वेषणीय, 540

लघुगणकीय 549

प्रेक्षण समीकरण, 241—243

प्रोटोस्टर प्रतिग्रतना, 116 118

प्लेफेदर, विलियम, 64 टि

फाकम, कालं ए०, 320 टि

फिले, डी० जे०, 616 टि

फिशर आर० ए०, 24 टि 261 टि, 648 टि, 698, 701 707

फिजर, इरविंग, 364 टि, 373 टि, 374 टि, 390, 391 392 (आदर्श" सूचकांक भी देखें)

फुकाजे, एच० प्रे०, 64 टि

फूट आर० जे०, 320 टि

वर्कलैण्ड, डब्ल्यू० आर०, 12 टि

वह अक्ष चार्ट, 83 85

वहूतम प्रतिदर्श 26

वहूपद श्रेणी

काल श्रेणी में उपनति

ऋजु रेखा, 235—248

चतुर्थ अंश (चतुर्थांश), 254—255

तृतीय अंश (तृतीयांश), 254—255 260—261

द्वितीय अंश 254—255, 256—260

पंचम अंश (पंचमांश), 254—255

लघुगणकी में आमजिन ऋजु रेखा, 261—265

लघुगणकी में आमजिन द्वितीयांश वक्र 265—267

महम्मदगंध में आमजिन समीकरण

ऋजु रेखा, 411—413, 442—443

तृतीयांश, 444—449

द्वितीयांश, 437—442

लघुगणकी से ऋजु रेखा, 449—452, 453—458, 463—464

वर्गमूलों में ऋजु रेखा, 451—453, 458—461

द्युत्तमों में ऋजु रेखा, 451—453, 458—461

वहूतम :

अनमूहित आकड़े, 172

परिचलन में वीटा का प्रयोग, 172 टि

लेखाचित्र द्वारा दिखाना :

नोरम, 174

बारबारता वक्र, 174, 176

सम्भ (कॉलम) आरेख, 174

व्याख्या, 172

अनमूहित आकड़े, 172—174

वॉयड, विलियम सी०, 612 टि

वीटा

निग्लेपन और कजुदना के माप, 209—218 552—555

वैपम्य तथा कजुदना के मापों की माप्यकता, 645—647

महम्मदगंध में गुणांक, 492

मारणियाँ, 712—713

वोशन सी०, 408 टि

वाइनपार, एम० 12 टि

वार्ड, जी०, 405 टि

वूस, डोनाल्ड, 413

भौतिक परिभाषा तथा व्यापार क्रिया के सूचकांक, 404—405

माध्य कजुदी वदन, 193, 212

महलनोबिस, पी० सी०, 711

माइनर जे० आर०, 489 टि

मॉडले, स्टोन्फ, 115

माना सापेक्ष, सूचकांकों के निर्माण में प्रयुक्त, 388

माना सूचकांक (समाहत मात्रा सूचकांक, सूचकांक देखें)

माथेर, के० 646

माध्य (समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य, द्विघातीय माध्य देखें)

माध्य वर्ग, आकस्मिकता. गुणांक, 435 टि

माध्य विचलन, 195

माध्यिका :

अनमूहित आकड़े, 168—169

ऋतुनिष्ठ मे प्रयोग, 296
 लेखाचित्र द्वारा दिखाना
 तोरण, 170—171
 बारवारता वक्र 176
 ध्यापना, 168
 समूहित आंकड़े, 169—170
 सूचकांका मे प्रयोग 383—384
 मानक चक्र 204—205, 507
 मानक वृत्ति
 अनुपात 592 763—764
 दो अनुपातों के बीच अन्तर, 608
 दो समान्तर माध्यों के बीच अन्तर 579,
 760—762 763
 समान्तर माध्य 563—564, 755—758
 z की, 648, 649
 मानक वृत्ति आकलित .
 दो अनुपातों मे अन्तर 608
 दो समान्तर माध्यों के बीच अन्तर की 582
 समान्तर माध्य, 573—574
 मानक विचलन
 असमूहित आंकड़े, 195—197
 गुणधर्म, 199—202
 चक्रिय गतियों की तुलना मे प्रयुक्त 349—
 353
 प्रतिद्वन्द्व, 197, 573
 समष्टि, 197, 564
 समष्टि का अनुमान 197, 573, 579—581
 समूहित आंकड़े, 197—199
 महसम्बन्ध, 420—421 टि, 505—507
 सामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल, 199—202,
 694, 696, 697
 मानचित्र (सांख्यिकीय मानचित्र देखें)
 मार्शल. ए०, 371
 मार्शल-ऐजवर्थ सूत्र, 371
 विचलन, वैसेल सी०, 226
 मिलर, ऐडल एच०, 634 टि
 मूड, ए० एम०, 571 टि, 643 टि
 मूर्ती, एम० एन०, 25 टि
 मूल्य परिवर्तन, समजन, 231, 356

मृत्यु दरे, 129—130
 मंकडानल, आर्थर, 410
 मैरिस्टन, पैकिन्स, 698, 707
 मौसटंगर, एफ०, 28 टि
 यथाश प्रतिदर्श, 28
 यदुच्छ्र प्रतिदर्श, 30
 यादृच्छिक प्रतिदर्श, 23—25, 557
 यादृच्छिक बिन्दु प्रतिदर्श, 28
 यूल, जी०, यू० 435 टि
 यट्स, एफ०, 24 टि, 261 टि, 698, 701, 707
 यट्स का शोयन, 593—594, 598, 618
 रग, एच० मो० 693—694
 रीड नॉर्विन जे०, 285
 रस्ताग्न चरघाताकी (घातीय) वक्र
 (अचर) स्थिरांको के लिए सूत्र, 271—272,
 749—750
 साखजन, 268—272
 गुणधर्म, 268—269
 विविध आकार के चार्ट, 269
 गैरानकन :
 वक्र, 74—75
 सांख्यिकी, 61
 रेखिक (एकघातीय) कार्यन्ध, 14
 रेकर्नैम, वास्टर सी०, 308
 रोमिन, एच० जी०, 593 टि, 596 टि
 रीम एफ० ए०, 691
 रीम, जे० ई०, 406 टि
 लघुगुणकीय चार्ट, प्रिड, सागज
 अर्ध लघुगुणकीय चार्ट, 92—106
 लघुगुणकीय ऊर्ध्वधर पैमाना, 92—106,
 262, 264 278, 450
 लघुगुणकीय क्षैतिज और ऊर्ध्वधर पैमाने,
 450
 लघुगुणकीय क्षैतिज पैमाना, 546—549
 लघुगुणकीय, प्रभावान्वय वक्र, आगजन, 546—
 552
 लघुगुणकीय प्रायिकता पत्र, 549

लघु मान्य (गुणोत्तर माध्य, हरान्मक माध्य,
द्विघातीय माध्य देखें)
सारचा, आर०, 616 टि
जिटरेरी डाइजेस्ट, प्रतिदर्श विधि, 10, 31
ली, सी० सी०, 11 टि
लुईस, टी०, 701
लेखाचित्रीय विधि, साम और परिमीमाएँ,
63—64
लैटर, एंस्फॉल्ड एच०, 632
लैसपयर, ई०, 370
लोवमस्टोन, डायनो, 115
वक्र, आरेखन के लिए अनुपात, 64, 66
वक्र प्रकार का चयन, 253, 288—290
वक्ररेखीय महसम्बन्ध (अरेखित सम्बन्ध देखें)
वक्रों के लिए अक्ष, 65—67
बाहूर्त, पी० जे०, 12 टि
वकिंग, हालब्रूक, 190 टि
वर्गमूल, सारणी, 714—723
वर्ग, सारणी, 714—723
वर्गीकरण :
अप्रकट 10
आधार, 3—6
गुणात्मक, 3
तैपिक, 4
भौगोलिक, 4—5
मानात्मक, 3
वर्षानुवर्ष घाट, 83, 332 336
वाकर, हेन एम०, 64 टि, 523 टि
वारवारता घनत्व, 86 150—151
वारवारता बटन .
आलेखन, 68—70 150—151, 153—155
आलेखन जब वर्ग अमान हो, 150—151
निर्माण, 142—143
वक्र :
अकगणितीय कामज पर, 68—71,
153—155
अकगणितीय प्रायिकता पत्र, 540
खुना सिरा 150, 177
मध्य-मूल्य ज्ञात करना, 146—147

मूल्य वक्रान की विधि, 146—147
लघुगुणकीय संतुलन पैमाने का प्रयोग, 546
लघुगुणकीय प्रायिकता पत्र, 549
सकेन्द्रण के बिन्दु, 147
मर्यादा तथा सीमाएँ, 145—147
वारवारता बंटनों की तुलना :
विभिन्न प्रतिदर्श आकार, 151—152
विभिन्न वर्ग अन्तराल, 152
मचयी, 154—155
वारवारता बटन तथा परिमर चार्ट, 85—86
वारवारता वक्र (द्विपद भी देखें)
आलेखन, 68—71, 148—151
आसजन, 527—556
तोरण, 154—155
प्रकार :
ऊनटा J, 150
निरुद्धा, 148—149
द्वि-बहुभुकीय, 174
सममित, 148
लेखाचित्रीय तुलना, 151—154
बान्ड अन्नाहम, 28 टि
विस्तृत सनफोर्ड मन्फर्ड, 149, 206, 207
विक्षेपण .
निष्पेक्ष, 193—202
लेखाचित्रीय उदाहरण, 192
सापेक्ष, 202—205
लेखाचित्रीय उदाहरण, 204
विगनक, अल्फ्रेड जे०, 656 टि
विचरण (देखें घटबढ़)
विले, एन० सी०, 575 टि
विविक्त चर, 146
विशिष्ट चक्रविश्लेषण, 355
विश्वास्यता (साधकता परीक्षण देखें)
विश्वास्यता सीमाएँ :
अनुपात, 600—607
निर्धारण के गुणांक, द्विचर रेखिक, 649—
650
प्रसरण, 626—627
मानक विचलन, 626—627

समांतर माध्य को, 575—580, 583
 सहसम्बन्ध गुणांक, द्विचर रेखिक, 649—650
 वृत्तरेख, 114, 116—119
 वृद्धिघाती वक्र, 279—286
 आसजन :
 चुने हुए बिन्दुओं की विधि, 279—285
 व्युत्क्रमों का प्रयोग, 279
 सम्पूर्ण से तुलना, 287—288
 गुणधर्म, 279
 तिरछा, 286
 प्रथम अन्तर 287—288
 श्रेणी, 285—286
 वृद्धि वक्र अनन्तस्पर्शी (रूपान्तरित चरघाताकी,
 गाम्पनै, वृद्धिघाती देखें)
 वैसेम डी० एल०, 12 टि
 वैषम्य, तिरछापन देखो
 व्यवस्थित प्रतिदर्श, 25
 व्यापक घटबढ़/विचरण
 अनेकधा सहसम्बन्ध
 तीन स्वतन्त्र चर, 485
 दो स्वतन्त्र चर, 473, 481
 अरेखिक सहसम्बन्ध
 तृतीयांश वक्र, 447
 द्वितीयांश वक्र, 441
 मद्गुणको से ऋजुरेखा, 455—456, 463
 वर्गमूलों से ऋजुरेखा, 459
 व्युत्क्रमों से ऋजुरेखा, 464
 सहसम्बन्ध अनुपात, 465—466
 द्विचर रेखिक सहसम्बन्ध, 417—420, 423,
 442, 477, 478
 व्यापक चक्र, (चक्रीय गतियाँ देखें)
 व्युत्क्रम, मारणी, 714—723
 शततमक, 170—172
 शततमक माप
 तिरछापन, 209
 विक्षेपण, 194
 शीर्षक :
 चार्ट, 79

सारणी, 56
 शुद्ध शेष चार्ट, 80
 शुद्ध सहसम्बन्ध (आंशिक सहसम्बन्ध देखें)
 शुल्क ऊर्ध्वाधर पमाने पर, 71—74
 गन्ध-क्रम गुणांक, 483
 श्रुतता सूचकांक
 उदाहरण, 395
 लाभ और हानियाँ, 393—395
 वर्णन, 393—395
 गृहस्थित आपेक्षिक, 311
 शेषार्ध के सशोधन, 117, 554 टि
 शोधन माध्य, देखो सशोधन माध्य
 श्रुहार्ड डब्ल्यू० ए०, 217 टि, 552 टि, 554
 558—561, 626, 695
 सकेत चिह्न, 663—687
 सदर्भ मारणी, 49
 सम्भावित, कमीटी (८ देखें)
 संयुक्त राज्य व्यूरो ऑफ़ लेबर स्टैटिस्टिक्स
 सूचकांक .
 उपभोक्ता कीमतें, 357, 399—400
 थोक वस्तु कीमतें, 359—361, 400—401
 सशोधित माध्य :
 अतुलित सूचकांक के परिकलन में प्रयोग,
 294—295, 307—310
 रूप, 165—166
 सतत चर, 146, 147
 समता अनुपात, 402
 समता/समानता सूचकांक, 357, 401—403
 समय परिवर्तन परीक्षण, 390
 ममष्टि आकलन (विश्वस्यता सीमाएँ भी
 देखें) :
 अनुपात, 608
 निर्धारण के गुणांक :
 अनेकधा, 658
 अरेखिक, 653—654
 आंशिक, 659—660
 द्विचर रेखिक, 650—651
 प्रसरण, 573—574, 758—760

मानक विचलन, 573—574, 758—760
 सहसम्बन्ध गुणांक (निर्धारण के गुणांक देखें)
 समष्टि का प्रसरण, आवर्तित (प्रसरण देखें)
 समष्टि परिवर्तन, ममजन, 231
 समांतर माध्य :

अन्तर के माध्यकता परीक्षण -

दो प्रतिदर्शों के बीच 579—586

प्रतिदर्श माध्य और ममष्टि माध्य, 565—580

प्रसमूहित आकड़ों में 156—157

औसत, 167—168

कुदना प्रतिदर्शों से 560—562

गुणधर्म 157—159

तुलना, प्रतिदर्शों से (प्रसरण का विश्लेषण)

प्रतिष्ठाएँ 137 166—167 608

माध्य प्रतिदर्शों में 557—558

मानक त्रुटि प्रतिदर्शों से, 563—564 755—758

लेखाचित्र द्वारा दिखाना बारवारता वक्र, 175—176

विश्लेषण प्रतिदर्शों से, 563—564

विश्वस्यता सीमाएँ, 577

विपमता प्रतिदर्शों में 558—562

व्यवहार प्रतिदर्शों से 557—564

व्याख्या, 156

मशोधित रूप 165—166 294—295, 307—311

समूहित आंकड़े

असमान वर्ग अन्तगण 164

तुला-सिरा वर्ग 164

दीर्घ विधिया, 159—162

सघ्न विधिया 162—164

समान माध्य, माध्यिका और बहुलक, विज्ञेयताएँ :

असमान वर्ग अन्तगणों का प्रभाव, 176—177

आंकड़ों की अनियमितता का प्रभाव, 179

आंकड़ों के वर्गीकरण की आवश्यकता, 176

गुले सिरे वाले वर्गों का प्रभाव, 177

गणितीय गुणधर्म, 179

चरम मानों का प्रभाव, 177—179

तिरछेपन का प्रभाव, 177

परिचय, 174

बीजीय निरूपण, 175

लेखाचित्र द्वारा दिखाना, 176

विश्वस्तता, 179

समुचित माप का चयन, 179—80

समांतर श्रेणी, 87—88, 97

समाहृत कीमत सूचकांक .

भारत, 367—375

अनुमानित भार, 374

‘आदर्श’, 373

आधार अवधि मात्राएँ, 370

औसत मात्राएँ, 371,

प्रदत्त-वर्ष मात्राएँ, 370—371

महत्तम समापवर्तक, 371—372

मार्शल-एजवर्थ, 371

ममूह भार, 380

सरल/साधारण, 366

समाहृत मात्रा सूचकांक, 384—385

समीकरण प्रकार का आसजन, 253, 288—290, 461—463

सरली, 140—141

सरल सहसंबन्ध (द्विचर रेखिक सहसंबन्ध देखें)

नहसम्बन्ध :

अनेकधा (अनेकधा सहसम्बन्ध देखें)

अरेखिक (अरेखिक सहसम्बन्ध देखें)

अर्थ, 407—411

आशिक (आशिक सहसम्बन्ध देखें)

उत्पाद-धूलें मूल, 420—421

काल श्रेणी (काल श्रेणी सहसम्बन्ध देखें)

कोटिबद्ध आंकड़े, 432—434

गुणांक (गुणांक का निर्धारण देखें)

गुणांक का ममष्टि आकलन (ममष्टि आकलन देखें)

गुणात्मक बटन, 434—436 468

तथा औसत, 428

तथा कारणता (कारणत्व), 424—425

तथा विपमता, 425—427

तथा व्याख्यात घटबढ़, 417—420

अनुक्रमिका

द्विचर रेखिक

असमूहित आंकड़े 421—424

समूहित आंकड़े 429—432

पञ्चना का माप (पञ्चना देखें)

षष्ठना का माप (उत्पाद-धूरण सूत्र देखें)

प्रथम धूरण महसूब 512

माध्यो का प्रयोग (महसूब अनुपात देखें)

मापो की विवक्षा 647—660

समूहन का प्रमाण 432

महसूब अनुपात

समष्टि में जान का आकलन 656

मायंकता परीक्षण, 654—656

सीमाएं 468

महसूब में प्रणामा-य समीकरण

प्रत्येक महसूब

जीन स्वतंत्र चर 484—485

दो स्वतंत्र चर 480

प्रत्येक महसूब

नूतीयारा वक 444—449

द्वितीयारा वक 437—440

लघुगणको से ऋजु रेखा 453—454

463

वर्गमूल से ऋजु रेखा 458—459

षष्ठमो से ऋजु रेखा 464

द्विचर रेखिक महसूब

असमूहित आंकड़े 411—413 422 142

477

समूहित आंकड़े 429—432

महसूब में भयम तन्त्र (कान श्रेणी महसूब देखें)

माथिकी

उद्गम, 1—2

परिभाषित 1 1

माथिकीय अन्तर बनाम जालीय अन्तर, 587

माथिकीय अनुमान (मायंकता परीक्षण देखें)

माथिकीय आंकड़े (आंकड़े माथिकीय देखें)

साथिकीय मार्गचित्र

तिरछी रेखाओं वाले 120

पिन 121—122

बिन्दु 120—121

माथिकीय रिपोर्ट 61—62

माथिकीय विधि 1 12

साथिकीय माथिकीय (माथिकीय, साथिकीय देखें)

साधारण लघुगणक

ब्याम्पा 724

मारली, 725—739

मापेओ वा मोमर सूचकांक (सूचकांक देखें)

समान्य सांख्यिकी

समान्य सांख्यिकी (समान्य सांख्यिकीय देखें)

सांख्यिक प्रवृत्ति (सांख्यिकीय सांख्यिकीय देखें)

सांख्यिक विज्ञान (इवकट्रॉनिक सांख्यिकीय मशीन देखें)

सांख्यिकीय

आय का माय-दण्डन 61

आकार और स्वरूप 60

हकाइया, 59

टाइप आकार और प्रकार, 61

टाइप की हुई, 61—62

तुलनाएं 51—53

पाद-टिप्पणियाँ, 56—57

पुन. तयार करना (प्रतिकृति) 61—62

प्रकार 49

प्रतिगणनाएं 57—58

प्रतिगणना की व्यवस्था, 54—56

प्राथमिक टिप्पणियाँ 56—57

बन 53—54

योग, 59

नेलाकन 61

शीर्षक तथा पहचान, 56

संख्याओं का पूर्णक 58

स्रोत-टिप्पणियाँ, 57

सांख्यिकीय म पाद-टिप्पणियाँ, 56—57

सांख्यिकीय म प्राथमिक टिप्पणियाँ, 56—5

सांख्यिकीय म व्यवस्था .

ऐतिहासिक, 55

त्रैधिक, 55 56

परिमाण, 55

प्रयागत, 55
 भौगोलिक, 54—55
 वर्णानुक्रमिक, 54
 सरयात्मक, 56
 सारणीकरण :
 गणन अथवा गिनती पत्र 35
 यात्रिक, 37—42
 हाथ से छँटाई, 35
 सारणी में बल देना, 53—54
 सारणी में योग, 59
 सारांश सारणी, 49—51
 सांठर (छाँटने वाली मशीन) बिद्युत् (इलै-
 क्ट्रॉनिक सांख्यिकीय मशीन देखें)
 सार्यकता :
 कमौटी, 569—570
 स्तर, 565
 P का मान, 568—571
 सार्यक अंक, 767—771
 सार्यकता अनुपात 567, 574
 सार्यकता की कमौटी, चयन, 569—570
 सार्यकता परीक्षण, विश्वास्यता सीमाएँ भी
 देखें)
 एक पिछला मिरा (भुजा) बनाम दो पिछले
 मिरा, 567
 कतिपय प्रसरण 629—630
 कई वर्ग 609—623 614—627
 नुटियाँ 568
 दो प्रतिदर्श मानों में अन्तर :
 अनुपात, 608—609, 612—623
 निर्धारण के गुणांक 649
 प्रसरण, 627—629 620—645
 मानक विचलन, 627—629
 समान्तर माध्य, अस्वतन्त्र प्रतिदर्श, 583—
 586
 समांतर माध्य, स्वतन्त्र प्रतिदर्श, 579—
 583
 महसुबध गुणांक, 649
 प्रतिदर्श तथा समष्टि मानों में अन्तर -
 अनुपात, 588—607, 609—612

निर्धारण के गुणांक, 647—648, 650
 —651
 प्रसरण, 624—627
 बीटा, 645—647
 मानक विचलन, 624—627
 समान्तर माध्य, 565—580
 महसुबध गुणांक, 647—648, 650—
 660
 प्रेक्षित तथा आकलित बारबारताओं में अन्तर,
 608—609, 612—623
 प्रेक्षित तथा समष्टि बारबारताओं में अन्तर,
 588—607 609—612
 रेखिक आकलन समीकरण का ढाल, 647
 सभावितता कसौटी (L देखें)
 F (F देखें)
 t (t देखें)
 z (z स्पातरण देखें)
 सार्वजनिक राय की समस्या
 प्रतिदर्श विधि, 29
 साहचर्य और कारणता की सम्प्रति, 9,
 424—425
 सिंह, डी०, 27 टि
 सिंह, बी० डी०, 27 टि०
 सिद्धि (प्रमाण) शैक्षिक, 740—766
 सुधर-मक्का अनुपात, 101—103, 131—132
 सूक्ष्मता का माप, 202
 सूचकांक
 आंकड़े 361—365
 आधार, 365
 कीमत, 366—384
 शैक्षिक परीक्षण, 389—391
 प्रयोग, 356—357
 भाषा का चयन, 369—375, 378—380
 भाषा का परिवर्तन, 395—399
 मात्रा, 384—388
 वर्णन :
 औद्योगिक उत्पादन का फेडरल रिजर्व
 सूचकांक, 404—405
 कृपको द्वारा प्रदत्त एवं प्राप्त कीमतों के

कृषि विपणन सेवा (एग्रीकल्चरल
माकिटिंग सर्विस) के सूचकांक तथा
भारत सरकार, 401—403
न्यूयार्क स्टॉक एक्सचेंज सामान्य स्टॉक
सूचकांक, 403—404
ब्यूरो ऑफ लेबर स्टैटिस्टिक्स उपभोक्ता
कीमत सूचकांक, 399—400
ब्यूरो ऑफ लेबर स्टैटिस्टिक्स : चोक
बन्तु (पण) कीमतें, 400—401
वस्तुओं का प्रतिस्थापन, जोड़ना या
निकालना, 395—399
व्याप्य (धर्म), 356
शुल्लला, 393—395
ममस्याएँ 358—359
समाहृत :
कीमत (समाहृत कीमत सूचकांक भी
देखें), 366—375
मात्रा, 384—385 (समाहृत मात्रा
सूचकांक भी देखें)
सापेक्षता का व्यवहार, 359—361
सापेक्षता की श्रोत
कीमत, 375—384
मात्रा, 388
सूत्रों का निरूपण, 740—766
सूत्रों की तुलना, 384
मोडरेट प्रतियोगिता, 28
सोलोमन, लियोनार्ड एम०, 208 टि
स्टाम्प, सर जोमिया, 15 टि
स्टोन, हेरोल्ड 107 टि
स्टुडेंट, ए०, 435 टि, 436 टि
स्टूडेंट (डब्ल्यू० सी० गोसेट), 699
स्टेनबरी, वॉल्टर ए०, 105 टि
स्टैमिल द्वारा अक्षर लेखन, 79
स्टोरी, आर० आर्न, 406 टि
स्ट्रुबर्ट, स्पोनोरा, 529
स्ट्राइकर, रॉय ई०, 116 टि
स्तरित प्रतिदर्श, 26—28
स्पिरामेन का कोटि महामन्त्र्य गुणांक, 432
खोन टिप्पणी :

चार्ट 79
मारसी, 57
स्वतन्त्र चर (चर देने)
स्वतन्त्रता के अक्ष (स्वानय कोटिया)
अक्ष के परीक्षण
वर्तमान माध्य (प्रसरण का विश्लेषण
देखें)
दो अक्षतन्त्र प्रतिदर्शों के माध्यों के बीच,
586
दो प्रतिदर्श प्रसरण 627 (प्रसरण का
विश्लेषण भी देखें)
दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों के माध्यों के बीच
582
प्रतिदर्श प्रसरण तथा समष्टि प्रसरण,
625
प्रतिदर्श माध्य और समष्टि माध्य 575
वार्ड-वॉग मारगुदा 609, 614, 618—619
प्रसरण का विश्लेषण 634, 637—638,
642
सहसम्बन्ध मापों के परीक्षण
अनेकधा 657
अरेनिक, 652—656
आशिक 651, 658—660
द्विचर रेखिक, 647

हन्ना ई० जे०, 327 टि
हृत्तिक माध्य :
गुणधर्म, 185—186
गुणोत्तर माध्य से तुलना, 191, 741—742
परिकल्पना, 185—186
प्रयोग
अक्ष—पद भार, 186—189
तिरछे/विषमिन् बटन, 190
फसल वर्ष में मूल्यों की श्रोत निकालन
190
सूचकांक, 279 टि, 383, 393
व्याप्य 185
समान्तर माध्य में तुलना, 186—1
190—191

हरात्मक विश्लेषण काल श्रेणी का, 353
 हार्टले, एच० ओ०, 616 टि, 689, 693, 695,
 701, 707, 712, 713
 हाडिंग, पी० एन०, 584
 हीमन, एच०, 12 टि, 25 टि
 होटेलिंग, हैरल्ड, 648 टि
 होम्स, बर्ट ई०, 408
F :
 दो आकलित प्रसरणों में अन्तर की सार्थकता
 का परीक्षण, 627—629
 परिभाषा, 627—28
 प्रसरण का विश्लेषण, 634—635. 638,
 643—644
 प्रमानान्य, काई वर्ग, तथा 1 घटनों सहित
 646
 वटन 527
 मानों की सारणी 706—710
 वक्र 627
 सहसम्बन्ध परीक्षण 647 टि, 652—659

F_2 के मानों की सारणी, 695
L :
 कनिष्ठ प्रसरणों की तुलना, 629—630
 मानों की सारणी, 711
 वर्णन, 629—630
 NYSE सामान्य स्टॉक सूचकांक, 403—404
 प्रसामान्य, काई वर्ग, तथा F वटनों से
 सम्बन्ध 645
 वटन, 577
 मानों की सारणी, 698—699
 रेखिक आकलन समीकरण के ढाल के लिए
 सार्थकता परीक्षण 647—648
 वक्र, 577
 समान्तर माध्य के लिए सार्थकता परीक्षण,
 575, 582, 585—586
 सहसम्बन्ध गुणांक के लिए सार्थकता परीक्षण,
 647—648 652, 654 658—659
z रूपांतरण 648—649 659
 σ^2 का अनिश्चित आकलन, 574

शुद्धि-पत्र

पृष्ठ	पंक्ति	अशुद्ध	शुद्ध
		ऊपर म नीचे न	
213	3	— $- =_4$	$r_4 = .$
	4	— ()	$. (.)^4$
	5	— पूरी पक्ति	$r_4 = 1_4 - 41_11_3 + 6r_1^21_2 - 3r_1^4$
	— 5	बूटवबुदो	तुगवबुदो
235	3	— उपनति	...उपनति I
268	9	— $. + ab^+$	$.. + ab^4$
286	15	— $10^{a+b}Y_cX^2$	$10^{a+b}1+cX^2$
313	3	— वस्तुनिष्ठ	ऋतुनिष्ठ
442	2	— $. . X_2$	$. X^2$
448	14	— $. X^2X^3$	$. X^2X^3$
464	— 4	$\Sigma\left(\frac{1^2}{y}\right)$	$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2$
465	4	— आयतन	आवनन
474	4	— पूरी पक्ति	$r'_{12} = \frac{R'_{122} - r_{12}^2}{1 - r_{12}^2}$
579	— 3	$\sigma_{\bar{X}_1} - \bar{X}_2$	$\sigma_{\bar{X}_1} - \bar{X}_2$
580	— 1	विश्वाम...	$. . विश्वास्यता ..$
582	12	— 0 291	0 298
610	12	— d	p
610	— 5	$(..)^1$	$(...)^1$
618	11	— A	एक
622	9	— z	x^2
624	— 6	x	x^2

पृष्ठ	पक्ति	अशुद्ध	शुद्ध
	ऊपर से नीचे से		
624	— 4	σ	σ
624	— 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sigma^2}$
629	19 —	$(\sigma_k)^{n_k}$	$(\sigma)^{n_k}$
631	17 —	$[\quad] = \left(\frac{\Sigma X}{N} \right)^2$	$[\quad] = \frac{(\Sigma X)^2}{N}$
632	— 1	$(\quad)^2$	$(\quad)^2$
634	1 —	$\left(\frac{\Sigma X}{1} \right)^2$	$\left(\frac{\Sigma X}{1} \right)^2$
637	14 —	<u>309 961</u> <u>1 236 4289</u>	<u>309 4161</u> <u>1 236 9289</u>
642	7 —	$\frac{\sum \left(\frac{N_b}{\sum 1} \right)^2}{N_b}$	$\frac{\sum \left(\frac{N_b}{\sum 1} \right)^2}{N_b}$
645	1 —	L	X^2
645	10 —	e^2	X
650	— 1	$\underline{y^2_s}$	Σy
651	— 4	$r^2_{YXX^2}$	r_{YXX^2}
651	— 2	$N-2$	$N-3$
654	5 —	$r^2_{YX^2X^2}$	$r^2_{YX^2X^2}$
654	7 —	$r^2_{YX^2XX^2}$	$r^2_{XX^2XX^2}$
656	14 15—	η	η
656	17 —	η_{Y^2X}	η_{Y^2X}
657	11 —	ΣX^2_{2123}	ΣX^2_{2123}
	20 —	$(1 - R^2_{1234} \ m)$	$(1 - R^2_{1234} \ m)$

पृष्ठ	पंक्ति	अशुद्ध	गुड
	ऊपर स नीचे स		
658	5 —	$R_{1\ 231}\ m$	$R_{231}\ m$
658	7 —	$\frac{\sum r^2}{r^2_{231}}$	$\frac{\sum r}{r_{231}}$
659	7 —	r_{231}	r_{231}
659	— 1	$[(V-m-1)]$	$[\overline{N}-(m-1)]$
660	3 —	$=1$	$=1-$
702	— 2	$\frac{\sigma}{\sigma}$	$\frac{\sigma}{\sigma}$
703	3 —	$\frac{\sigma}{\sigma^2}$	$\frac{\sigma}{\sigma^2}$
704	2 —	पहला अक्षर	σ^2
711	4 —	N_0	N
742	9 —	$\frac{\sum d^2}{r^2}$	$\frac{\sum d}{r^2}$
745	16 —	2σ	$-\frac{x^2}{2\sigma^2}$
745	— 2	$\frac{x_N}{2\sigma}$	$-\frac{x_N}{2\sigma^2}$
748	3 —	पंक्ति व आरम्भ स = को छोड़ द ।	
748	4 —	$(\quad = \quad)$	$(\quad - \quad)$
750	— 1	$\sqrt{\frac{\sum Y^2}{n}}$	$\sqrt{\frac{\sum Y^2}{n}}$
753	— 2	$\frac{\sum x_{c1\ 2}^2}{n}$	$\frac{\sum x_{c1\ 2}^2}{n}$
754	9 —	x_{223}	r_{23}
754	17 —	$\sum x_{c1\ 23}^2$	$\sum x_{c1\ 23}$
754	19 —	$\sum x_c x_{1\ 23}$	$\sum x_{c1\ 23}^2$
756	— 6	$\sigma_{\sum X}^2$	$\sigma_{\sum X}^2$
756	— 5	$(\sum x)$	$(\sum x)^2$
756	— 1	$+c+$	$+x_c+$

पृष्ठ	पक्ति	अशुद्ध
	ऊपर से नीचे	
757	— 4	σ_2 Σx
758	— 2	$= \hat{\sigma}^2$
759	— 1	$= \sum_{i=1}^k x_i^2$
760	8 —	पूरी पक्ति
760	14 —	$\Sigma x_K'$
761	17 —	$X_1 =$

शुद्ध

$$\sigma_{\Sigma 1}^2$$

$$= \sigma$$

$$= V \sum_{i=1}^k x_i^2$$

जहाँ s^2 ममांतर माध्य है s^2 मानों का ।

$$\frac{\Sigma x_K}{N}$$

$$X_1 =$$